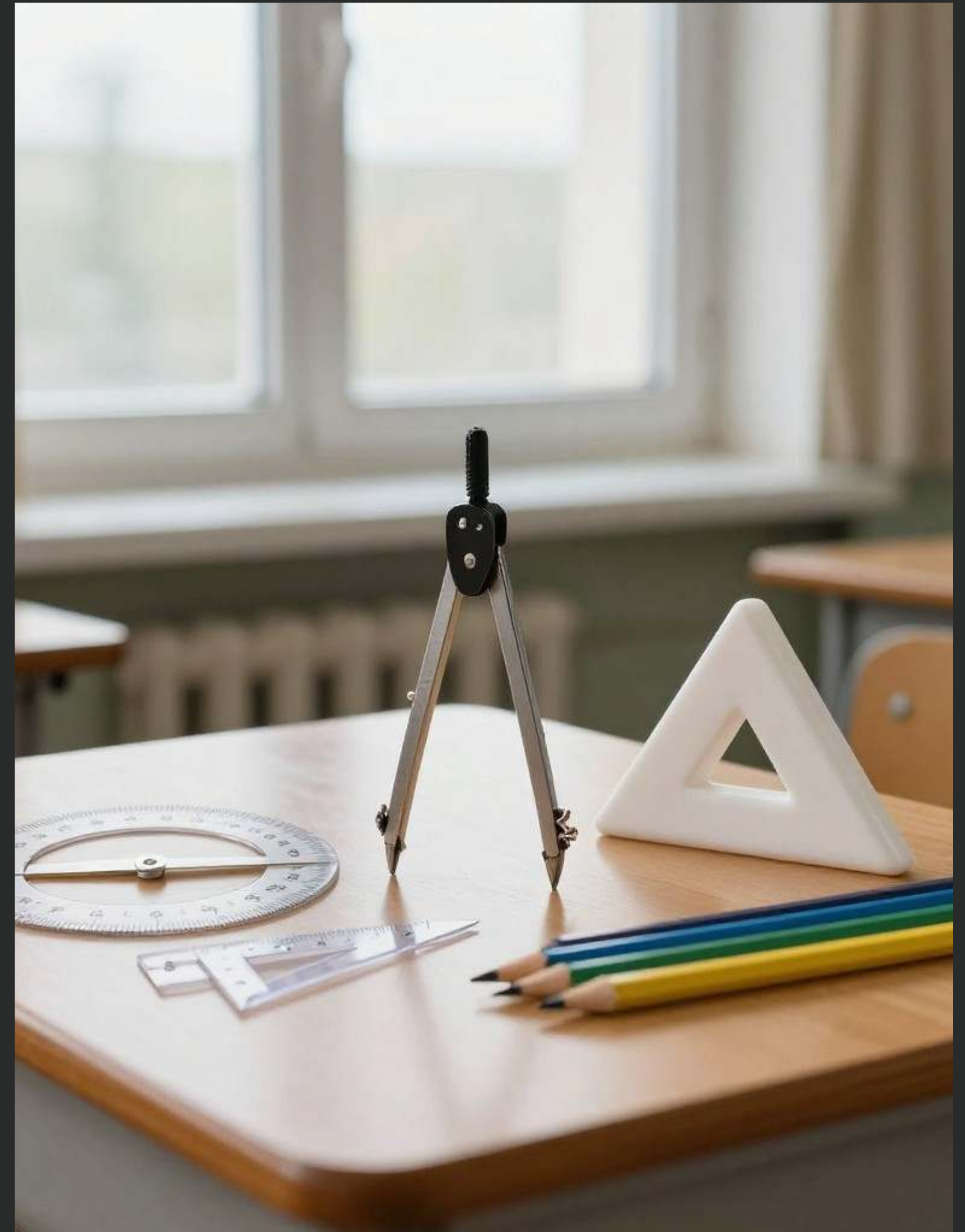


Основные тригонометрические формулы

Синус, косинус, тангенс и котангенс:
коротко, понятно, полезно.



Зачем в 9 классе изучают тригонометрические формулы

Тригонометрия помогает связать углы и стороны, быстро находить значения без калькулятора и решать задачи на высоту, расстояние и наклон линии.



Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Синус угла

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике показывает, какая часть гипотенузы приходится на противолежащий катет. Это основа многих дальнейших формул и вычислений.

Косинус угла

Косинус связан с прилежащим катетом: он показывает отношение этого катета к гипотенузе. Вместе с синусом косинус задаёт положение угла в треугольнике.

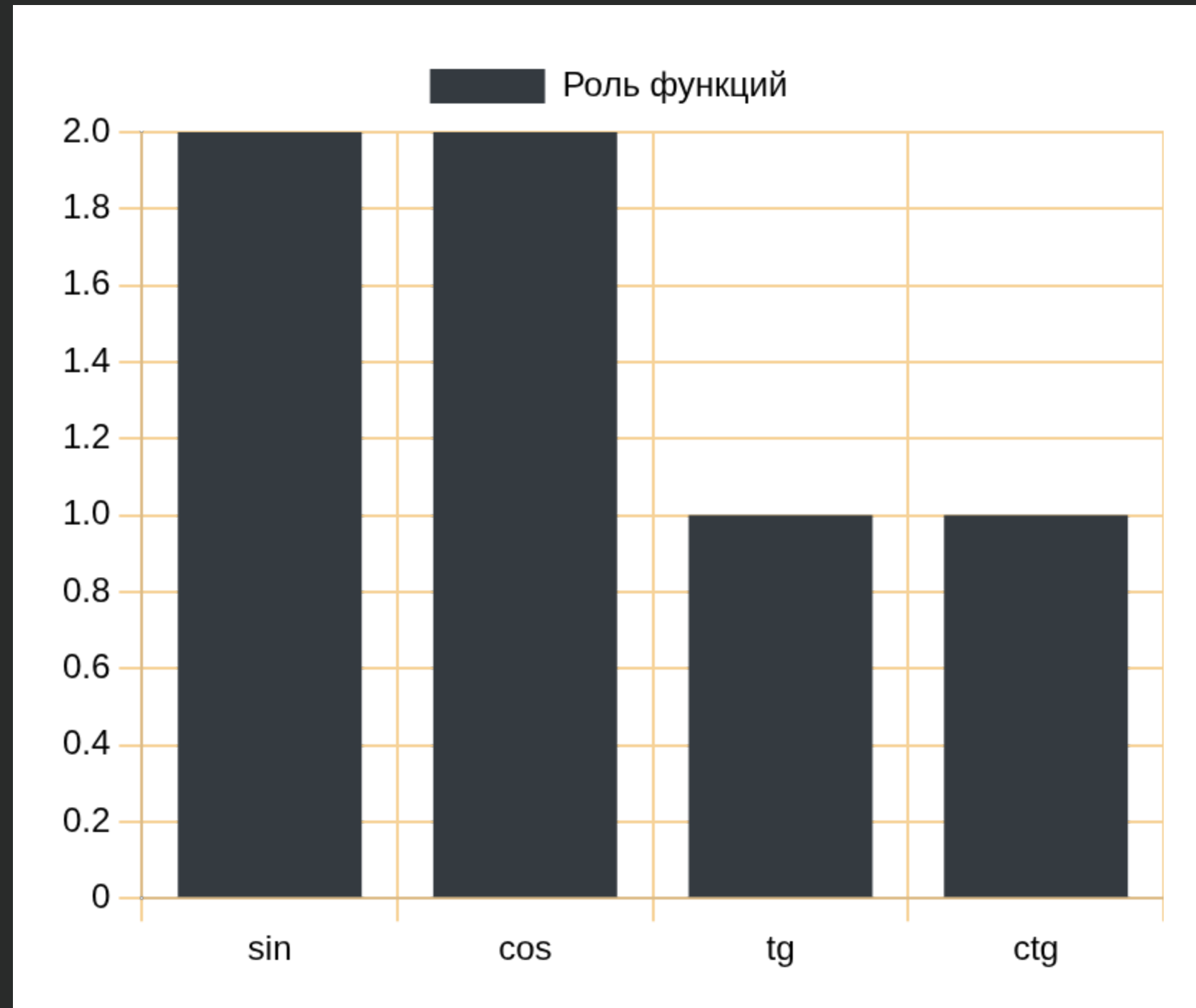
Тангенс угла

Тангенс удобно понимать как отношение синуса к косинусу. Поэтому он показывает, насколько быстро меняется высота относительно основания при изменении угла.

Котангенс угла

Котангенс — это отношение косинуса к синусу. Он дополняет тангенс и помогает выражать одну тригонометрическую функцию через другую без лишних вычислений.

Связь основных тригонометрических функций



Синус и косинус задают основу, а тангенс и котангенс выражаются через них при ненулевом знаменателе.

Если известны $\sin$ и $\cos$, остальные функции находят по простым отношениям.

Схематическая учебная визуализация по определениям тригонометрических функций

1

— к этому числу всегда равна сумма квадратов синуса и косинуса.

Тождество помогает находить неизвестную функцию и проверять правильность вычислений в задачах.

Значения тригонометрических функций для основных углов

Угол	sin/cos	tg/ctg
0°	0; 1	0; —
30°	½; √3/2	1/√3; √3
45°	√2/2; √2/2	1; 1
60°	√3/2; ½	√3; 1/√3

Табличные значения тригонометрических функций для 0°, 30°, 45° и 60°

Опорные значения, которые часто используются в школьных задачах.

Для 90° тангенс не определён, а для 0° не определён котангенс; остальные значения выражаются через дроби и корни.

Едини́чная окру́жность и знаки функций по четвертям

Координаты точки

На единичной окружности косинус совпадает с абсциссой точки, а синус — с ординатой. Поэтому знаки функций удобно видеть прямо на координатной плоскости.

Первая и вторая четверти

В первой четверти все основные функции положительны. Во второй четверти положителен только синус, а косинус, тангенс и котангенс становятся отрицательными.

Третья четверть

В третьей четверти положительными остаются тангенс и котангенс. Синус и косинус здесь отрицательны, потому что точка находится ниже оси Ox и левее оси Oy .

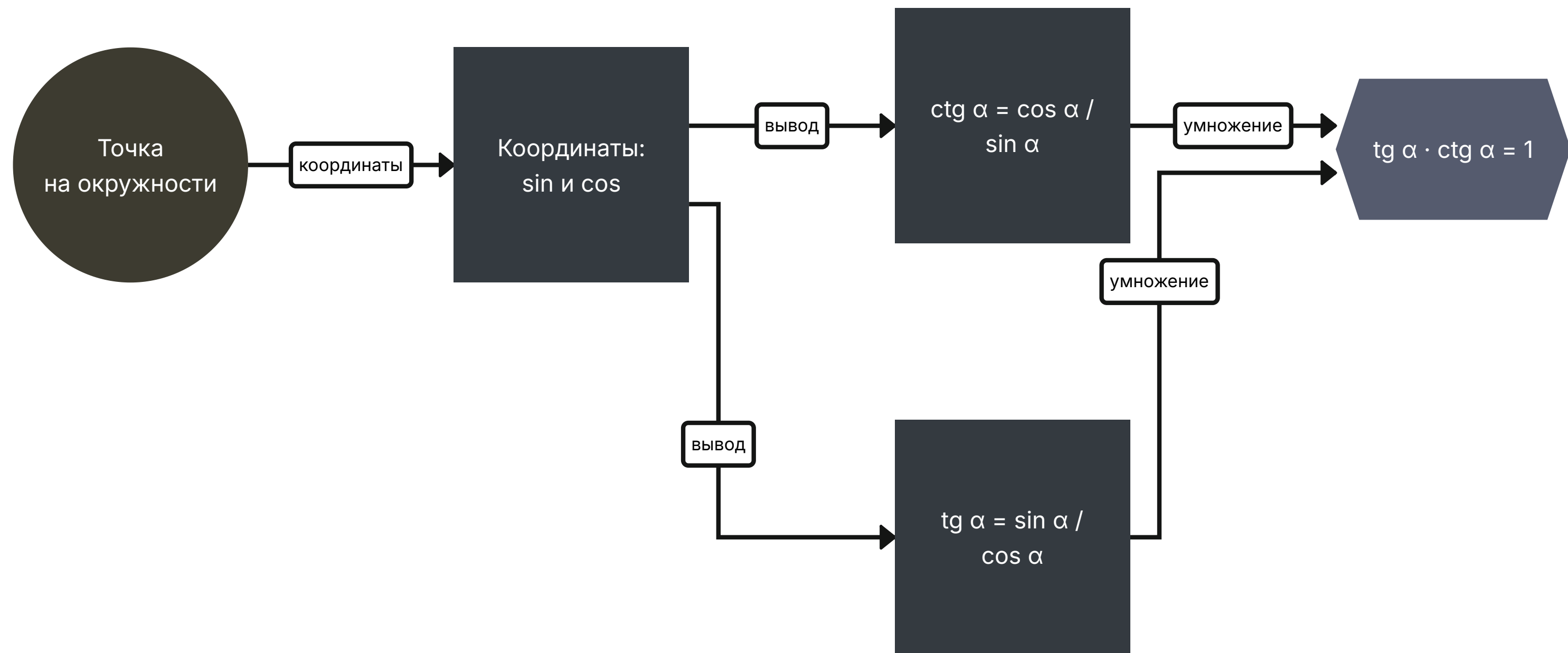
Четвёртая четверть

В четвёртой четверти положителен только косинус. Это помогает быстро определять знак ответа, не вычисляя значение функции полностью.



Как получают связи между tg, ctg, sin и cos

Последовательность начинается с точки на единичной окружности и заканчивается формулами для преобразований.



Формулы с квадратами тангенса и котангенса

X^1 Из основного тождества

Если начать с равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и разделить его на $\cos^2\alpha$, получится формула с тангенсом. Это помогает переходить к выражениям без синуса и косинуса в знаменателе.

$\sqrt{x}$ Через косинус

После преобразования получаем $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 / \cos^2\alpha$. Такая запись особенно удобна, когда в задаче нужно заменить сложную дробь на более короткое выражение.

Через синус

Аналогично выводится $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 / \sin^2\alpha$. Эта формула часто помогает упростить выражение, где фигурирует котангенс и требуется избавиться от деления на синус.

Для проверки ответа

Обе формулы полезны не только в преобразованиях, но и для самопроверки. Если подстановка не даёт верное равенство, значит, в вычислениях допущена ошибка.

Формулы приведения для углов 90° , 180° , 270° и 360°

$$90^\circ \pm \alpha$$

При переходе к углам около 90° синус и косинус меняются местами. Это удобно, когда нужно заменить сложный угол на более знакомый острый угол.

1

$$180^\circ \pm \alpha$$

Для углов около 180° знак функции зависит от четверти. Например, синус сохраняет значение по модулю, а косинус обычно меняет знак.

2

$$270^\circ \pm \alpha$$

В районе 270° снова важно смотреть на четверть и на исходную функцию. Здесь часто меняются и знак, и вид функции, поэтому нужен аккуратный разбор.

3

$$360^\circ \pm \alpha$$

После полного оборота значение функции возвращается к исходному виду, но знак может зависеть от того, прибавляется угол или вычитается. Такие формулы сводят задачу к острому углу.

4

Краткая таблица формул приведения

Угол	Результат
$90^\circ - \alpha$	$\sin \leftrightarrow \cos$
$180^\circ - \alpha$	знак меняется
$270^\circ + \alpha$	$\sin \leftrightarrow \cos$

Основные случаи формул приведения для $\sin$, $\cos$, tg и ctg при углах вида $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$ и $360^\circ \pm \alpha$.

Чтобы применить формулу приведения, нужно определить исходную функцию, вид угла и знак результата по четверти.

Школьный курс алгебры
и тригонометрии, 9 класс

Четные и нечетные свойства тригонометрических функций

01

Косинус симметричен

Косинус — четная функция: при замене угла на противоположный значение не меняется. Это удобно, когда нужно упростить выражение или проверить вычисление на симметрию относительно оси ОУ.

02

Синус и тангенс меняют знак

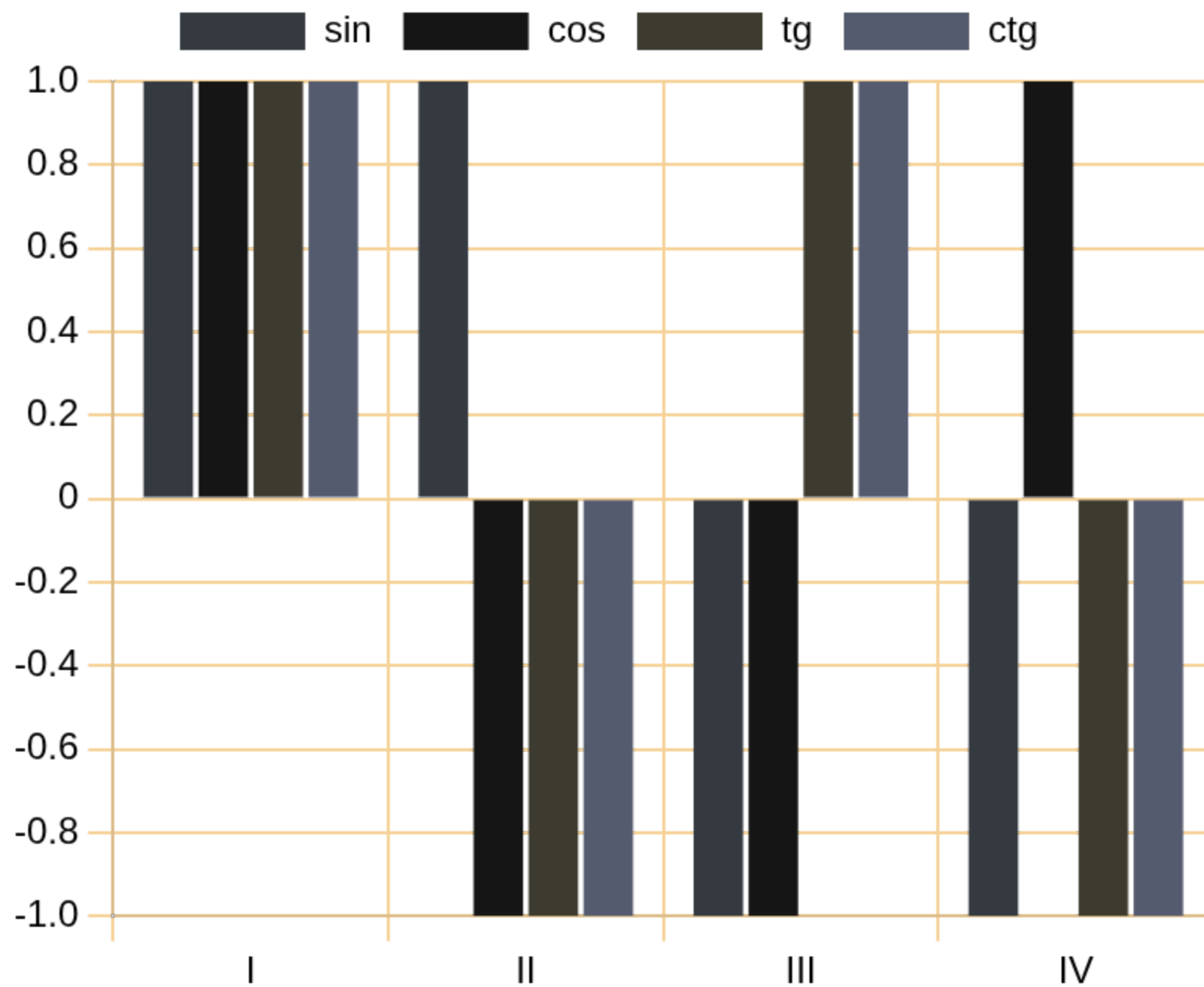
Синус и тангенс — нечетные функции: при переходе к углу $-\alpha$ их значения становятся противоположными. Такое свойство помогает быстро находить значения для отрицательных углов без дополнительных построений.

03

Котангенс ведет себя так же

Котангенс тоже является нечетной функцией: $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Связь с симметрией относительно начала координат позволяет легче запоминать знаки и проверять ответы в задачах.

Знаки тригонометрических функций в четырех четвертях



Знаки функций определяются положением угла на координатной плоскости и знаком координат точки на единичной окружности.

Во II и IV четвертях у функций остаются разные знаки, а в III четверти положительны только tg и ctg.

Школьная тригонометрия: знаки функций по четвертям

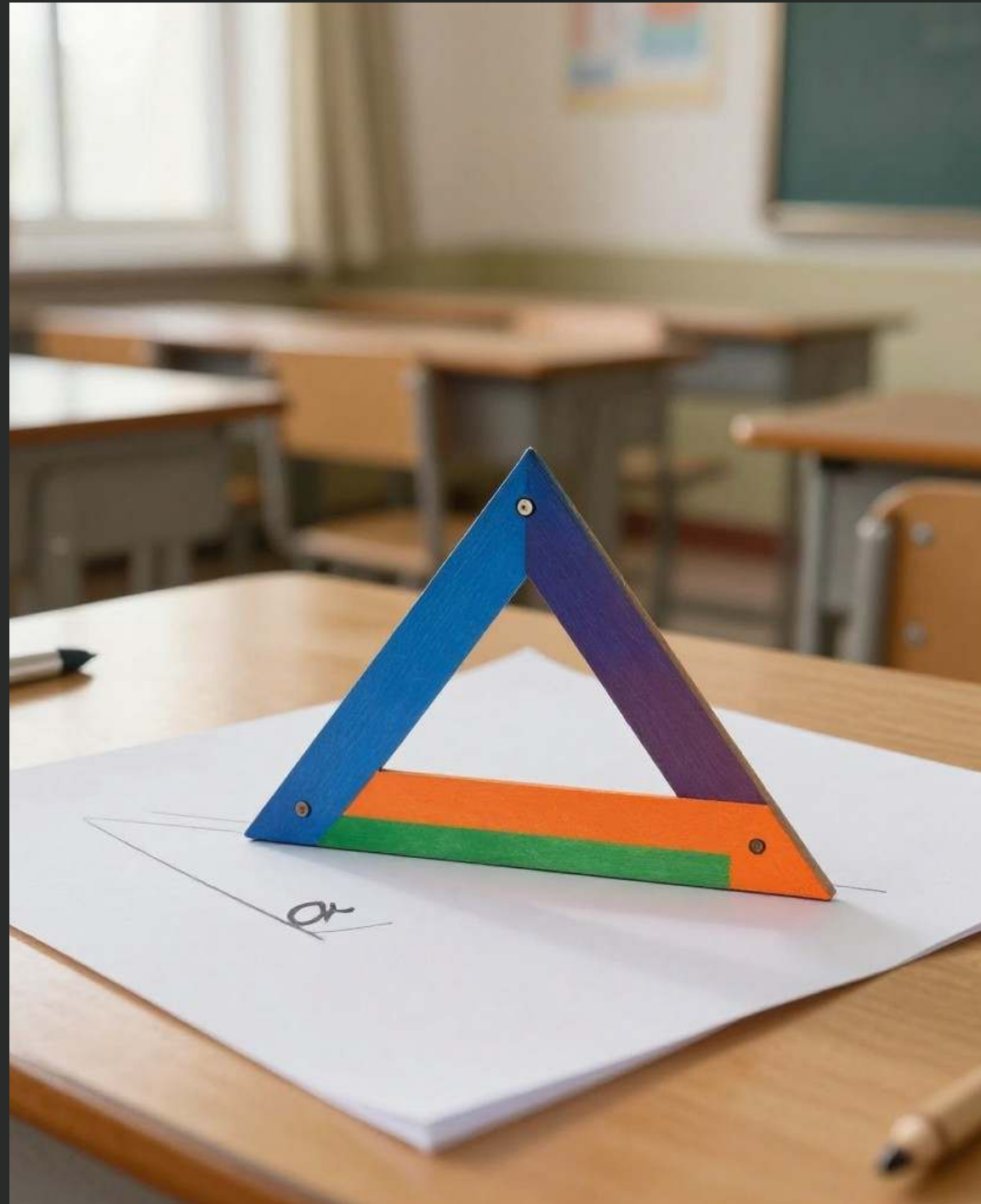
Тригонометрические формулы в прямоугольном треугольнике

Синус и косинус

В прямоугольном треугольнике синус острого угла выражает отношение противолежащего катета к гипотенузе, а косинус — прилежащего катета к гипотенузе. Эти отношения сразу показывают, какие стороны известны.

Нахождение сторон

Если известны угол α и одна сторона, можно выразить неизвестную через нужную тригонометрическую функцию. Например, гипотенуза находится через синус или косинус, а катеты — через тангенс и котангенс.



Тангенс и котангенс

Тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему, а котангенс — наоборот. Такие формулы особенно удобны, когда в задаче даны два катета и нужно найти угол или третью сторону.

Проверка по чертежу

Подписи сторон и угол α на рисунке помогают не перепутать, где катет противолежащий, а где прилежащий. Это снижает риск ошибки при подстановке формул в вычислениях.

Формулы суммы и разности углов

Формулы для синуса и косинуса

Сумма и разность углов позволяют вычислять $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$ через значения функций отдельных углов. Это особенно полезно, если нужный угол удобно разложить на два известных.

1

Формула для тангенса

Для тангенса используется отдельное правило: $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ выражается через $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$. Формула помогает работать с углами, которые нельзя сразу заменить на табличные значения.

2

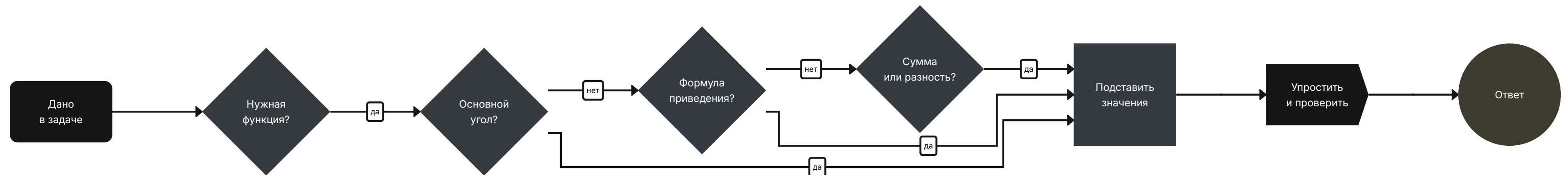
Практическое применение

С помощью этих формул находят значения 15° , 75° , 105° и других углов, составленных из 30° , 45° и 60° . Так вычисления становятся точными и не требуют калькулятора.

3

Как выбрать нужную формулу

Пошаговая схема для школьных задач по тригонометрии



Типичные ошибки при работе с формулами

Путаница функций

Часто путают $\sin$ и $\cos$, особенно при формулах приведения и в прямоугольном треугольнике. Чтобы не ошибиться, полезно помнить, какая сторона соответствует каждой функции и как меняется знак.

Неверный знак

Во II, III и IV четвертях легко потерять нужный знак. Ошибка возникает, если не определить, где расположен угол на координатной плоскости и какие функции там положительны.

Потерянный квадрат

В тождестве $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ иногда забывают квадрат и записывают неверное равенство. Из-за этого дальнейшие преобразования становятся ошибочными, хотя исходная идея была верной.

Ошибки с дробями

При tg и ctg важно не перепутать числитель и знаменатель. Если дробь записана наоборот, все последующие вычисления тоже будут неверными, даже при правильных углах.

Проверка через окружность

Полезно сверять ответ с единичной окружностью: она сразу показывает, верен ли знак и не перепутаны ли $\sin$ и $\cos$. Такая проверка экономит время и снижает число ошибок.

Минимальный набор формул для запоминания в 9 классе

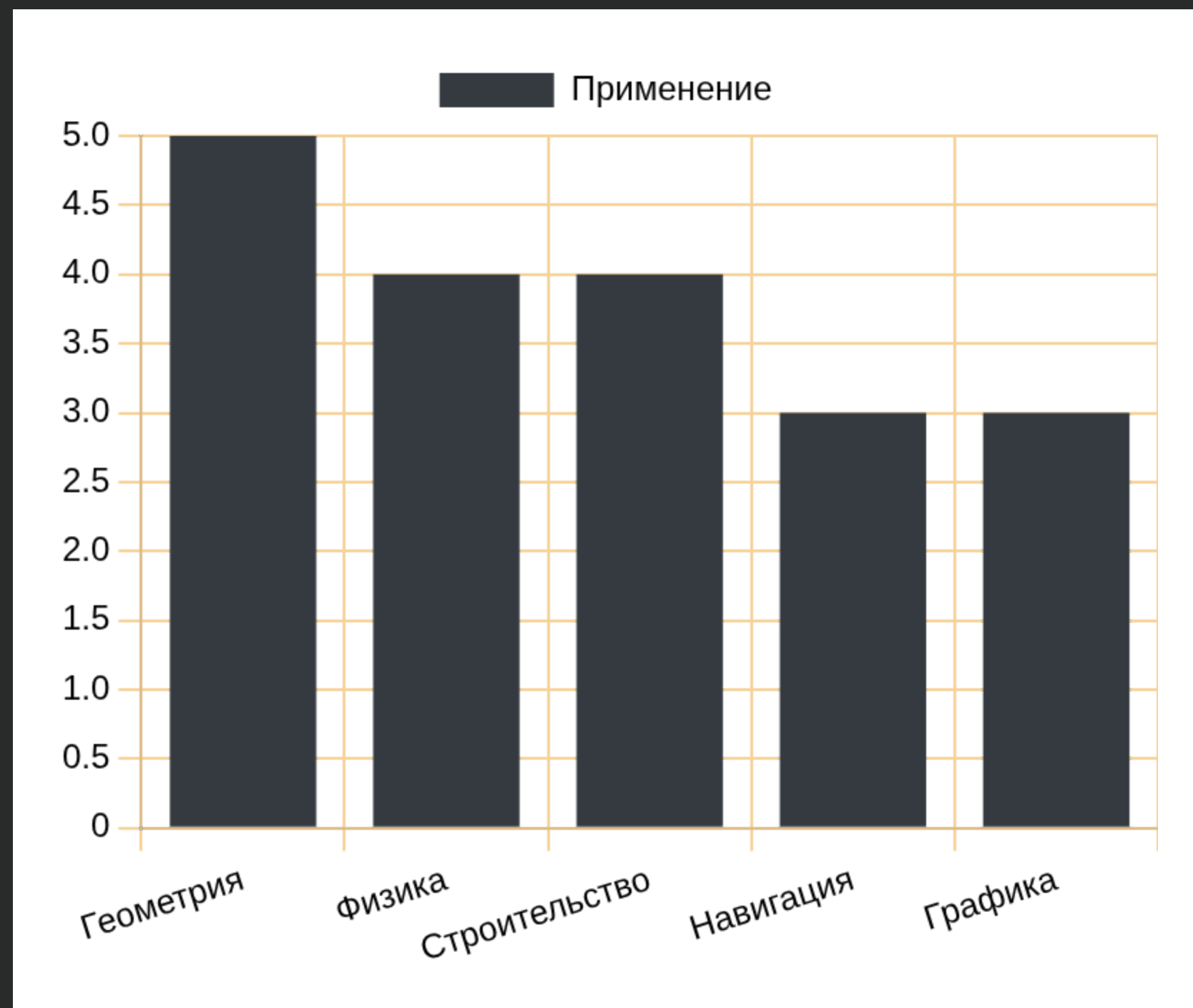
Формула	Что дает
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	основное тождество
$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$	связь функций
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	формула приведения
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	четность косинуса

Школьный курс алгебры и тригонометрии, 9 класс

Эти формулы чаще всего нужны при преобразовании выражений, вычислении значений и проверке ответов в школьных задачах.

Небольшой набор опорных формул покрывает большинство типовых заданий и помогает быстро выбирать нужное преобразование.

Где применяются тригонометрические формулы



Тригонометрия помогает не только в учебных задачах, но и при расчетах высот, расстояний, углов наклона и движений по окружности.

Наиболее заметна роль формул в геометрии и физике, а также в прикладных областях, где важно точно описывать форму и движение.

Обобщение школьных и прикладных примеров использования тригонометрии

Тригонометрия, которая действительно работает

Основные тригонометрические формулы объединяют определения, тождества, приведение и свойства знаков. Если помнить значения основных углов и внимательно выбирать формулу, задачи по алгебре и геометрии становятся гораздо понятнее.