

Центральная симметрия и симметрия относительно прямой: две важные идеи геометрии

На уроке разберём два движения плоскости и научимся узнавать их на чертеже и в координатах.



Место темы в курсе геометрии 11 класса

Эта тема входит в раздел преобразований плоскости и опирается на базовые понятия точки, прямой, отрезка, угла и координат. Здесь формируется умение строить образы фигур, проверять равенство отрезков и углов, а также отличать центральную симметрию от осевой.



Центральная симметрия: определение и смысл

Точки A и A_1 симметричны относительно точки O , если O является серединой отрезка AA_1 . Значит, центр одинаково удалён от обеих точек и лежит строго посередине между ними.

Для любого заданного центра O каждая точка плоскости имеет ровно одну симметричную ей точку: образ определяется однозначно. Это важно при построениях на чертеже и при решении задач.

Центральная симметрия переводит фигуру в равную ей фигуру, причём сам центр O остаётся неподвижным. По смыслу такое преобразование совпадает с поворотом плоскости на 180° вокруг точки O .

Свойства центральной симметрии



Сохранение расстояний
Центральная симметрия не меняет расстояния между точками: длины отрезков остаются прежними. Благодаря этому образы геометрических фигур получаются «точными копиями» по размерам и форме.



Сохранение углов
Величины углов также сохраняются. Если рассматривать направления сторон в фигуре, то после преобразования они повторяются так, чтобы каждая измеримая угловая характеристика оставалась той же.



Поведение прямых
Прямая после центральной симметрии переходит в прямую, параллельную исходной. Если же исходная прямая проходит через центр O , она переходит в саму себя.



Никакого «зеркала»
Ориентация фигуры при повороте на 180° не меняется: нет эффекта левой и правой стороны, как при зеркальном отражении. Поэтому центральная симметрия — именно поворотное движение.

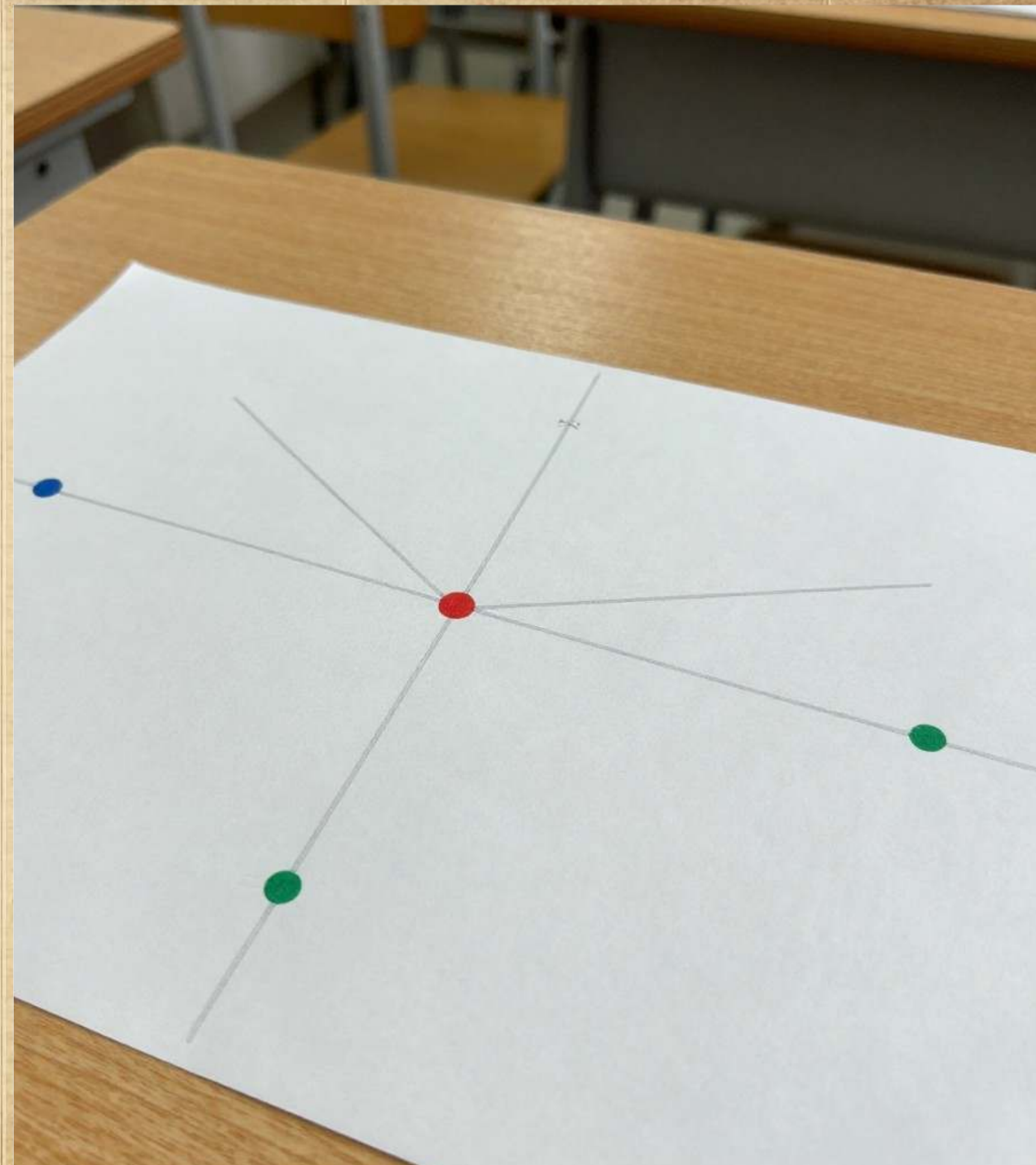
Построение точки и фигуры, симметричных относительно центра

Точка и её образ

Для точки A симметричная ей точка A_1 строится на прямой OA по другую сторону от O . Необходимо обеспечить равенство $OA = OA_1$, тогда O станет серединой отрезка AA_1 и определение выполнится.

Фигура целиком

Для отрезка, треугольника и любого многоугольника поступают так: каждую вершину переносят отдельно по этому же правилу, находя её образ. После получения всех симметричных вершин их соединяют, сохраняя исходный порядок обхода.



$M_1(2a - x; 2b - y)$
Эта формула
позволяет находить
образ точки без
чертёжных измерений.

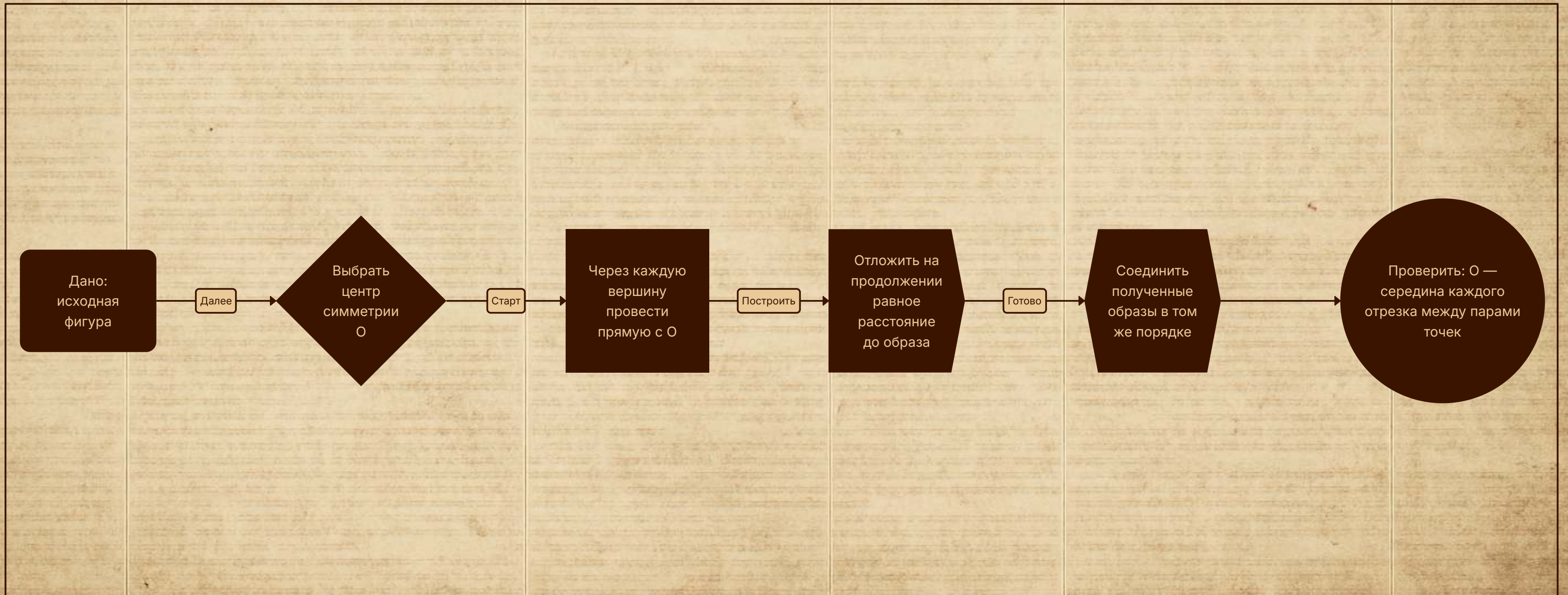
Школьный курс геометрии, 11 класс

Если центр симметрии задан
как $O(a; b)$, то точка $M(x; y)$
переходит в $M_1(2a - x; 2b - y)$.
При $O(o; o)$ получаем $M_1(-x; -y)$.

THE PLAN

Алгоритм построения образа при центральной симметрии

Порядок действий при построении на чертеже и проверке свойств



Осевая симметрия: определение и геометрический смысл

Точки A и A_1 симметричны относительно прямой l , если l проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна ему. Таким образом, ось одновременно делит отрезок пополам и задаёт прямой угол.

Прямая l называется осью симметрии. При осевой симметрии образ каждой точки расположен по другую сторону оси, причём расстояние от точки до оси равно расстоянию от её образа до той же оси.

Такое преобразование можно воспринимать как «зеркальное» отображение: фигура как будто переворачивается относительно прямой. Поэтому удобнее мыслить ось как границу, относительно которой идёт перенос в паре точек.

Важно помнить: при осевой симметрии неподвижными остаются точки, лежащие на самой оси. Они не переезжают, а остальные элементы меняют положение симметрично относительно l .

Свойства симметрии относительно прямой

1

Сохранение размеров

Осевая симметрия оставляет неизменными длины отрезков и размеры фигур. Углы измеряются так же, как и до преобразования, поэтому геометрия внутри фигуры не «сжимается» и не «растягивается».

2

Точки на оси неподвижны

Любые точки, лежащие на оси симметрии, остаются на месте. Это помогает быстро находить пары точек и проверять построение по чертежу.

3

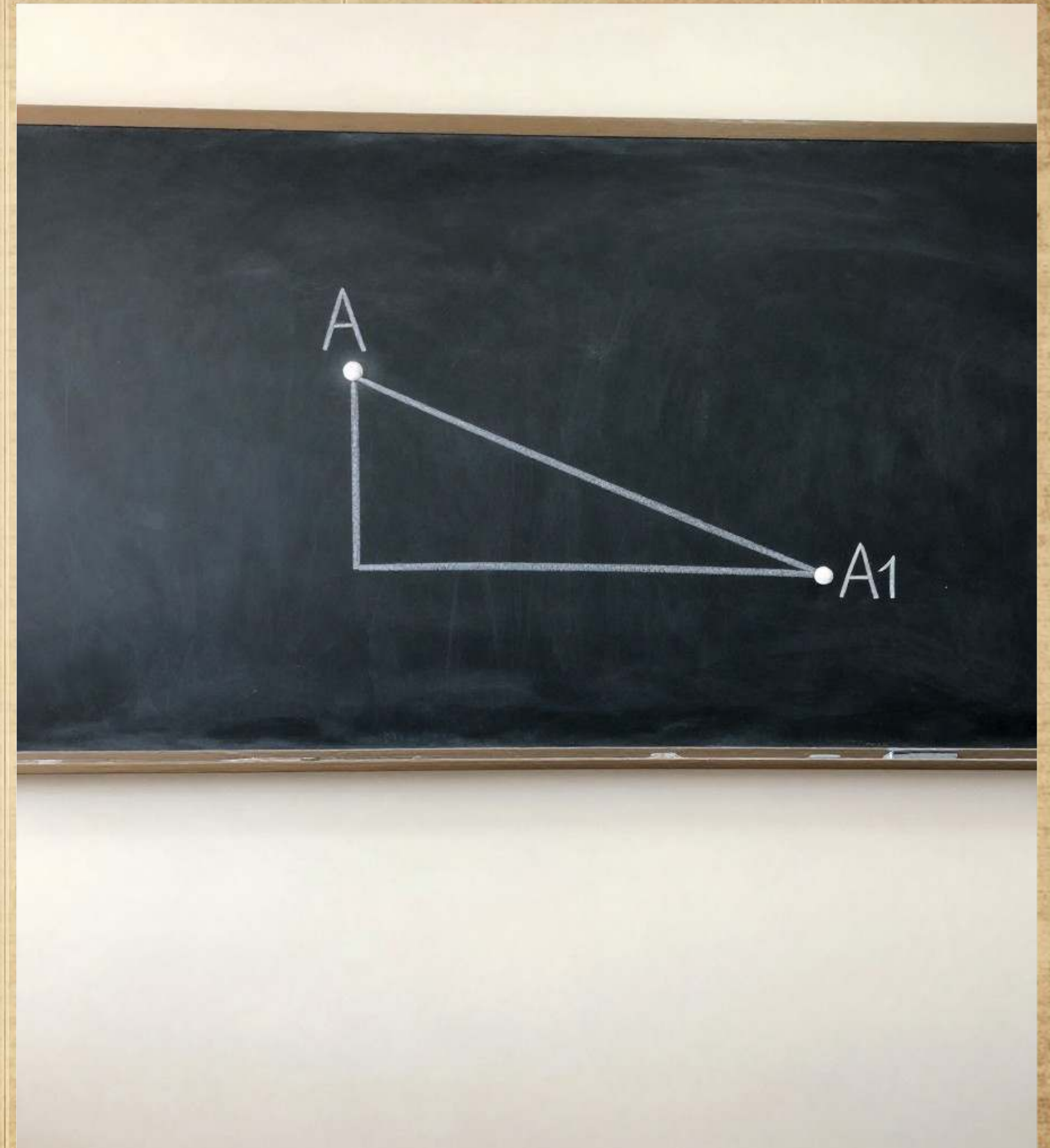
Ориентация меняется

При отражении меняется ориентация фигуры: как будто местами меняются «левая» и «правая» части. Именно это отличие отличает осевую симметрию от поворота на 180° .

Построение отражения относительно прямой

Для точки A строится перпендикуляр к оси l . Затем на этом перпендикуляре откладывается равное расстояние по другую сторону оси, чтобы получилась точка A_1 , симметричная A относительно l .

Для многоугольника отражают все вершины: отдельно находят образы каждой вершины по одной и той же процедуре. После этого вершины соединяют в исходном порядке обхода, получая отражение всей фигуры.



Центральная и осевая симметрия: сравнение признаков

Признак	Центральная симметрия	Симметрия относительно прямой
Элемент симметрии	Точка O	Прямая l
Неподвижные точки	Центр O	Точки на оси l
Условие для пары	O — середина AA_1	l — серединный перпендикуляр к AA_1
Способ построения	Отмечаем A_1 по $OA_1=OA$ на другой стороне	Строим перпендикуляр к l и откладываем равные расстояния
Координатная запись	$M_1(2a-x; 2b-y)$	По оси: x и y меняются по формуле отражения
Изменение ориентации	Не меняется	Меняется (как при «зеркале»)

Таблица помогает быстро различать два преобразования плоскости по тому, что задаёт симметрию (элемент), где находятся неподвижные точки, как находят образы и как меняется «ориентация» фигуры.

Обе симметрии — движения плоскости и сохраняют размеры, но «механизм» различается: центральная задаётся точкой и центр — неподвижен, осевая задаётся прямой и неподвижны точки на оси.

Число осей симметрии у некоторых фигур

Для фигур с осевой регулярностью число осей легко «считывается» по их симметричности: чем выше степень правильности, тем больше осей, но при вырожденности оси могут быть бесконечно многими.

Диаграмма подчёркивает зависимость симметрии от типа фигуры: для правильных многоугольников осей больше, а для произвольных — меньше или вообще одна.

Данные из школьного курса геометрии (оценка: «бесконечно много» для круга показана условно как большое число).



Фигуры, обладающие центральной симметрией

Параллелограмм обладает центральной симметрией: её центр совпадает с точкой пересечения диагоналей. При повороте на 180° относительно этой точки противоположные вершины переходят друг в друга.

Квадрат, ромб и прямоугольник также имеют центральную симметрию, потому что это частные случаи параллелограмма. Остаются верными и связанные свойства диагоналей: они пересекаются в центре симметрии.

У окружности центр симметрии — её центр: любая точка и противоположная ей по диаметру взаимно переходят при повороте на 180° . У треугольника центральной симметрии нет, кроме вырожденных случаев.

Фигуры, обладающие осевой симметрией

Осевая симметрия встречается у равнобедренного и равностороннего треугольников, а также у квадрата, ромба и прямоугольника. Часто ось проходит через ключевые элементы фигуры — вершину и середину основания или пары противоположных частей.

У равнобедренного треугольника ровно одна ось симметрии: она проходит через вершину и середину основания. Поэтому отражение меняет стороны местами, но оставляет форму неизменной.

У квадрата осей четыре: две проходят через середины противоположных сторон, ещё две — по диагоналям. Это удобно для задач, где требуется быстро найти симметричную пару вершин или построить образ.

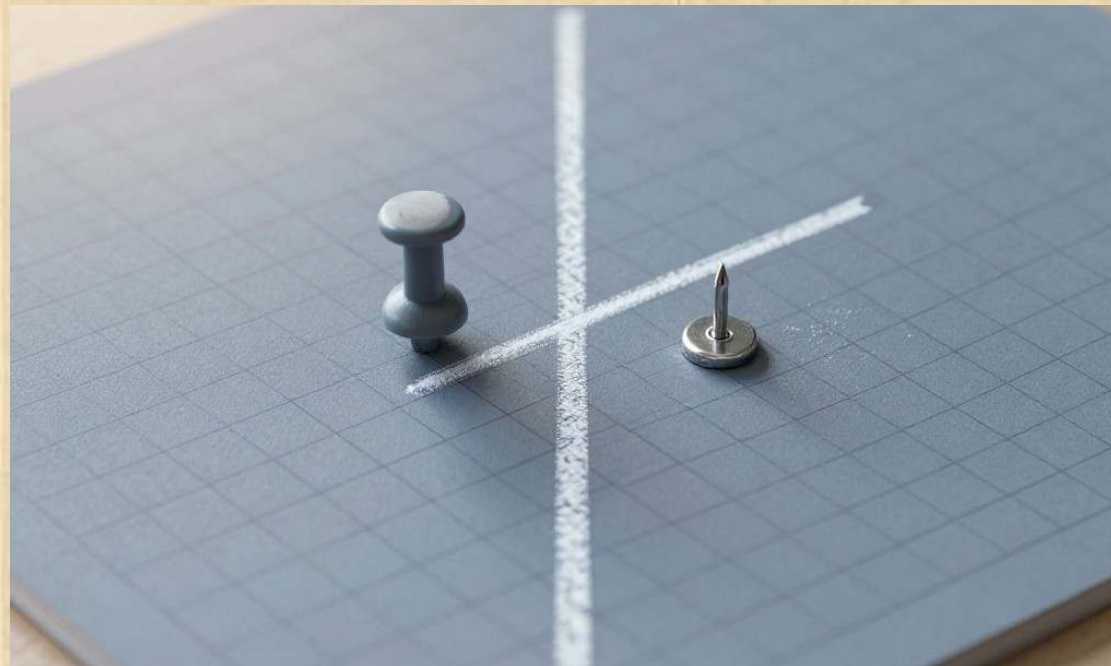
Окружность имеет бесконечно много осей симметрии, а у правильных многоугольников число осей соответствует их правильности и регулярности. В школьных заданиях ось нередко находится через центр фигуры или её середины.

Симметрия на клетчатой бумаге и в координатной плоскости



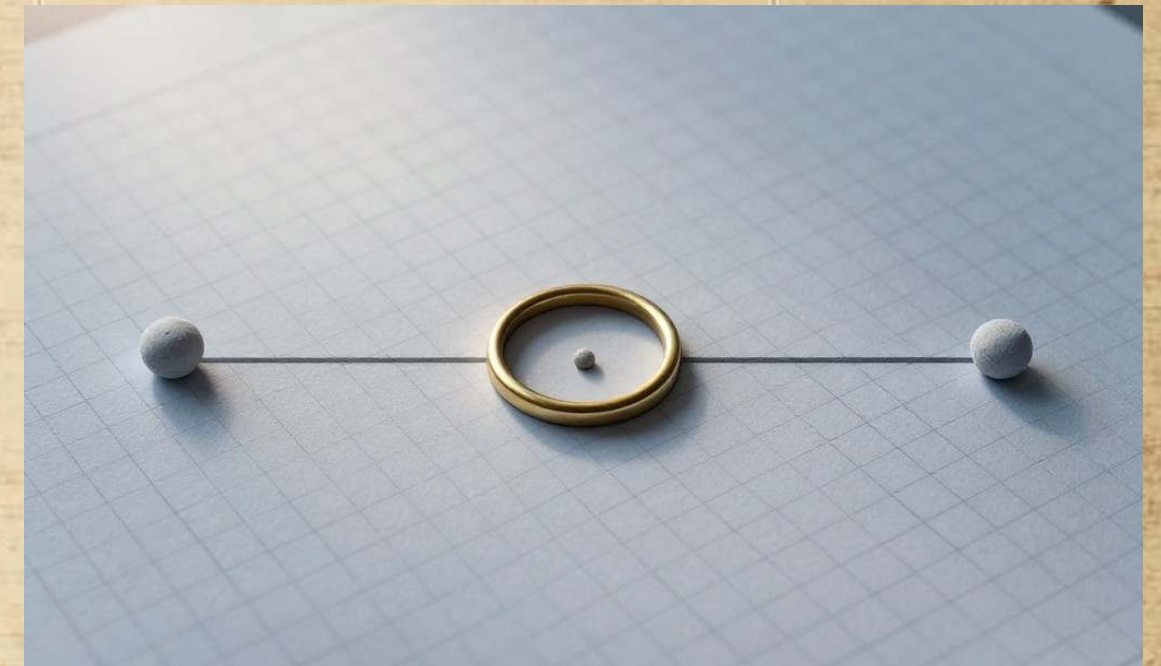
Клетки как «линейка» для построений

На клетчатой бумаге легко точно откладывать равные расстояния. При осевой симметрии удобно проводить перпендикуляр к оси и отсчитывать клетки до оси. Ошибки сразу заметны при сравнении рисунка с образом.



Осевое отражение: равные удаления от прямой

Отражение относительно прямой строят через перпендикуляры: точки на одинаковом расстоянии от оси переходят друг в друга. Координатная сетка помогает проверить, что перпендикуляр «попадает» в середину отрезка между точками-образами.

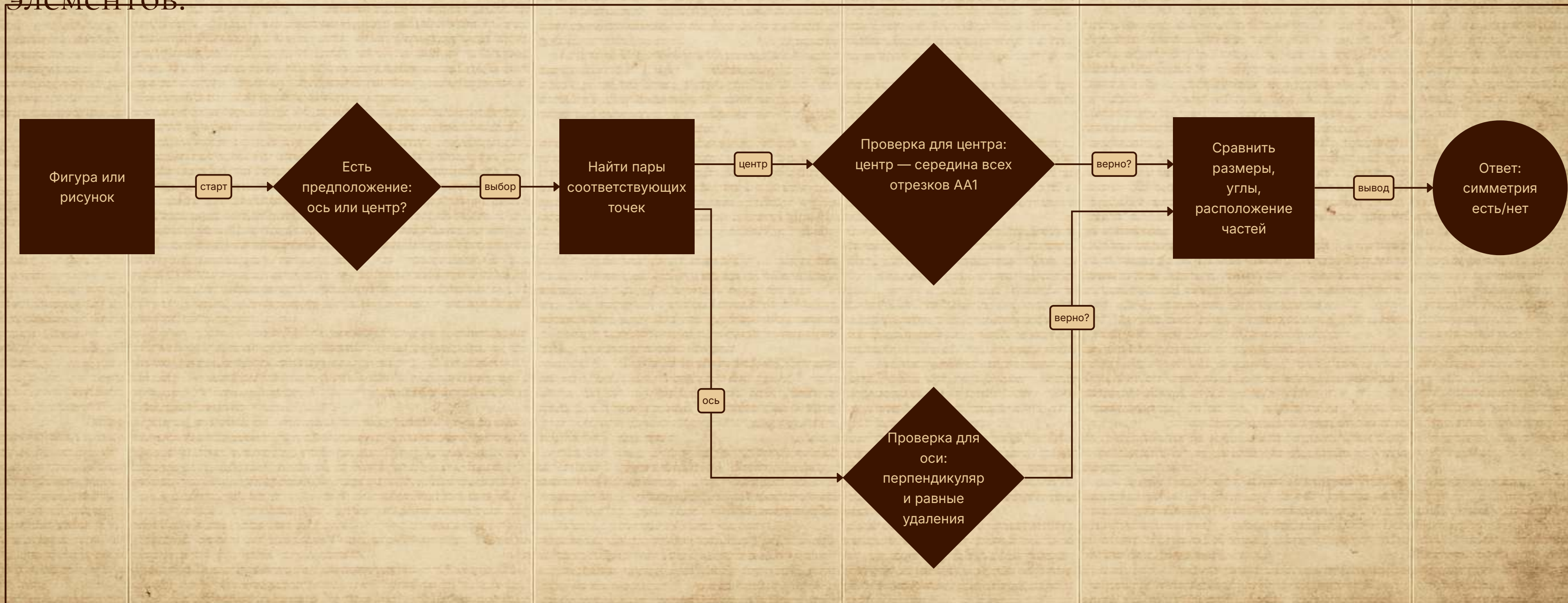


Центральная симметрия: центр делит отрезок пополам

Для центральной симметрии на клетчатой плоскости выбирают центр и ищут образ так, чтобы центр был серединой отрезка между точкой и её отражением. В координатах это выражается равенством «шагов» от центра в противоположных направлениях.

Как проверить, есть ли у фигуры симметрия

Логика распознавания: от предположения к проверке равенства соответствующих элементов.



Симметрия в окружающем мире и в технике



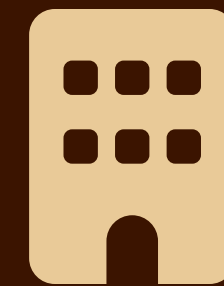
Живая природа
Осевая симметрия хорошо видна у бабочек и многих природных узоров. Отражение относительно условной оси сохраняет форму крыльев, что делает рисунок узнаваемым и симметричным.



Кристаллы и узоры
Снежинки и элементы орнаментов демонстрируют регулярность, основанную на повторяемости. Центральная или осевая симметрия помогает системе сохранять структуру при поворотах и отражениях.



Колёса и элементы дизайна
В технике центральная симметрия встречается в конструкциях с равномерной компоновкой, например в элементах колёс и некоторых эмблемах. Это поддерживает стабильность формы и ритм узора.



Архитектура и дорожные знаки
Многие фасады и вывески содержат осевую симметрию, чтобы композиция выглядела упорядоченной. Аналогично построены некоторые дорожные знаки: отражение сохраняет понятность формы.

Типичные ошибки при распознавании симметрии

Ошибка	Причина ошибки	Верный признак
Путают ось и центр	Элементы симметрии заданы по-разному	Ось — прямая, центр — точка
Выбирают неправильные пары точек	Образ строят «не с теми» вершинами	Соответствие задают по правилам преобразования
Не проверяют перпендикуляр	Считают отражение «по расстояниям» без перпендикуляра	Для оси l нужно, чтобы соединяющий отрезок был перпендикулярен оси
Считают расстояния неточно	Ошибки в отсчёте клеток или масштабах	Сохраняются равные удаления до оси/равные отрезки от центра
Смешивают отражение и поворот	Полагают, что оба дают «тот же результат»	Центральная симметрия — поворот на 180° , осевая — отражение

Таблица фиксирует наиболее частые сбои при определении типа симметрии и показывает, какой признак считать решающим.

Проверка симметрии опирается на строгие определения: равенство соответствующих элементов и соблюдение геометрического механизма (ось как перпендикуляр/центр как середина).

Что общего и что различается в двух преобразованиях

Обе симметрии — движения плоскости: формы остаются теми же по размерам.

Различие проявляется в том, как задаётся преобразование: точкой или прямой, а также в неподвижных элементах.

Диаграмма помогает удерживать общность (сохранение геометрических характеристик) и ключевое различие: центральная симметрия — поворот на 180° , осевая — отражение относительно оси.

Обобщение по школьному курсу геометрии (11 класс), метод сравнения — по определяющим признакам.

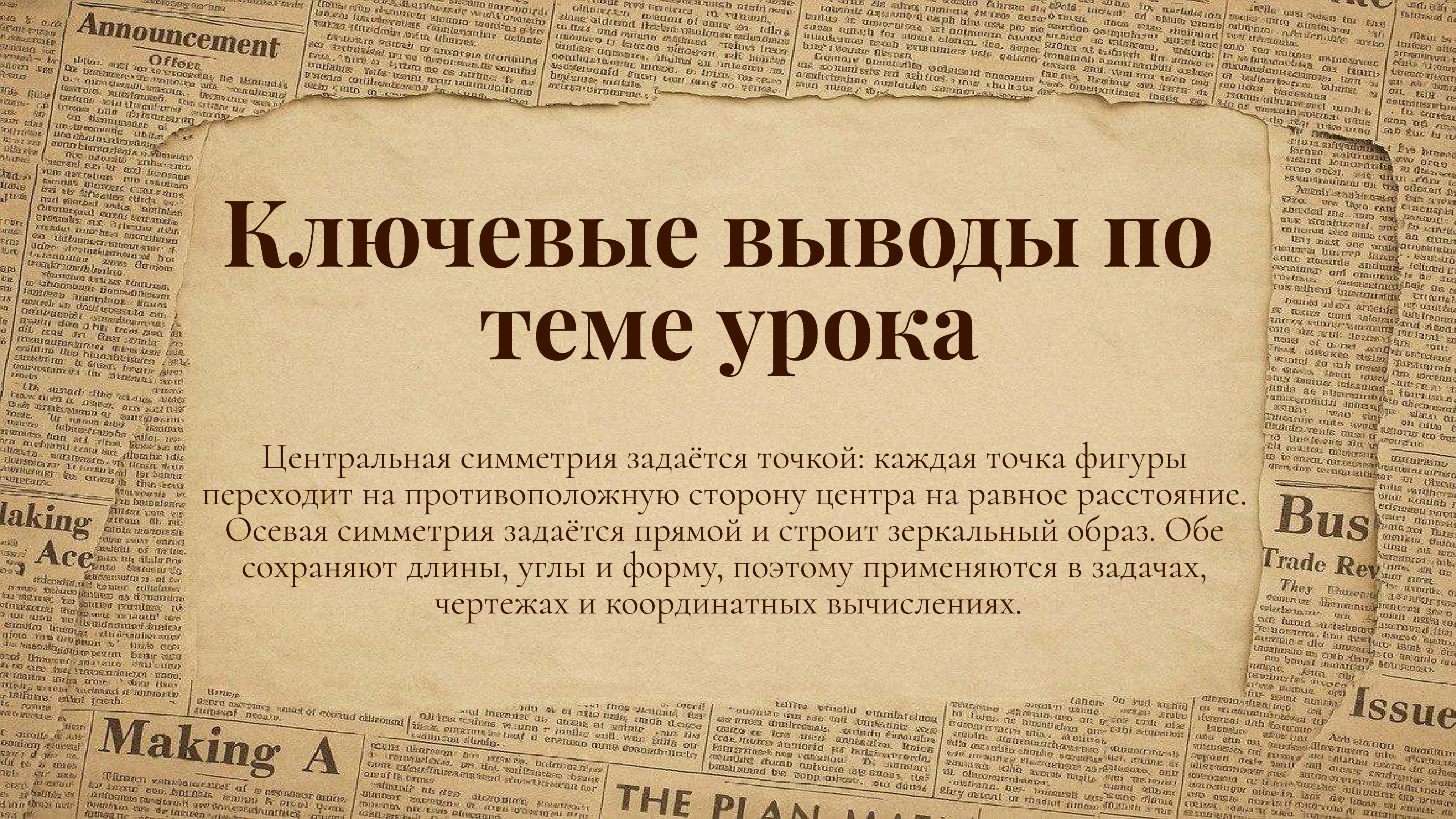


Ключевые выводы по теме урока

Центральная симметрия задаётся точкой: каждая точка фигуры переходит на противоположную сторону центра на равное расстояние. Осевая симметрия задаётся прямой и строит зеркальный образ. Обе сохраняют длины, углы и форму, поэтому применяются в задачах, чертежах и координатных вычислениях.

Announcement

Office



laking
Ace

Making A

THE PLAN

Bus

Trade Rev

Issue