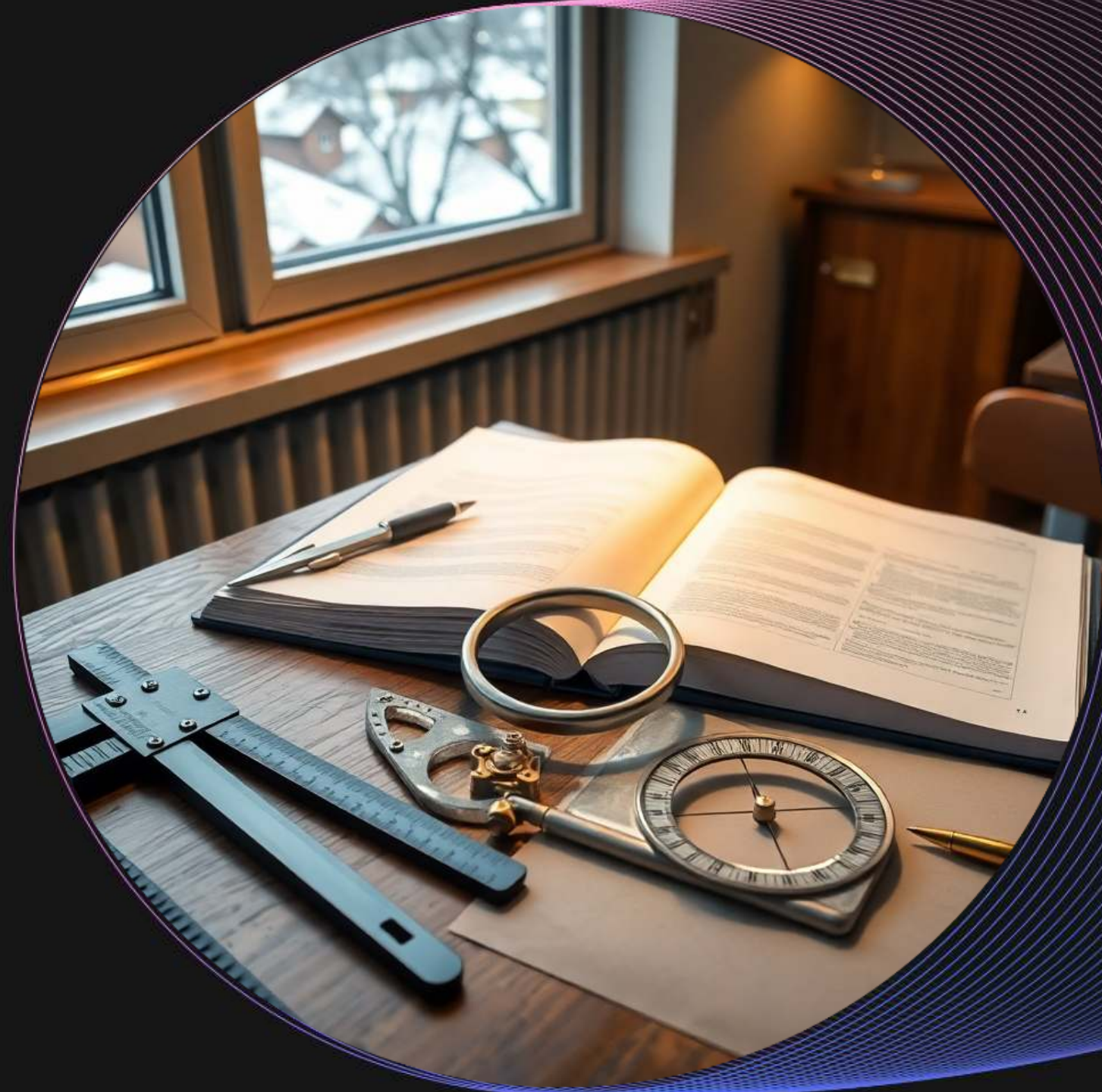


Тригонометрические формулы: от базовых тождеств к решению задач

Освоим ключевые формулы и увидим,
как они помогают решать задачи.



Где формулы особенно нужны и почему это важно

Тема объединяет базовые знания о тригонометрических функциях и превращает их в рабочий инструмент: для упрощения выражений, доказательства тождеств, решения уравнений и анализа графиков, в том числе в заданиях ЕГЭ по математике.



Тригонометрическая окружность и знаки функций

Единичная окружность

Тригонометрическая окружность имеет радиус 1 и центр в начале координат. Положение точки на ней удобно задаётся углом φ , а её координаты сразу дают $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Опорные направления

Углы, кратные 90° , связаны с осями координат и дают опорные значения функций. Они помогают быстро ориентироваться в формулах приведения и проверять результаты вычислений без лишних ошибок.

Знаки по четвертям

Знак синуса и косинуса определяется четвертью, в которой расположен угол. Синус положителен в I и II четвертях, косинус — в I и IV, а тангенс и котангенс — в I и III.

Основа для формул

Именно окружность позволяет видеть тригонометрические соотношения геометрически. На её основе удобно выводить тождества, определять знаки выражений и понимать, почему одни значения повторяются с периодом.



Основное тригонометрическое тождество

1 Главная запись

Основное тождество имеет вид $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Это одно из центральных соотношений тригонометрии, без которого невозможно уверенно преобразовывать выражения и проверять вычисления.

2 Геометрический смысл

Тождество следует из уравнения единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$, если подставить $x = \cos \alpha$ и $y = \sin \alpha$. Так связь между алгеброй и геометрией становится наглядной.

3 Полезные преобразования

Из формулы сразу получаются равенства $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ и $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Они особенно полезны, когда нужно заменить квадрат одной функции через другую.

4 Практическая проверка

Это тождество помогает контролировать правильность вычислений: если выражение должно равняться 1, а получается другое число, значит, в преобразованиях допущена ошибка или потерян знак.

Формулы для тангенса и котангенса

— Определения функций

Тангенс задаётся как $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$, а котангенс — как $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. Поэтому обе функции определены только при ненулевом знаменателе.

— Связь с тождеством

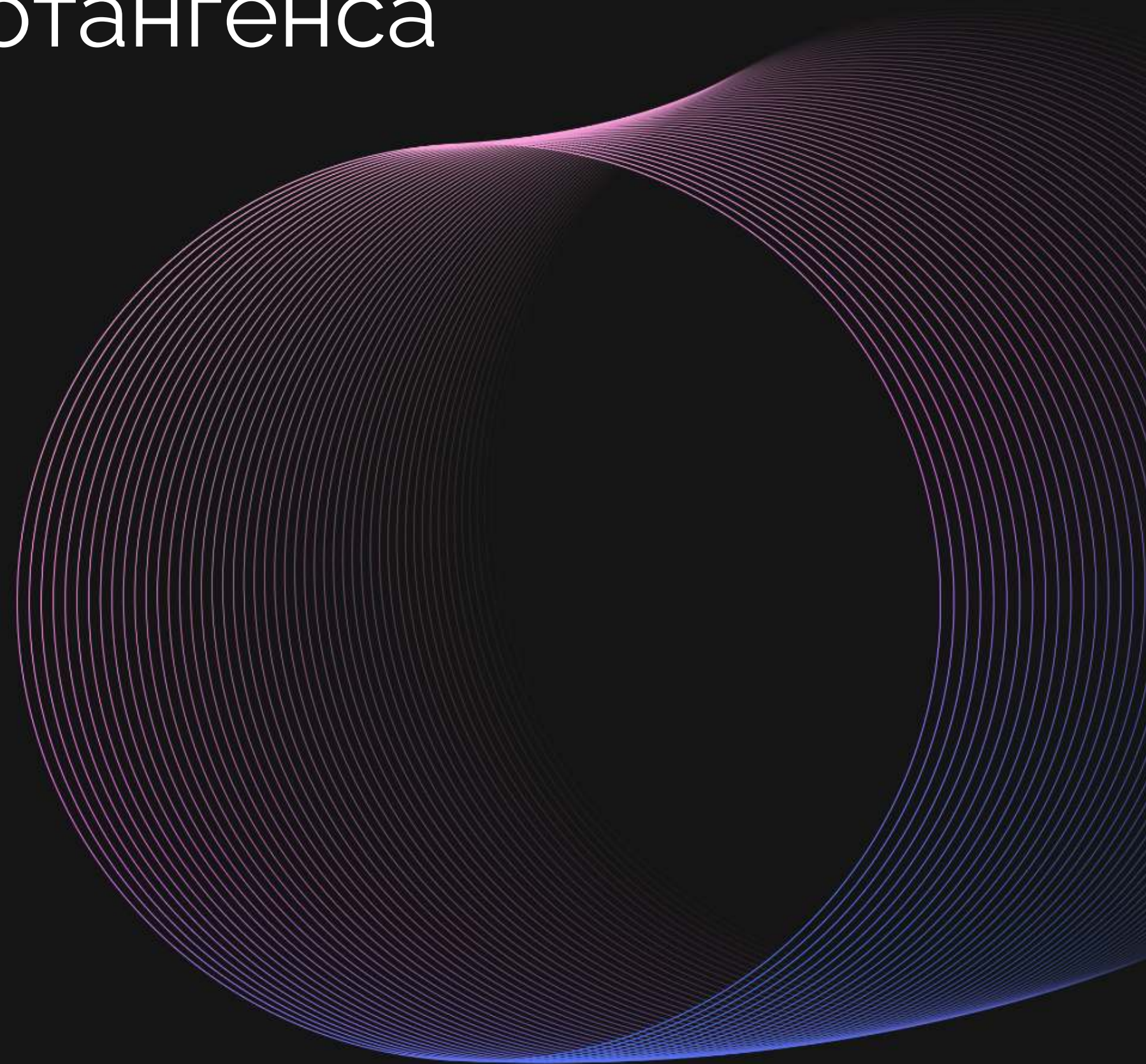
Из основного тригонометрического тождества следуют удобные формулы $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 / \cos^2 \alpha$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 / \sin^2 \alpha$, которые часто упрощают дробные выражения.

— Переход к новым формам

Если выражение содержит дроби с синусом и косинусом, переход к тангенсу или котангенсу может сделать преобразование короче и яснее, особенно при решении уравнений.

— Контроль области

При работе с tg и ctg важно помнить об ограничениях: нельзя делить на ноль. Проверка допустимых значений защищает от формальных ошибок и неверных ответов.



Формулы приведения

Сведение к удобному углу

Формулы приведения позволяют заменить угол вида $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$ или $360^\circ \pm \alpha$ на более простой, часто острый угол.

Знак зависит от четверти

При преобразовании важно учитывать, в какую четверть попадает новый угол. Именно от этого зависит, сохранится знак функции или изменится на противоположный.

Универсальный приём

Эти формулы особенно полезны, когда исходный угол выглядит неудобно для вычислений. После приведения задача сводится к знакомым опорным значениям и стандартным формулам.



Формулы сложения углов

+ Синус суммы и разности

Формулы $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ позволяют находить значения синуса для составных углов и выводить многие частные тригонометрические соотношения.



Тангенс составного угла

Формула $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta) / (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$ удобна для работы с дробными выражениями и решения уравнений, где тангенс ведёт себя проще.

$\sqrt{x}$ Косинус суммы и разности

Запись $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ особенно важна в преобразовании выражений, где нужно раскрыть сумму углов или упростить результат.

Формулы двойного угла

1 Получение из сложения

Формулы двойного угла выводятся из формул сложения, если положить $\beta = \alpha$. Это показывает, что новая формула не является отдельной теорией, а логически продолжает уже известные соотношения.

2 Синус двойного угла

Самая компактная запись имеет вид $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Она особенно удобна при преобразовании произведений и при упрощении выражений с двумя тригонометрическими множителями.

3 Косинус двойного угла

Для косинуса существует несколько равносильных форм: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$. Выбор зависит от вида исходного выражения.

4 Тангенс двойного угла

Формула $\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$ применима при $\operatorname{tg} \alpha \neq \pm 1$. Она помогает сводить уравнения к более простому виду и делать замену переменной.

Формулы половинного угла

— **Переход к половине угла**

Формулы половинного угла выражают $\sin^2(\alpha/2)$ и $\cos^2(\alpha/2)$ через $\cos \alpha$. Это удобно, когда в задаче встречаются квадратные выражения и требуется перейти к более простому углу.

— **Квадраты функций**

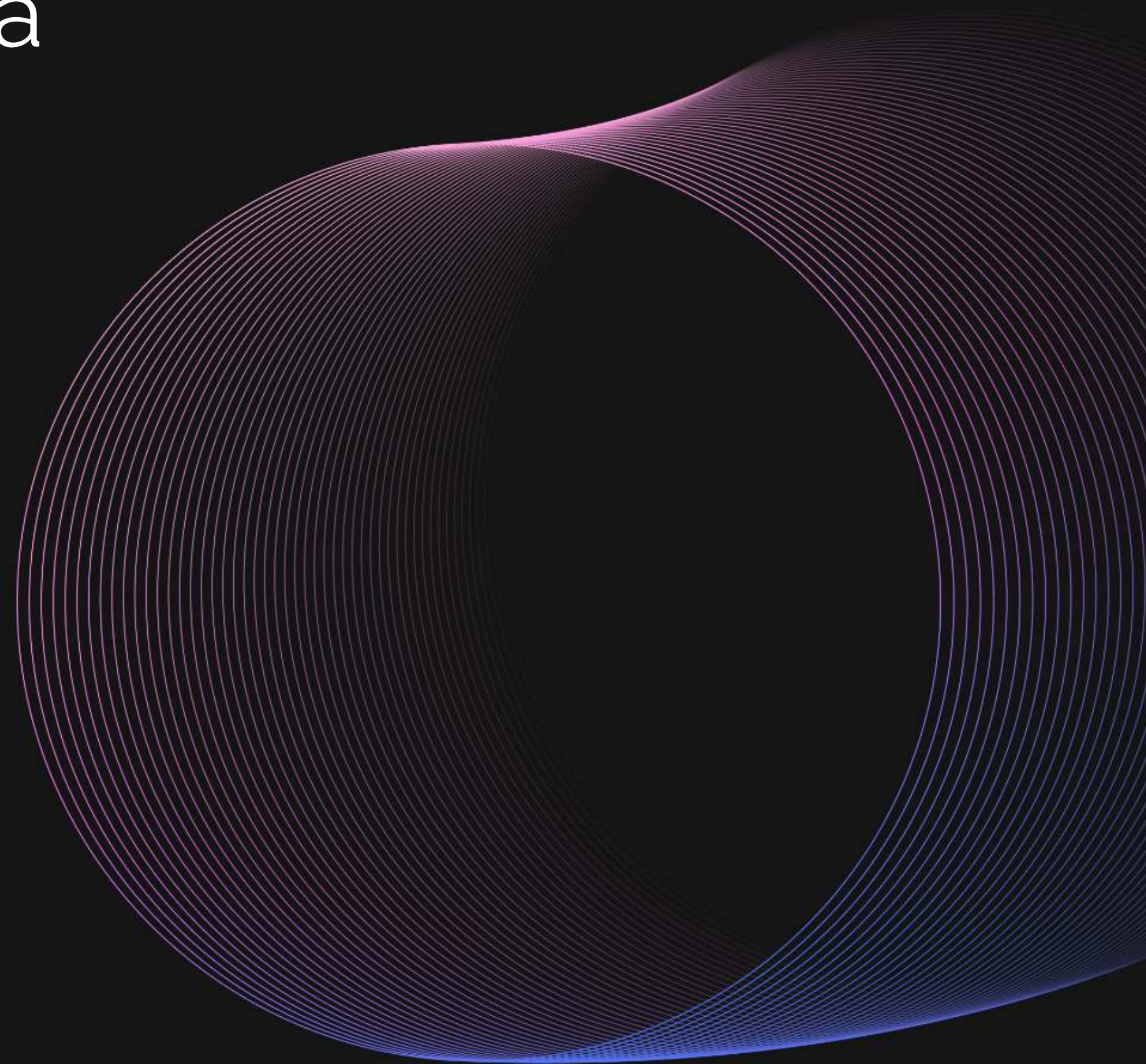
Основные соотношения записываются так: $\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha) / 2$ и $\cos^2(\alpha/2) = (1 + \cos \alpha) / 2$. Они часто используются в преобразованиях без лишних выкладок.

— **Тангенс половинного угла**

Для тангенса существует несколько форм: $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \sin \alpha / (1 + \cos \alpha) = (1 - \cos \alpha) / \sin \alpha$. Выбор зависит от того, какие величины уже известны.

— **Точные значения**

Формулы половинного угла особенно полезны при нахождении точных значений для углов 15° и $22,5^\circ$. В таких задачах они позволяют получать ответ через известные опорные значения.



Формулы произведения в сумму

1 Переход от умножения к сложению

Формулы произведения позволяют заменить произведение тригонометрических функций суммой или разностью. Это делает выражение более компактным и часто открывает путь к дальнейшему упрощению.

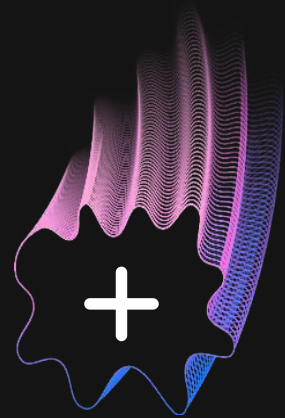
2 Произведение синусов и косинусов

Записи $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ и $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ особенно полезны при работе с двумя множителями.

3 Смешанное произведение

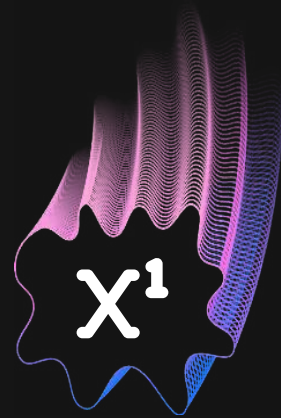
Формула $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ помогает преобразовывать выражения, где синус и косинус стоят рядом. Она часто используется перед решением уравнений или сокращением записи.

Формулы суммы в произведение



Сумма синусов

Формулы позволяют заменить сумму или разность синусов произведением, что особенно удобно при сокращении выражений. После преобразования часто удаётся выделить общий множитель и упростить дальнейшие вычисления.



Сумма косинусов

Записи для $\cos \alpha \pm \cos \beta$ переводят выражение в произведение двух косинусов или синусов. Такой переход помогает раскрывать структуру выражения и готовит его к решению уравнений или группировке слагаемых.



Упрощение выражений

При сложных преобразованиях эти формулы уменьшают число слагаемых и делают выражение компактнее. Это удобно, когда нужно привести тригонометрическую запись к виду, в котором легко сравнивать или сокращать части.



Решение уравнений

В уравнениях с суммой тригонометрических функций преобразование в произведение часто открывает путь к разложению на множители. После этого каждое сомножество можно приравнять к нулю и получить серию решений.

Основные формулы тригонометрии в одной таблице

Формула	Запись	Применение
Основное тождество	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	Преобразования
tg и ctg	$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$	Дроби
Приведения	$90^\circ \pm \alpha$	Сокращение углов
Сложения	$\sin(\alpha \pm \beta)$	Суммы, разности
Двойного угла	$\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$	Упрощение
Половинного угла	$\sin^2(\alpha/2)$	Точные значения
Произв. в сумму	$\sin\alpha \cdot \sin\beta$	Компактная форма
Суммы в произв.	$\sin\alpha \pm \sin\beta$	Уравнения

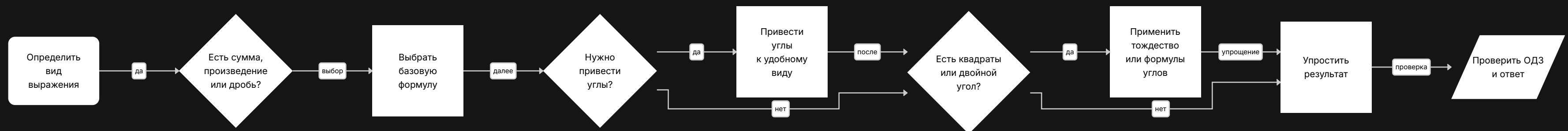
— Краткая сводка показывает, что большинство преобразований в 11 классе опирается на небольшой набор повторяющихся формул.

Одна и та же формула часто служит стартом для разных типов задач: упрощения, вычисления значений и решения уравнений.

Школьный курс алгебры и начала анализа, 11 класс

Алгоритм преобразования тригонометрического выражения

Последовательность действий для типовых задач школьного курса, 11 класс



Типовые ошибки при работе с формулами

- 1 Знаки в формулах**
Чаще всего ошибки возникают при неверном выборе знака в формулах сложения и приведения. Полезно отдельно фиксировать, в какой четверти находится угол, и только затем подставлять нужную запись.
- 2 Область определения**
Нельзя сокращать выражение, не проверив, где оно вообще определено. Особенно это важно для тангенса и котангенса, а также для дробей, где синус или косинус стоит в знаменателе.
- 3 Неверная подстановка**
Замена $\cos^2\alpha$ на $1-\sin^2\alpha$ корректна, но не всегда удобна для дальнейшего решения. Перед преобразованием стоит выбрать ту форму, которая быстрее приводит к стандартному виду.
- 4 Контроль результата**
После преобразований нужно проверить ответ по ограничениям и периоду функций. Это помогает отсеять посторонние корни и убедиться, что полученное выражение действительно эквивалентно исходному.

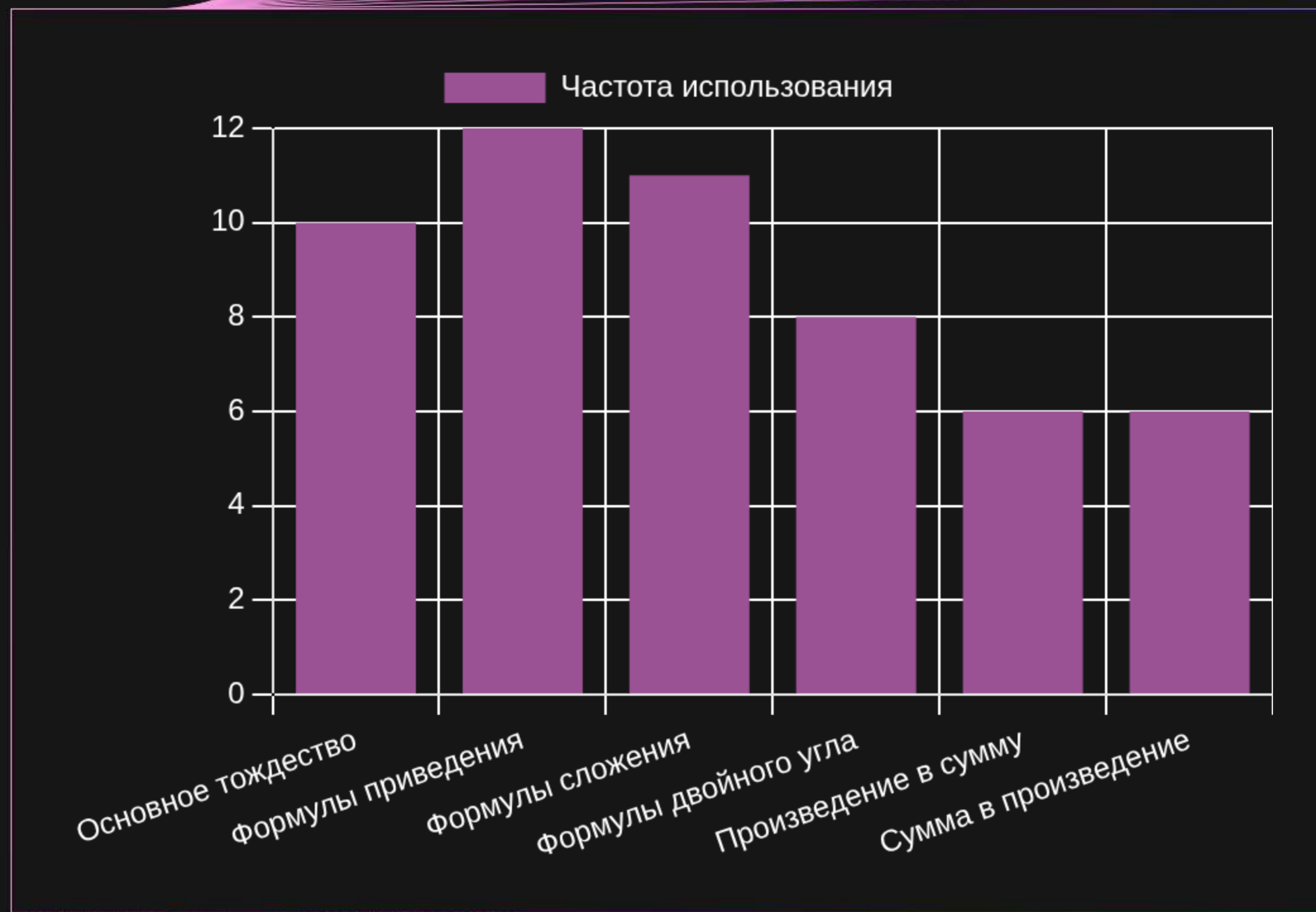


Какие формулы чаще всего встречаются в задачах 11 класса

— Диаграмма отражает типичную картину работы с формулами на школьных заданиях: одни соотношения используются почти на каждом шаге, другие — точно, но очень полезны.

Наибольшую нагрузку несут базовые формулы, потому что они чаще всего нужны для упрощения выражений и преобразования уравнений.

Обобщение типовых заданий школьного уровня по теме «Тригонометрические формулы»



Точные значения тригонометрических функций для опорных углов

1 0° и 90°

Значения для углов 0° и 90° служат опорой для всех последующих вычислений. Они определяются по координатам точек на осях и помогают быстро проверять формулы.

2 30° и 60°

Для этих углов удобно запоминать парные значения: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Они часто появляются в подстановках.

3 45°

Угол 45° особенно важен, потому что синус и косинус здесь равны. Значение $\frac{\sqrt{2}}{2}$ встречается в задачах на вычисление по формулам сложения и двойного угла.

4 Устный счёт

Если опорные значения известны без колебаний, вычисления становятся значительно быстрее и точнее. Это особенно заметно при проверке ответа в заданиях с несколькими преобразованиями.

5 Связь с формулами

Опорные углы используются как исходные данные при подстановке в формулы сложения, приведения и двойного угла. Без них трудно получить точный ответ без лишних вычислительных ошибок.

Применение формул в решении тригонометрических уравнений

1. Приведение к удобному виду

Уравнение сначала преобразуют с помощью тождеств и формул углов, чтобы убрать лишние степени, суммы или произведения и получить выражение, которое проще анализировать.

2. Получение стандартной формы

Затем выполняют замену переменной, выносят общий множитель или переходят к функции одного типа. На этом этапе часто используют $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ или формулы двойного угла.

3. Учет решений

После нахождения корней обязательно проверяют область определения, периодичность и ограничения. Это позволяет отбросить посторонние значения и записать полный ответ в виде серии решений.

Связь формул с графиками тригонометрических функций

↔ Горизонтальные сдвиги

Формулы вида $\sin(x+a)$ и $\cos(x+a)$ описывают смещение графика вдоль оси x . По ним легко увидеть, как меняется положение максимума, минимума и нулей функции.

⌋ Период и форма графика

Для $\sin x$ и $\cos x$ период равен 2π , а для $\operatorname{tg} x$ — π . Знание периода помогает быстро строить графики, находить повторяющиеся участки и анализировать характеристики функции.

⌋ Изменение периода

Выражение $\cos 2x$ показывает, что график становится «чаще»: период уменьшается в два раза. Это важно при чтении графиков и сравнении функций с разной частотой колебаний.

Мини-практикум: тип задачи — подходящая формула — результат

Тип задачи	Формула	Результат
Упростить	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	1
Вычислить	$\cos(\alpha + \beta)$	Подстановка
Преобразовать	$\sin 2x$	$2\sin x \cdot \cos x$
Сумма в произв.	$\sin x + \sin 3x$	$2\sin 2x \cdot \cos x$
Решить уравнение	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$	Замена

Небольшая подборка показывает, как одна и та же формула помогает решать разные типы школьных задач.

Один и тот же приём может вести и к упрощению, и к решению уравнения, если правильно выбрать формулу и проверить ограничения.

Типовые задания по теме «Тригонометрические формулы», 11 класс

Тригонометрия без лишних шагов

Тригонометрические формулы дают единый инструмент для преобразования выражений, вычисления значений и решения уравнений. Чем увереннее ученик владеет ими, тем легче ему работать с графиками и более сложными задачами.