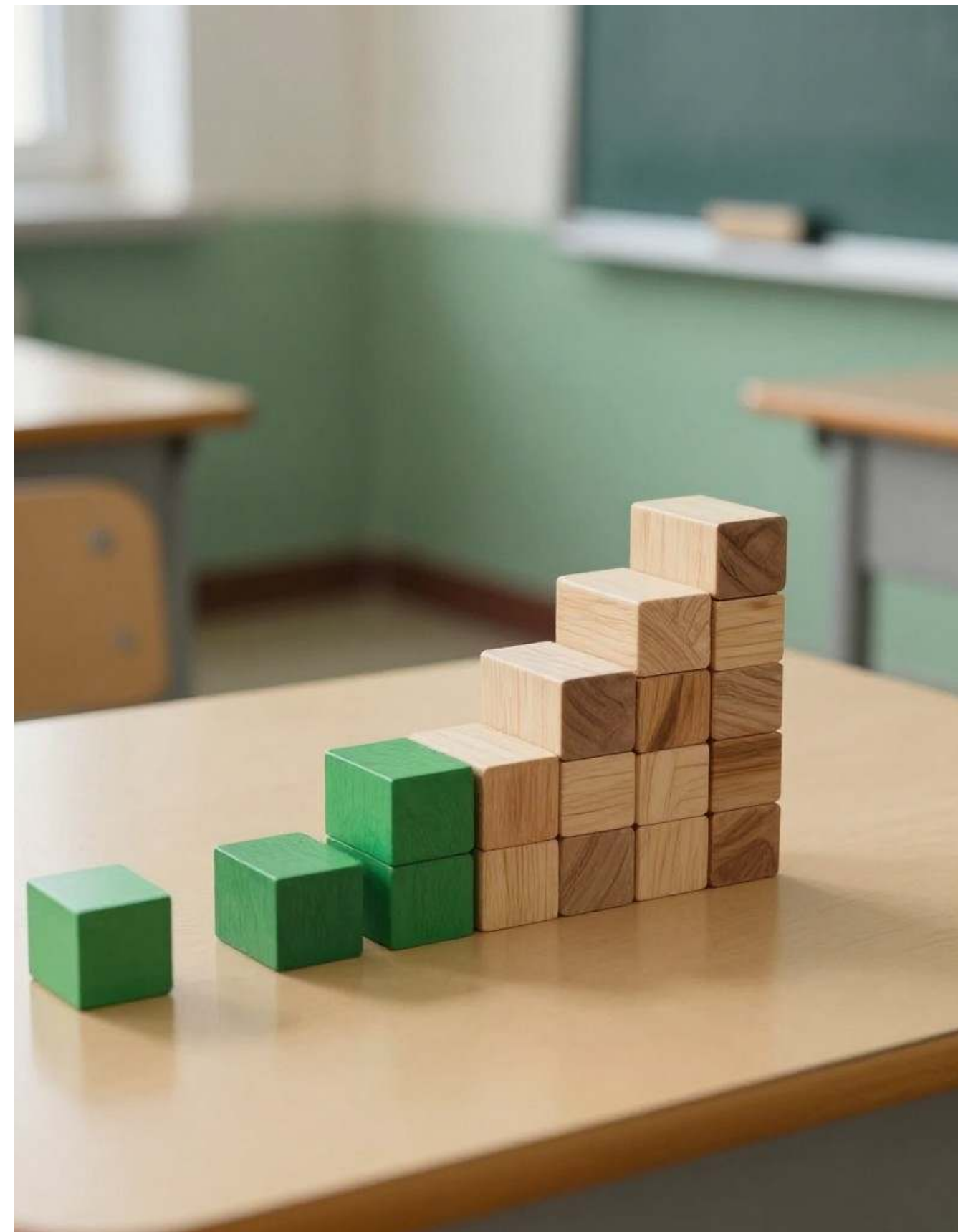


Доказательство тождеств и неравенств индукцией

Индукция: от первого случая к общей формуле.



Как работает индукция

Математическая индукция доказывает правила для всех натуральных n через один стартовый случай и переход к следующему.



Индукция как идея цепочки

1

Первое звено

Сначала проверяют базовый случай: если утверждение верно для первого звена, цепочка получает надёжную отправную точку и не начинается «с воздуха».

2

Связь звеньев

Затем доказывают переход: из истинности утверждения для $n=k$ выводят его истинность для $n=k+1$, не пропуская ни одного шага.

3

Общий вывод

Когда оба условия выполнены, утверждение распространяется на все следующие натуральные числа и становится доказанным для бесконечного семейства формул.

Где применяется индукция

Теория чисел

В теории чисел индукция помогает доказывать делимость, свойства сумм и формулы, которые повторяются для всех натуральных значений без исключений.

Комбинаторика

В комбинаторике индукция подтверждает формулы подсчёта, особенно когда число объектов увеличивается на единицу и сохраняется общая структура.

Алгебра

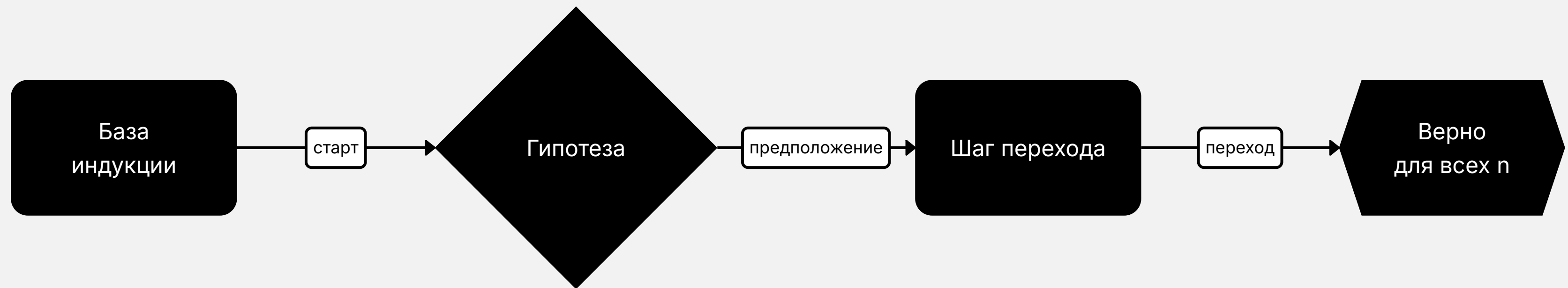
В алгебре метод удобен для сумм, произведений, степенных выражений и преобразований, где каждый следующий шаг строится из предыдущего.

Оценки роста

При оценке роста функций индукция помогает сравнивать величины, получать верхние и нижние границы и отслеживать, как меняется порядок роста.

Три элемента доказательства

Схема показывает движение от начального случая к общему утверждению через предположение и проверку следующего шага.



Обозначения и запись

Формула-утверждение

Обозначение $P(n)$ удобно использовать для общего утверждения, которое проверяется отдельно при каждом натуральном n и затем доказывается для всех нужных значений.

Индукционная гипотеза

Запись $P(k)$ означает индукционное предположение: мы временно считаем утверждение верным для фиксированного k и строим из этого следующий шаг.

Требуемый шаг

Цель $P(k+1)$ показывает, что именно нужно доказать после подстановки и преобразований; переход должен приводить строго к этой форме.

Единая область

Очень важно не менять область определения: если база начинается с $n \geq 1$, то и гипотеза, и переход должны относиться к тем же значениям.

Стратегия доказательства тождеств

1

Подстановка

Сначала выписывают выражение для $P(k+1)$ и заменяют в нём часть суммы или произведения формулой из гипотезы, чтобы связать новый случай со старым.

2

Упрощение

Далее выполняют обычные алгебраические преобразования: раскрывают скобки, приводят подобные члены, выносят общий множитель и упрощают выражение до нужного вида.

3

Совпадение

В конце получают точно ту же формулу, что требуется для $k+1$. Если левая и правая части совпали, тождество доказано.

Сумма первых n чисел

База

При $n=1$ сумма равна 1, а формула даёт $1 \cdot 2 / 2 = 1$. База выполняется, значит доказательство можно продолжать.

Переход

Добавляем следующий член: $1 + \dots + k + (k+1)$. Подставляем гипотезу и упрощаем выражение до формы для $k+1$.

Гипотеза

Предположим, что для k верно $1 + 2 + \dots + k = k(k+1)/2$. Это и есть индукционная гипотеза.

Вывод

Получаем $(k+1)(k+2)/2$, то есть формулу для следующего натурального числа. Следовательно, тождество верно для всех $n \geq 1$.

Пример 1: ключевой алгебраический шаг

Использование гипотезы

Начинают с записи суммы до k и добавления следующего слагаемого: $k(k+1)/2 + (k+1)$. Это позволяет сразу использовать гипотезу и работать только с алгеброй.

Нужный вид

После приведения скобок получаем $(k+1)(k+2)/2$. Именно это и есть формула для следующего значения, поэтому переход завершён без пробелов.

Общий множитель

Далее выносят общий множитель $k+1$: $(k+1)(k/2+1)$. Такой приём делает структуру выражения прозрачной и подготавливает его к нужной формуле.

1/2

коэффициент при квадратичном
росте суммы первых натуральных
чисел.

Формула $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$

Это значение показывает, почему сумма
первых натуральных чисел растёт быстрее
линейной.

1

проверка с ним открывает переход
к общей формуле для всех
следующих значений.

Математическая индукция; базовый случай $n=1$.

Сумма квадратов до n выражается одной
формулой: это удобная опора
для индукционного перехода и проверка
умения работать с алгебраическими
преобразованиями.

$k+1$

получается именно тот случай,
который требуется доказать.

Шаг индукции для суммы квадратов.

В шаге перехода важно довести выражение для $k+1$ до вида, который совпадает с искомой формулой, не меняя смысла исходного равенства.

$$2k+3$$

возникает после разложения
и завершает нужное преобразование.

Алгебраическое преобразование в шаге индукции.

Один общий множитель позволяет быстро
упростить выражение и увидеть,
как раскладывается многочлен в нужное
произведение без лишних преобразований.

$$n \geq 1$$

для этой области определения
утверждение верно полностью.

Итог индукционного доказательства.

Доказанная формула для суммы квадратов
работает при всех натуральных n
и помогает получать точные оценки
без покомпонентного суммирования.

1

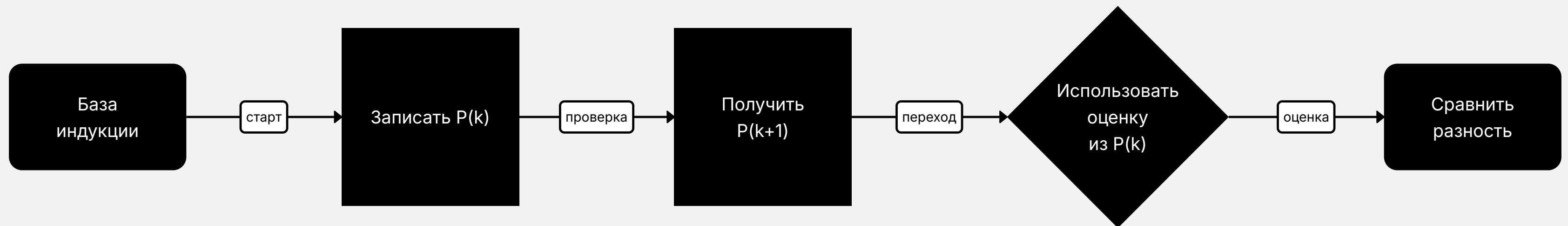
часто задают как нижнюю границу,
чтобы все добавки оставались
неотрицательными.

Общее правило применения индукции к неравенствам.

При доказательстве неравенств особенно важно следить за знаком множителя: неверное действие может изменить направление сравнения и разрушить весь переход.

Как проверять знак неравенства

Последовательность шагов для проверки неравенства в индукционном доказательстве.



2

в основе перехода стоит умножение
предыдущего случая на этот
множитель.

Индукционное доказательство неравенства $2^n \geq n+1$.

Степень двойки растёт быстрее линейной
функции: именно поэтому неравенство
легко доказывается индукцией
с минимальной базой.

$k+1$

это позволяет сохранить знак
неравенства и довести
доказательство до цели.

Шаг перехода для неравенства $2^{\{k+1\}} \geq k+2$.

Ключ к переходу — сначала усилить оценку
до удвоения, а затем использовать простое
сравнение $k+1$ с единицей.

Пример неравенства 2: сумма квадратов и куб

Шаг перехода

После применения гипотезы индукции к S_k остаётся добавить только следующий квадрат и сравнить полученную сумму с кубом следующего числа. Здесь важно оценить правую часть сверху через алгебраическое преобразование.

Проверка разности

Разность между $k^3 + (k+1)^2$ и $(k+1)^3$ удобно раскрывается явно: так видно, почему итоговая оценка сохраняется. Этот приём делает доказательство прозрачным и контролируемым на каждом шаге.

Смысл примера

Такой тип неравенства показывает, как индукция работает не только с точными формулами, но и с оценками роста. Она особенно полезна там, где требуется сравнить сумму и более крупную степень.

Индукция без ошибок: что запомнить

Математическая индукция сводит бесконечное семейство утверждений к двум проверкам: первому случаю и переходу. Если аккуратно следить за областью определения, алгеброй и знаком неравенства, метод работает надёжно и точно.