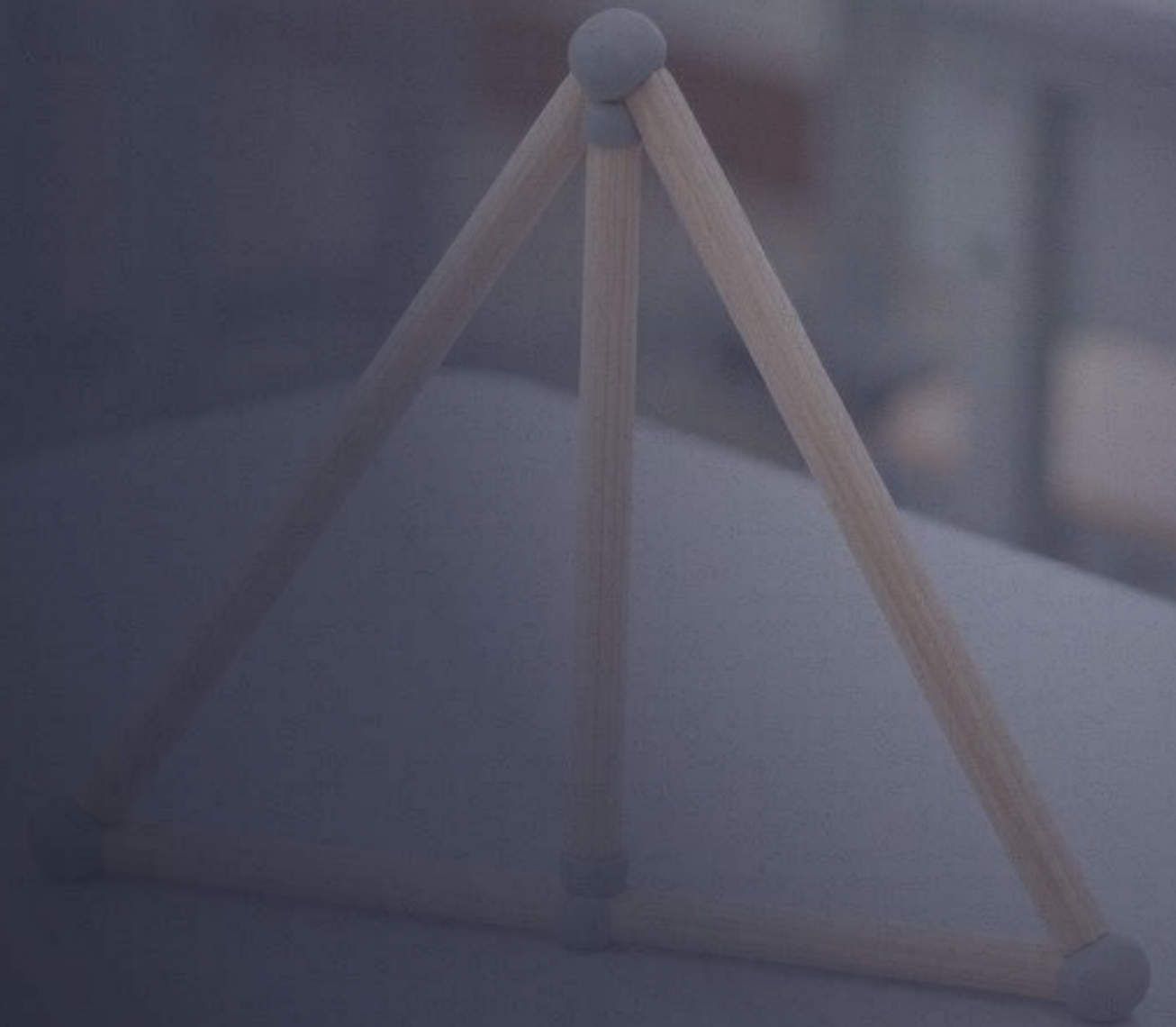


Преобразования подобия: как меняется фигура без потери формы



Подобие сохраняет форму: углы остаются равными, а размеры
меняются по коэффициенту k .

Подобие вокруг нас: от школьных чертежей до карт

01

Подобие встречается в картах, схемах, фотографиях местности, макетах и инженерных чертежах. Масштаб 1:100 означает: 1 см на рисунке соответствует 100 см в реальности. В геометрии оно помогает сравнивать и находить неизвестные размеры.

Что означает, что две фигуры подобны

01

Две фигуры подобны, если одну можно получить из другой увеличением или уменьшением без искажения формы. То есть «углы держат форму», а меняется только размер.

02

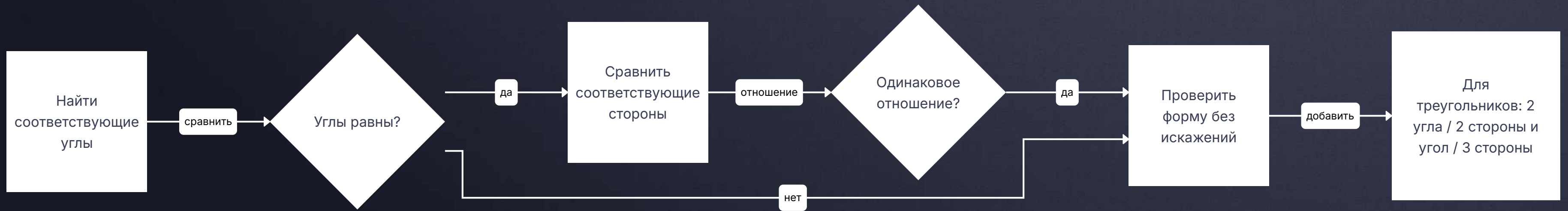
У подобных фигур равны соответствующие углы: они одинаково «раскрыты». Поэтому даже на рисунках разных размеров фигуры выглядят одинаково по форме.

03

Соответствующие стороны пропорциональны: их отношения одинаковы для всех пар. Это общее число называют коэффициентом подобия k , и оно показывает, во сколько раз одна фигура больше другой.

Как проверить и установить подобие фигур

Признаки подобия опираются на углы и пропорции сторон.



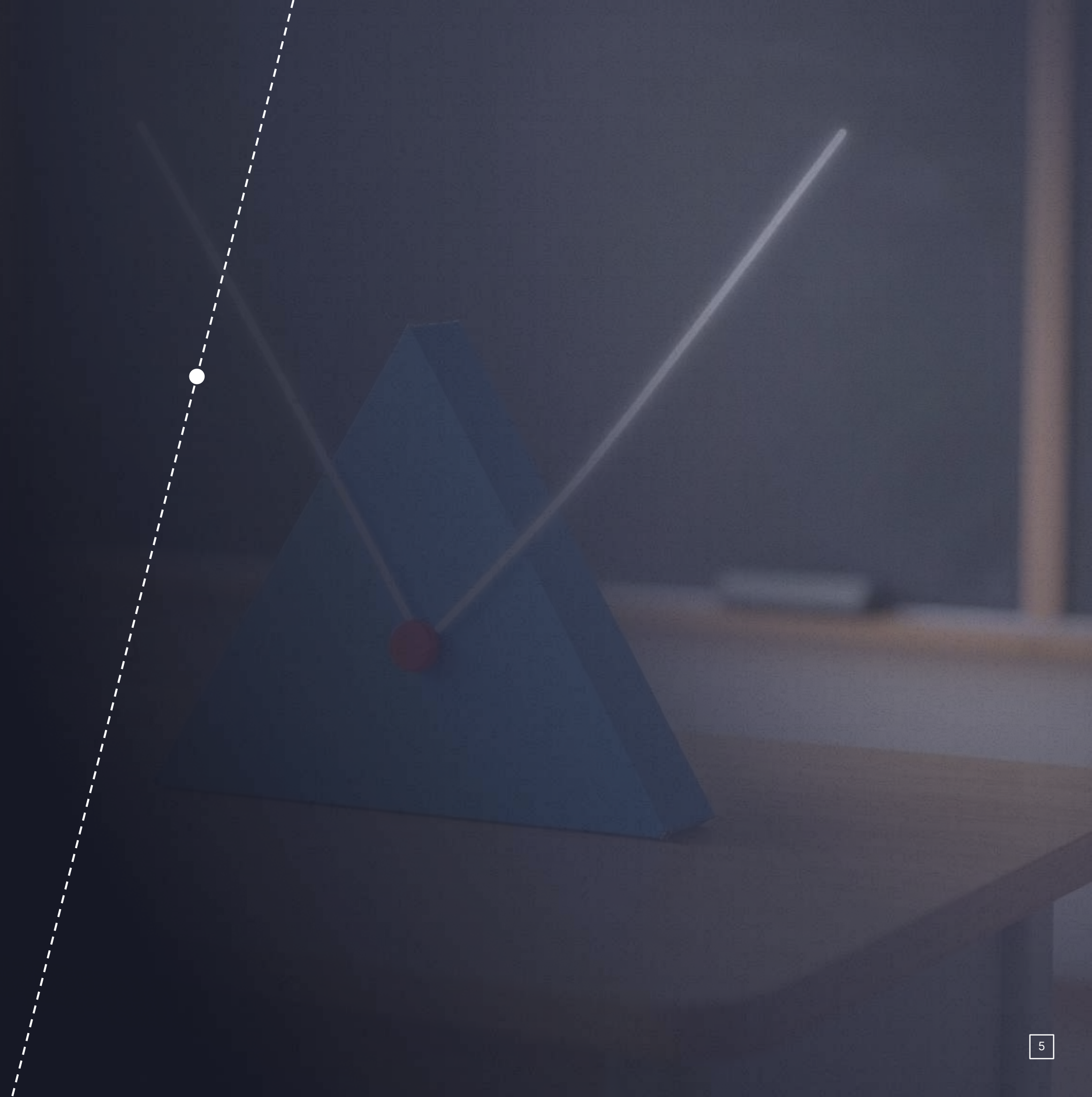
Гомотетия как центральное преобразование подобия

Определение гомотетии

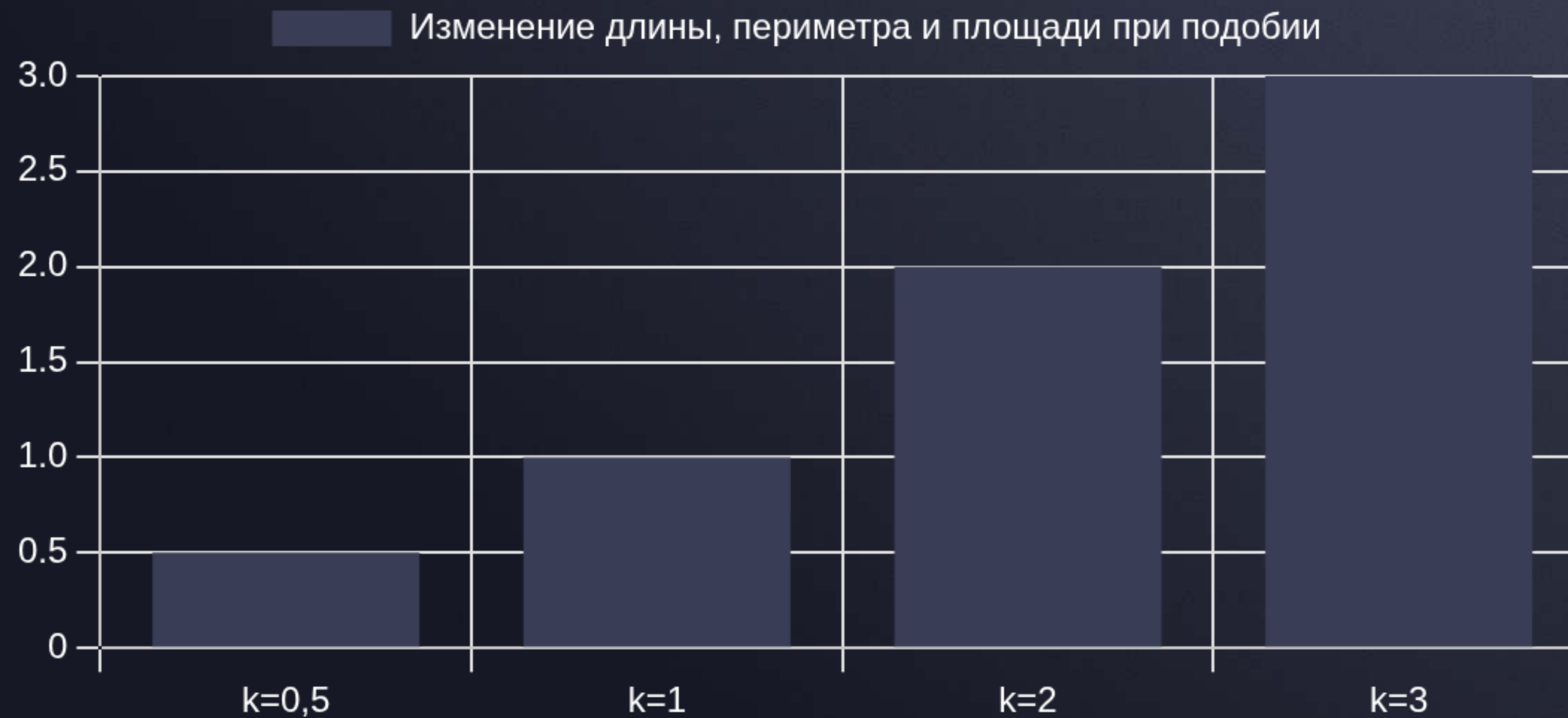
Гомотетия задаётся центром O и коэффициентом k . Каждая точка фигуры переходит по лучу, который начинается в O и проходит через исходную точку. От расстояний до центра зависит, куда попадёт новая точка.

Как влияет коэффициент k

Если $k > 1$, фигура увеличивается, а если $0 < k < 1$ — уменьшается. При $k < 0$ размер меняется и фигура оказывается по другую сторону от центра O : ориентация относительно центра меняется.



Как меняются длины, периметры и площади



Линейные размеры растут или уменьшаются как k , а площадь — быстрее: она меняется как k^2 . Поэтому при большом k разница заметна сильнее.

Диаграмма подчёркивает: изменение площади всегда в квадрат коэффициента. Из-за этого увеличение, например, в 3 раза по длине даёт рост площади в 9 раз.

Расчёт по правилам подобия (длина $\propto k$, периметр $\propto k$, площадь $\propto k^2$)

Примеры коэффициента подобия

Коэффициент k показывает, как меняются размеры при подобии. Знак важен: он влияет на расположение и ориентацию относительно центра.

Положительные k задают увеличение/уменьшение. При $k=-1$ размеры те же, но ориентация относительно центра меняется (это важно для рисунков и соответствий).

k	Как меняются длины	Итог
1	в 1 раз	фигуры равны по размеру
2	в 2 раза	увеличение вдвое
0,5	в 2 раза меньше	уменьшение вдвое
3	в 3 раза	увеличение втрое
-1	по длинам без изменения	равные по размеру, ориентация меняется
—	—	знак k меняет расположение

Обобщение правил коэффициента подобия из темы школьной геометрии

Признаки подобия треугольников

01

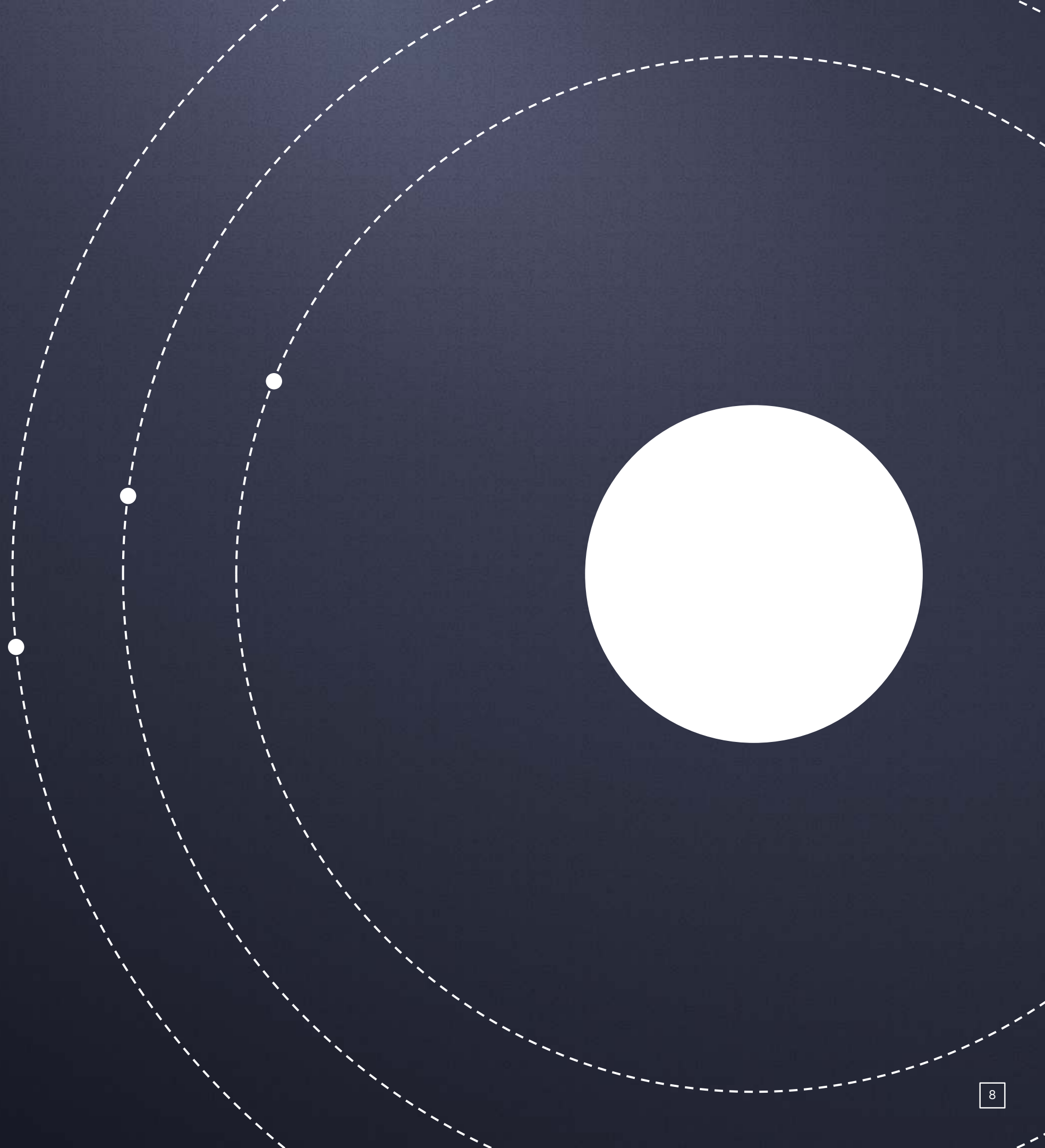
Первый признак: если два угла одного треугольника равны двум углам другого, то треугольники подобны. Тогда третий угол тоже получится равным, а форма совпадёт.

02

Второй признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, и угол между ними равен, то треугольники подобны. Угол «фиксирует» правильное расположение.

03

Третий признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны. Этот признак удобен, когда известны все длины сторон.



Подобие наглядно: карты, планы и чертежи

Карта и масштаб: расстояние без измерения линейкой на местности

На карте масштаба 1:50 000 1 см соответствует 500 м на местности. Благодаря этому можно сравнивать реальные расстояния по карте, сохраняя пропорции. Для иллюстрации подходят фрагменты дорог и линий рельефа.



План класса: уменьшенная копия комнаты

Школьный план класса показывает расположение парт и проходов в уменьшенном виде. Размеры там связаны с реальными по коэффициенту масштаба, а формы помещений остаются похожими. Такой пример хорошо выглядит вместе с условными обозначениями.



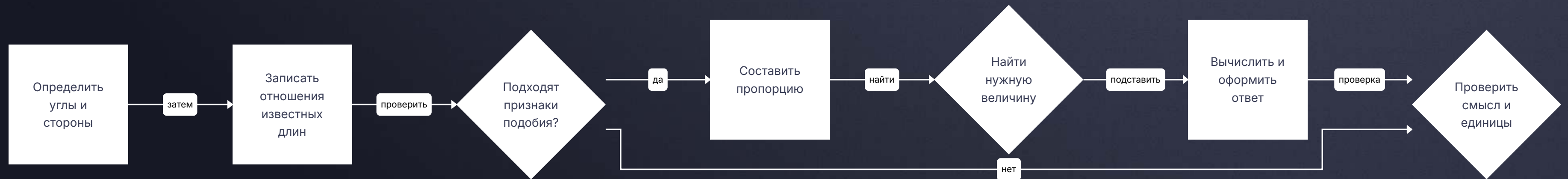
Чертёж здания: точность через подобные фигуры

В архитектурных чертежах и технических схемах объекты изображают в масштабе, чтобы можно было проверять и согласовывать размеры. Границы комнат, проёмов и элементов конструкции сохраняют форму, но меняют масштаб. Это удобно показать на одном листе с подписями масштаба.



Алгоритм решения задач на подобие

Порядок действий помогает не запутаться в коэффициентах и соответствиях.



Преобразования, которые сохраняют форму



Параллельный перенос

Переносит каждую точку фигуры в одном направлении на одинаковое расстояние. Длины и углы не меняются, поэтому фигура получается той же по размеру и форме, но смещённой в пространстве.



Поворот

Поворачивает фигуру вокруг выбранной точки на заданный угол. Соответствующие углы остаются равными, а отрезки сохраняют длины, так что форма не искажается и общий контур остаётся прежним.



Осевая симметрия

Отражает фигуру относительно прямой: каждая точка получает «зеркальное» положение. При этом сохраняются длины и углы, поэтому фигура снова оказывается равной самой себе относительно выбранной оси.



Почему это всё — частные случаи подобия

Подобие шире равенства: оно допускает увеличение или уменьшение с общим коэффициентом k . Равные фигуры — частный случай, когда $k=1$, а преобразование не меняет размеров.

Равенство, подобие и масштабирование: сравнение



Если при сравнении совпадают только пропорции, говорят о подобии, а не о равенстве. У масштабирования меняются размеры, но сохраняются отношения длин.

Чем меньше сохраняется информации о размерах, тем шире понятие. Равенство требует совпадения размеров, подобие допускает одинаковую форму при $k \neq 1$.

Схема построена по определениям курса геометрии (формулы и признаки подобия), без внешних данных.

Формулы для вычислений в подобных фигурах

01

Если коэффициент подобия равен k , то любая соответствующая длина увеличивается в k раз: $L2 = L1 \cdot k$. Поэтому достаточно знать одну пару отрезков, чтобы восстановить остальные размеры.

02

Периметр подобных фигур также умножается на k : $P2 = P1 \cdot k$. Это помогает находить периметр без пересчёта всех сторон, если известны длина и коэффициент подобия для масштабирования.

03

Площадь меняется быстрее: $S2 = S1 \cdot k^2$. Для объёмных фигур аналогично $V2 = V1 \cdot k^3$. Значит, один и тот же коэффициент влияет по-разному на длины, площади и объёмы.

Числовые примеры применения коэффициента подобия

величина	k	было	стало
сторона	3	4 см	12 см
периметр	0,5	18 см	9 см
площадь	2	25 см ²	100 см ²
сторона	1,5	7 см	10,5 см

Расчёты по формулам подобия: L, P умножаются на k; S умножается на k².

Показано, как меняются длины, периметры и площади при разных значениях коэффициента k. Во всех примерах используются правила: длина $\propto k$, периметр $\propto k$, площадь $\propto k^2$.

Эти примеры наглядно показывают, что площадь меняется быстрее длины, потому что зависит от квадрата коэффициента k.

Типичные ошибки в задачах на подобие

Одна из частых ошибок — сравнивать не соответствующие стороны: например, брать отрезки, которые на рисунке отмечены «по смыслу», но не по позициям. Тогда отношения не будут одинаковыми, и подобие окажется нарушенным.

Ещё одна распространённая ловушка — перепутать коэффициент k и k^2 при работе с площадью. Кроме того, важно проверять, что углы равны и что пропорции сторон соблюдаются для всех пар, а не только для одной.



Как коэффициент подобия влияет на площадь



При уменьшении масштаба в два раза ($k=0,5$) площадь становится меньше сильнее: она уменьшается не в 2 раза, а в 4 раза.

График подчёркивает: площадь реагирует на масштаб по квадрату коэффициента. Поэтому даже небольшое изменение k заметно меняет S .

Расчёты по правилу $S_2 = S_1 \cdot k^2$, примеры значений k : 0,5; 1; 2; 3.

Как решать задачу на подобие по чертежу

Подходит для задач, где есть масштаб, рисунок и требуется найти длину, периметр или площадь.



Подобие в природе, технике и архитектуре



Природные формы

Листья, раковины и снежинки часто сохраняют «одну и ту же геометрию» при увеличении отдельных частей. Поэтому по пропорциям можно сравнивать размеры объектов без детального измерения всего.



Снежинки и узоры

В узорах видно повторение элементов: если рассмотреть фрагменты под одинаковыми углами, получаются подобные фигуры. Это помогает описывать форму по масштабу и геометрическим правилам.



Инженерные модели

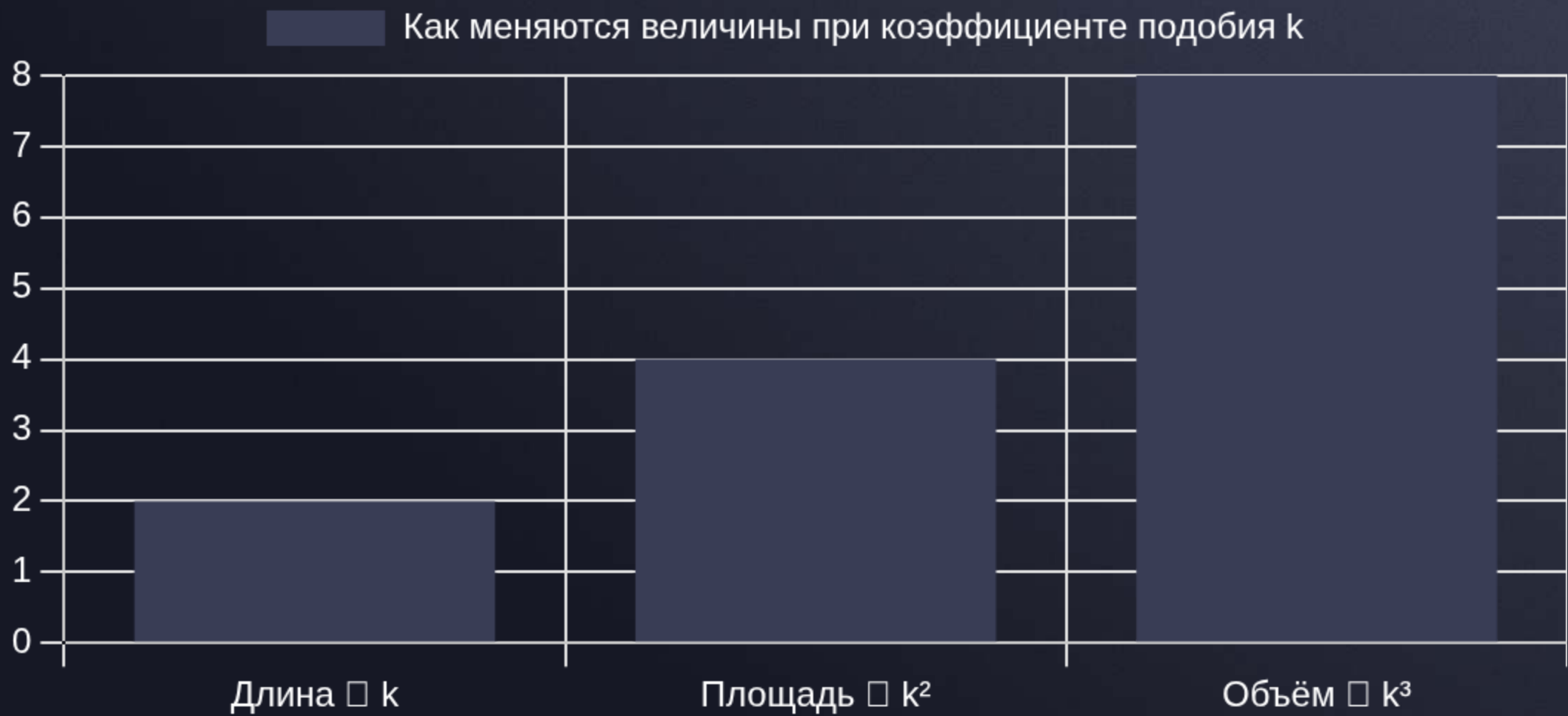
В технике уменьшенные модели проверяют до изготовления настоящего объекта. Геометрическое подобие позволяет переносить результаты: форма сохраняется, меняются только размеры в заданном масштабе.



Архитектурные макеты

Архитектурные макеты строят в уменьшенном виде, но с сохранением пропорций. Тогда по чертежу можно оценивать расстояния и соотношения элементов будущего здания.

Главные свойства преобразований подобия



Чтобы быстро оценить эффект масштабирования, полезно помнить, что степень зависит от размерности: 1 — для длины, 2 — для площади, 3 — для объёма.

При увеличении масштаба в 2 раза объём растёт сильнее всего. Поэтому задачи на площади и объёмы требуют внимания к степеням k .

Расчёты по общим правилам подобия: $L \propto k$, $S \propto k^2$, $V \propto k^3$ (пример при $k=2$).

Итоги: почему подобие так помогает

Преобразования подобия связывают фигуры одной формы, но разных размеров. Они позволяют находить неизвестные длины, работать с масштабом и проверять чертежи. Опора — коэффициент k , признаки треугольников и правила для периметра, площади и объёма.

