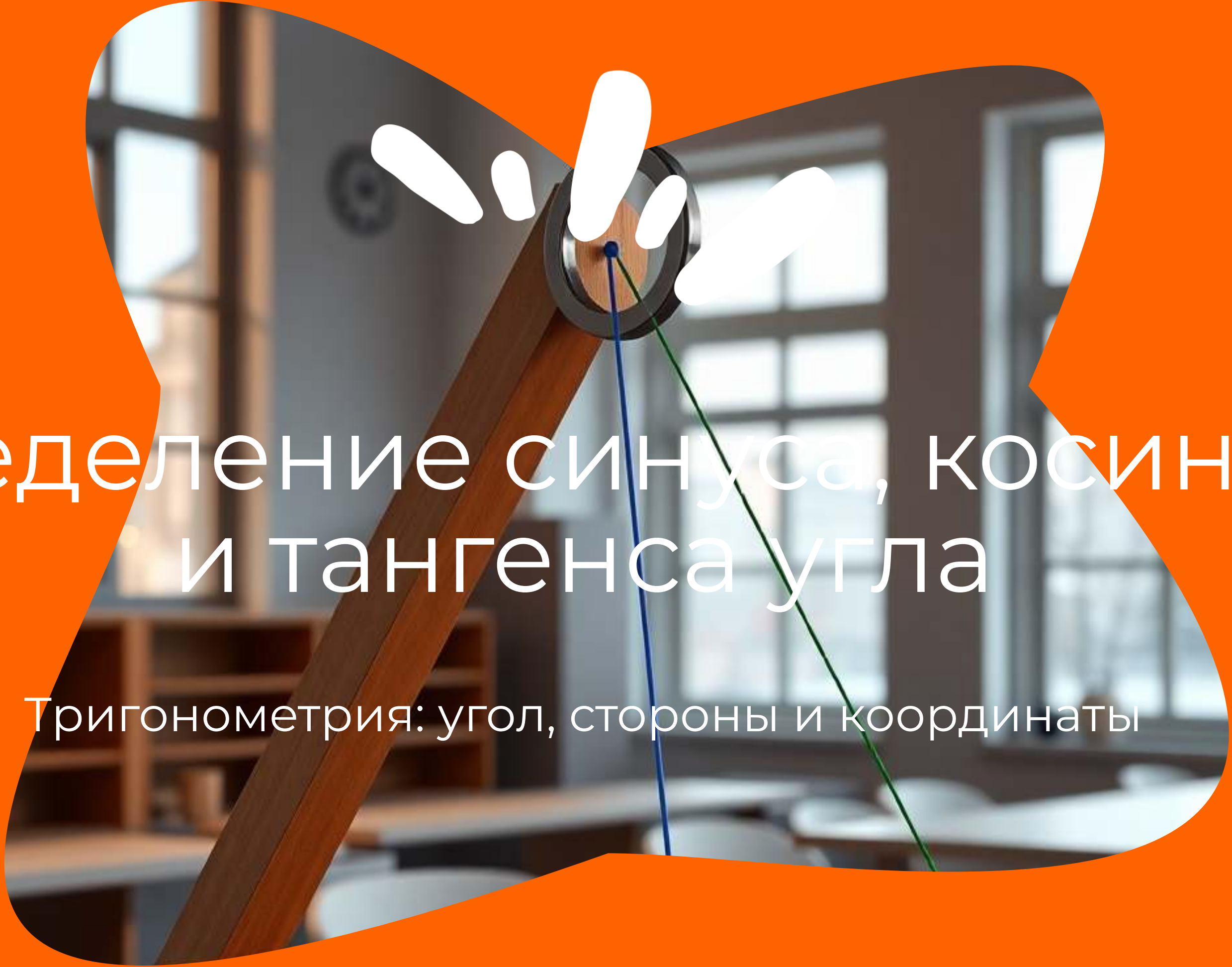


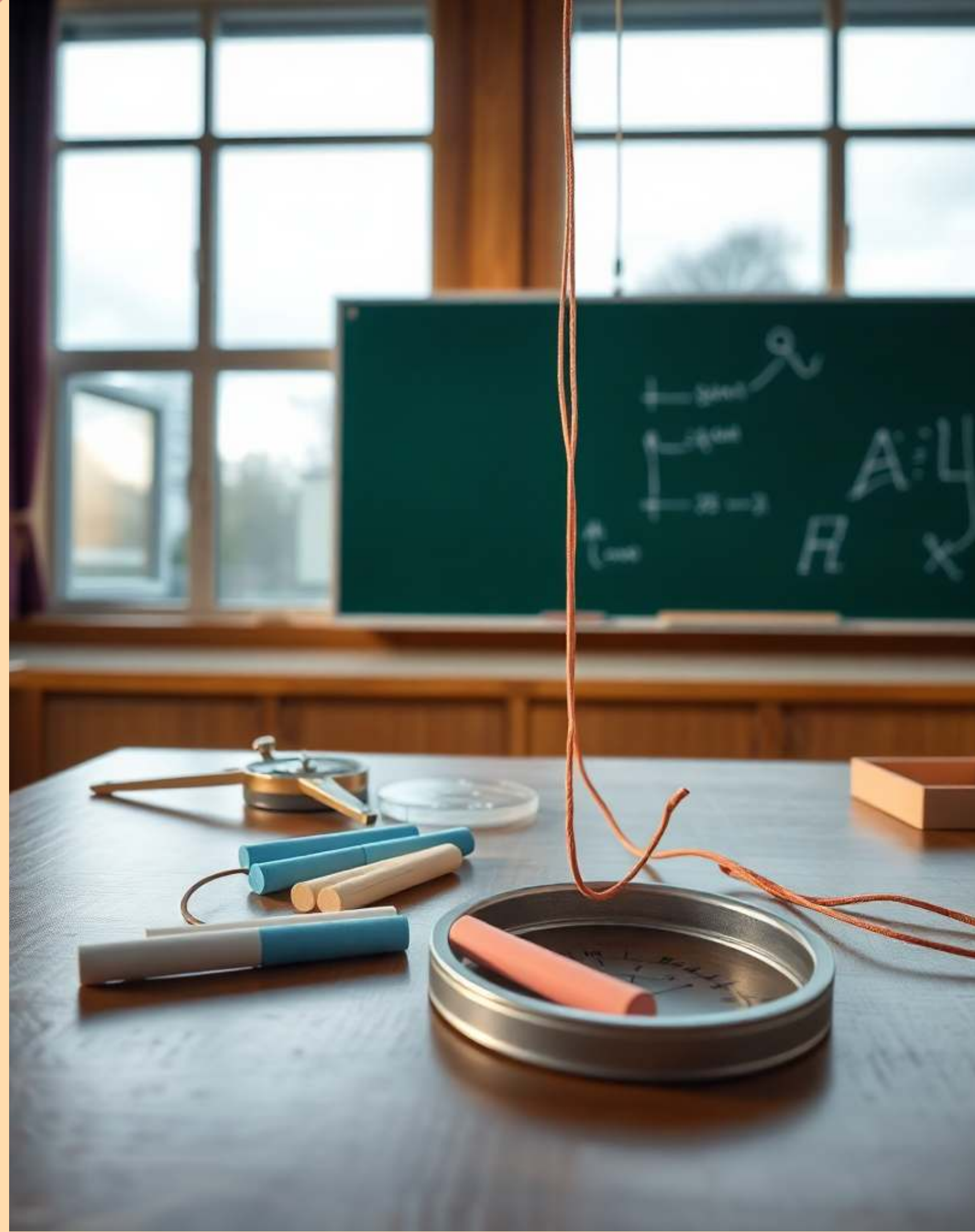


Определение синуса, косинуса и тангенса угла

Тригонометрия: угол, стороны и координаты

Почему тригонометрия важна в алгебре

Тригонометрические функции появились из практических измерений, а в 11 классе становятся инструментом для уравнений, графиков и описания периодических процессов.



Прямоугольный треугольник как основа определения

Выбор угла

01

Берут прямоугольный треугольник и выделяют один острый угол. Именно относительно него определяются стороны, участвующие в формулах синуса, косинуса и тангенса.

Противолежащая сторона

02

Катет, который находится напротив выбранного угла, называется противолежащим. Он помогает определить синус и тангенс, поскольку входит в их числитель.

Прилежащая сторона

03

Катет, образующий угол вместе с гипотенузой, называется прилежащим. Он используется в формулах косинуса и тангенса и показывает, как угол связан с основанием.

Гипотенуза

04

Сторона напротив прямого угла — самая длинная в треугольнике. Она нужна для синуса и косинуса, а также помогает связать все элементы через теорему Пифагора.

Функция	Отношение
$\sin \alpha$	противолежащий / гипотенуза
$\cos \alpha$	прилежащий / гипотенуза
$\operatorname{tg} \alpha$	противолежащий / прилежащий
$\operatorname{ctg} \alpha$	прилежащий / противолежащий

Определения через отношения сторон

Четыре основные тригонометрические функции выражаются через отношения сторон прямоугольного треугольника.

Значение функции зависит только от угла, а не от размеров треугольника.

Синус угла и его смысл

Формула

Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе: $\sin \alpha = a/c$. Это одно из базовых определений, с которого начинается школьная тригонометрия.

Диапазон значений

Для острых углов синус всегда находится между 0 и 1. Такое ограничение удобно для быстрой проверки вычислений и понимания того, насколько велик выбранный угол.

Геометрический смысл

Чем больше противолежащий катет по сравнению с гипотенузой, тем больше значение синуса. Поэтому синус отражает «высоту» угла внутри прямоугольного треугольника.



Косинус угла и его СМЫСЛ

01

Основная формула

Косинус острого угла задаётся отношением прилежащего катета к гипотенузе: $\cos \alpha = b/c$. Он показывает, какая часть гипотенузы приходится на основание у выбранного угла.

Границы значений

Для острых углов косинус тоже лежит в пределах от 0 до 1. При увеличении угла его значение уменьшается, что хорошо видно на числовых примерах и графиках.

02

03

Смысл в задаче

Косинус особенно полезен, когда известны гипотенуза и прилежащая сторона. Тогда можно найти недостающий катет и перейти от геометрической схемы к численному ответу.



Тангенс угла и его смысл

Формула без гипотенузы

Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg} \alpha = a/b$. В этой формуле гипотенуза не участвует.

Удобство для наклона

Тангенс хорошо описывает крутизну подъёма, уклон дороги или наклон прямой на координатной плоскости. Чем больше значение, тем сильнее наклон.

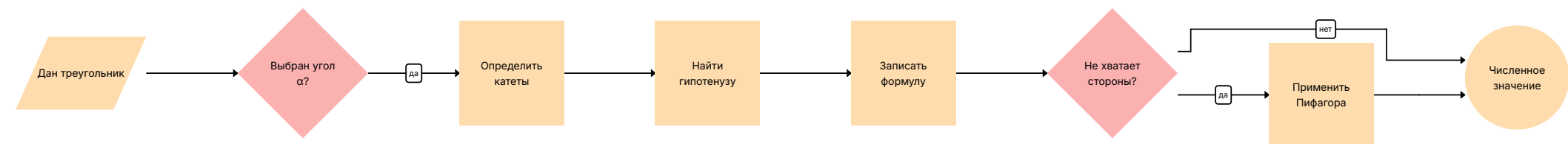
Связь с графиком

В аналитической геометрии тангенс угла наклона прямой используют как угловой коэффициент. Это делает его важным мостом между треугольниками и координатной плоскостью.



Как найти тригонометрическу ю функцию в треугольнике

Последовательность действий
при работе с прямоугольным
треугольником



Единичная окружность как обобщение определения

Радиус равен единице

На единичной окружности любая точка задаётся радиусом 1. Поэтому координаты точки, соответствующей углу α , естественно связываются с функциями $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

Координаты точки

В этой модели $\cos \alpha$ становится абсциссой, а $\sin \alpha$ — ординатой. Такое представление удобно, потому что сразу показывает знак и взаимное расположение значений.

Область применения

Единичная окружность позволяет работать не только с острыми углами, но и с тупыми, отрицательными, развёрнутыми и большими 360° .

Тангенс через координаты

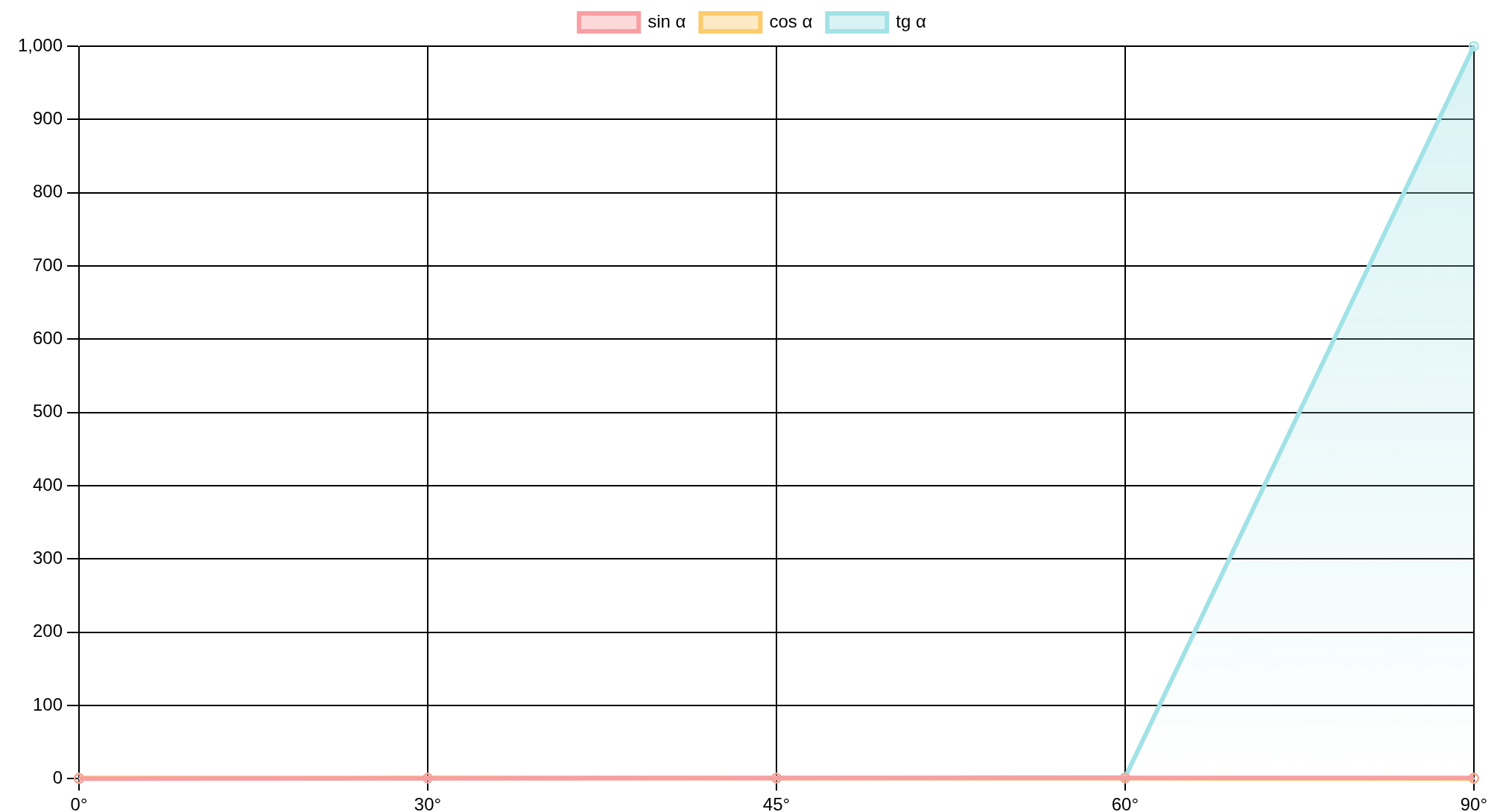
Если $x \neq 0$, то $\operatorname{tg} \alpha = y/x$. Это связывает тангенс с отношением координат точки и расширяет определение за пределы прямоугольного треугольника.



Значения тригонометрических функций для основных углов

Табличные точки показывают характер изменения функций на стандартных углах и помогают быстрее запоминать точные значения.

Синус растёт, косинус убывает, а тангенс резко увеличивается; при 90° он не имеет конечного значения.



Точные значения для углов 0° , 30° , 45° , 60° , 90° из школьной тригонометрии

Таблица точных значений для запоминания

Точные значения удобно держать под рукой: они помогают быстро решать задачи и проверять вычисления без округлений.

Значения образуют устойчивую последовательность: синус растёт, косинус убывает, а тангенс увеличивается и при 90° не определён, потому что деление на ноль невозможно.

Угол	Точные значения
0°	$\sin 0 = 0; \cos 0 = 1; \operatorname{tg} 0 = 0$
30°	$\sin = \frac{1}{2}; \cos = \frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos = \frac{\sqrt{2}}{2}; \operatorname{tg} = 1$
60°	$\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos = \frac{1}{2}; \operatorname{tg} = \sqrt{3}$
90°	$\sin = 1; \cos = 0; \operatorname{tg}$ не существует

1

получается для любой точки
единичной окружности
из формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Тождество связывает две функции
и позволяет находить одну через
другую, а также быстро проверять
правильность вычислений.

*Теорема Пифагора и координаты точки
на единичной окружности.*

Что означает знак функции в каждой четверти



I четверть

В первой четверти обе координаты точки положительны, поэтому $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$. Тангенс тоже положителен, так как это отношение двух положительных чисел.



II четверть

Во второй четверти ордината остаётся положительной, а абсцисса становится отрицательной. Значит, синус положителен, косинус отрицателен, а тангенс принимает отрицательные значения.



III четверть

В третьей четверти обе координаты отрицательны, поэтому $\sin \alpha < 0$ и $\cos \alpha < 0$. Отношение двух отрицательных чисел делает $\operatorname{tg} \alpha$ положительным.



IV четверть

В четвёртой четверти абсцисса положительна, а ордината отрицательна. Поэтому $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha < 0$, а $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Как тангенс описывает наклон

Чем больше значение

Тангенс показывает, насколько быстро возрастает высота по сравнению с горизонтальным продвижением. Чем больше $\operatorname{tg} \alpha$, тем круче наклон прямой, ската или лестницы.

Связь с треугольником

В прямоугольном треугольнике $\operatorname{tg} \alpha$ — это отношение противолежащего катета к прилежащему. Поэтому он напрямую отражает соотношение подъёма и основания без участия гипотенузы.

Использование в координатах

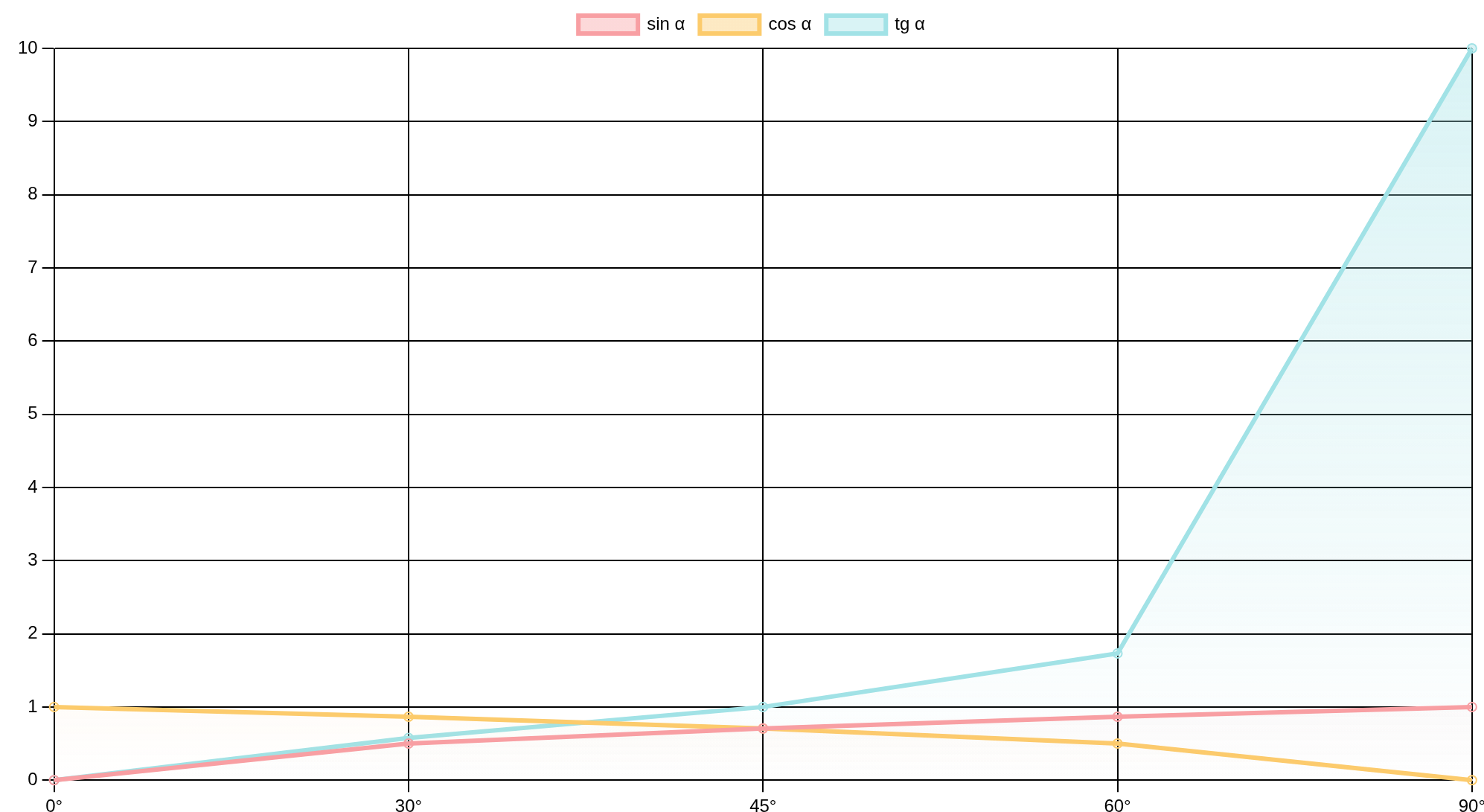
На координатной плоскости тангенс совпадает с угловым коэффициентом прямой. Это помогает сравнивать линии по крутизне и понимать, какая из них наклонена сильнее.



Как меняются значения при увеличении угла от 0° до 90°

На одном промежутке хорошо видно, что синус и косинус меняются плавно, а тангенс растёт значительно быстрее и становится неудобным для приближённой оценки у правой границы.

Рост синуса и спад косинуса симметричны, а тангенс резко усиливает изменение около 90° , поэтому его удобно использовать для описания крутых наклонов.



Точные значения тригонометрических функций для 0° , 30° , 45° , 60° и 90° ; для $\tan 90^\circ$ значение не определено.

На что чаще всего ошибаются при вычислениях

01

Путают катеты

Самая частая ошибка — перепутать противолежащий и прилежащий катеты. Чтобы избежать этого, сначала всегда отмечайте выбранный угол и только потом подписывайте стороны относительно него.

02

Неверно ставят гипотенузу

В формулах синуса и косинуса иногда вместо гипотенузы берут катет. Это нарушает смысл отношений и приводит к неправильному ответу даже при верных вычислениях.

05

Округляют раньше времени

Точные значения лучше записывать через корни и дроби, особенно в задачах на доказательство и преобразование выражений. Слишком раннее округление скрывает ошибку и искажает ответ.

03

Смешивают tg и $\cos$

Тангенс не содержит гипотенузу: это отношение противолежащего катета к прилежащему. Подмена этого отношения делает результат бессмысленным и часто выдаёт неверный знак.

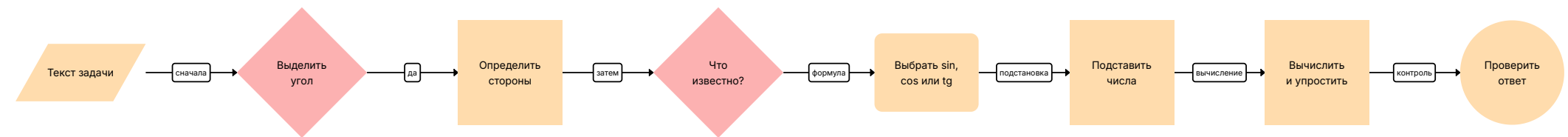
04

Забывают про $\operatorname{tg} 90^\circ$

При угле 90° косинус равен нулю, поэтому $\operatorname{tg} 90^\circ$ не определён. Проверка области допустимых значений помогает вовремя заметить такую ситуацию.

Пошаговый алгоритм нахождения тригонометрических функций

Последовательность действий для задач на прямоугольный треугольник и известные стороны.



Где тригонометрия работает в реальных задачах



Измерение высоты без подъёма

По расстоянию до объекта и углу наблюдения можно найти высоту дерева, здания или башни, не поднимаясь вверх. Такой приём особенно нагляден в геометрических задачах и полевых измерениях.



Наклон дорог и крыш

Тангенс помогает описывать крутизну ската, пандуса, крыши или лестницы. Чем больше значение, тем резче подъём, поэтому функция удобна для проектирования безопасных и удобных наклонных поверхностей.



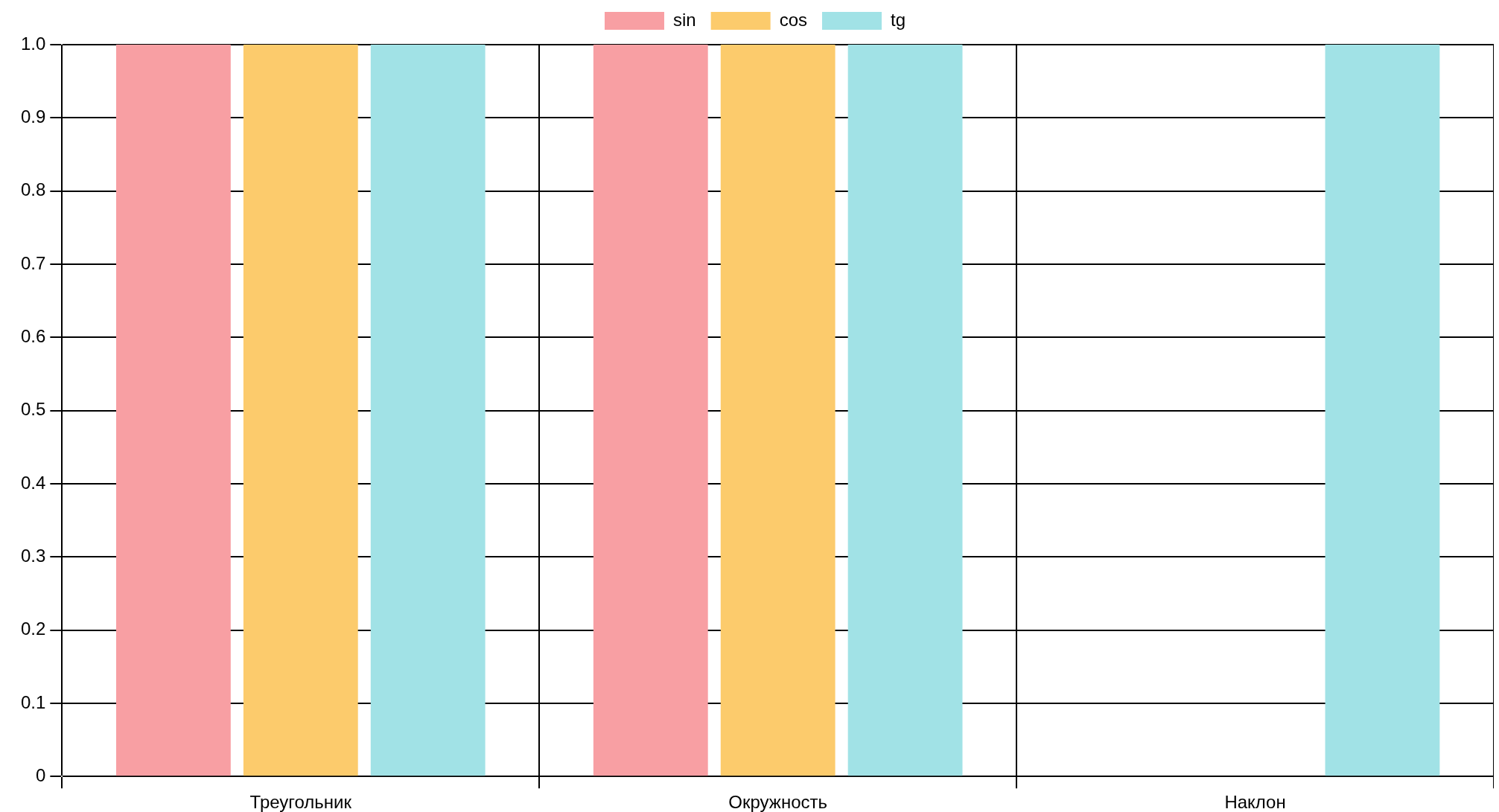
Сигналы и колебания

В физике синус и косинус описывают периодические процессы: звук, свет, электрические колебания и движение по кругу. Благодаря этому тригонометрия связывает школьную алгебру с реальными моделями явлений.

Сравнение трёх функций по определению и применению

Все три функции связаны с одним углом, но каждая удобна в своей задаче: для треугольника, для координатной записи или для описания наклона.

Синус и косинус чаще работают как координаты и отношения сторон, а тангенс особенно полезен там, где важно сравнить крутизну.



Сравнительный анализ определений тригонометрических функций в школьном курсе геометрии и алгебры.

Три функции — одна идея

Синус, косинус и тангенс показывают, как угол связан со сторонами треугольника, координатами точки и наклоном прямой. Это основа всей школьной тригонометрии.