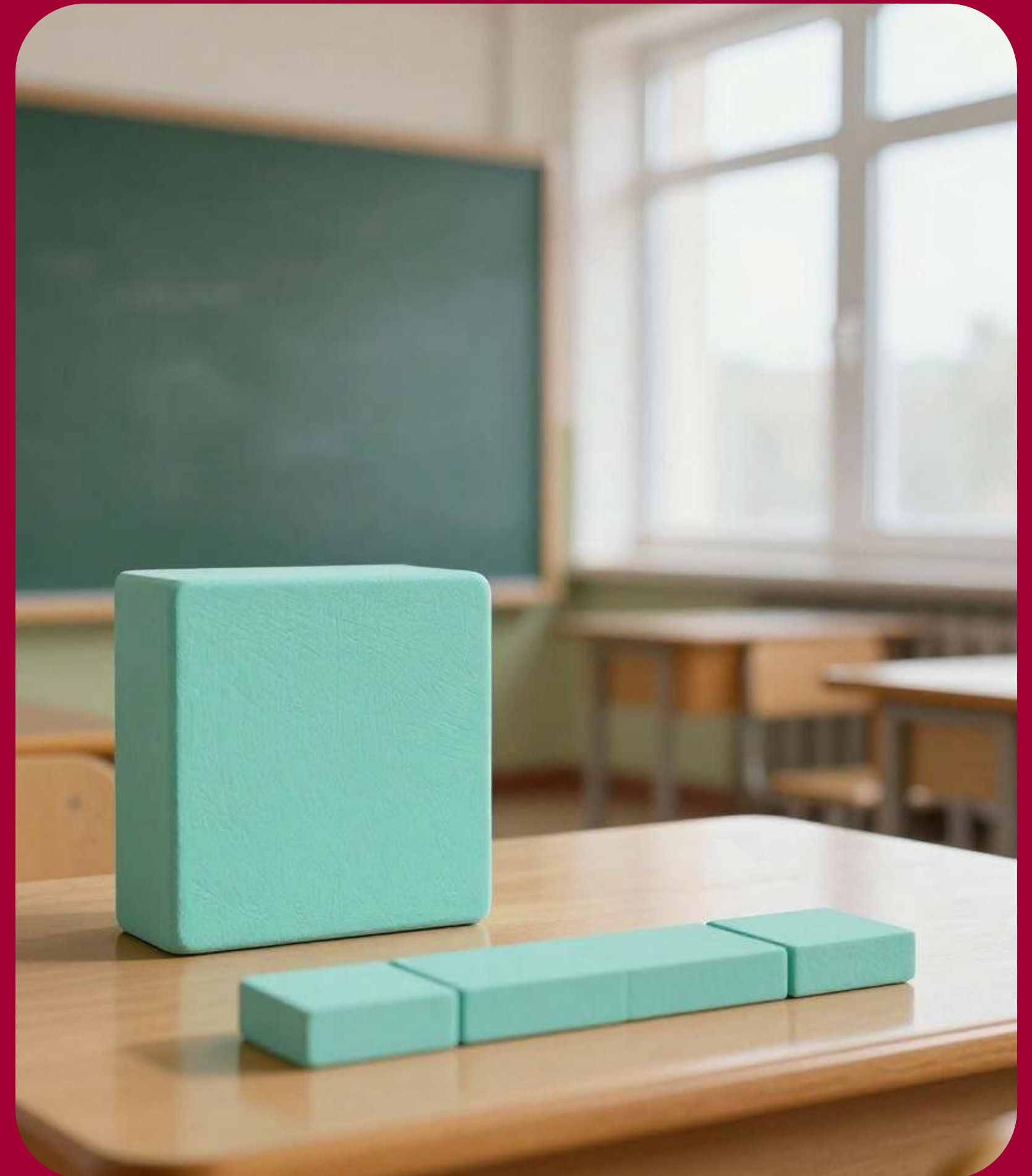


Квадратные уравнения и неполные случаи

Разберём виды неполных
уравнений, способы решения
и проверку корней.



Где встречаются квадратные уравнения

Квадратные уравнения появляются в задачах на площади, движение и графики. Они помогают перейти от простых уравнений к более сильным приёмам алгебры, а неполные случаи удобно показывают главные идеи решения.



Общий вид квадратного уравнения

Стандартная запись

Квадратное уравнение записывают в виде $ax^2+bx+c=0$, где a не равно нулю. Эта запись сразу показывает, какие члены присутствуют в уравнении и как его удобнее решать.

Коэффициент a

Число a стоит при x^2 и задаёт квадратный член. Если a было бы равно нулю, уравнение перестало бы быть квадратным и превратилось бы в уравнение другой степени.

Коэффициент b

Коэффициент b относится к линейному члену bx . Когда $b=0$, линейный член исчезает, и уравнение становится неполным, что часто упрощает поиск корней.

Свободный член c

Число c называют свободным членом, потому что оно не содержит x . Если $c=0$, уравнение можно разложить на множители и применить правило нулевого произведения.

Неполные случаи

Когда $b=0$ и $c=0$ одновременно, получается самый простой вид неполного квадратного уравнения. Каждый такой случай имеет свой удобный способ решения и свой набор возможных ответов.

Первый вид неполного уравнения: $ax^2+c=0$

○ Что изменилось

Если линейный член отсутствует, уравнение принимает вид $ax^2+c=0$. Решение обычно начинают с переноса свободного члена в правую часть, чтобы выделить квадрат.

○ Переход к x^2

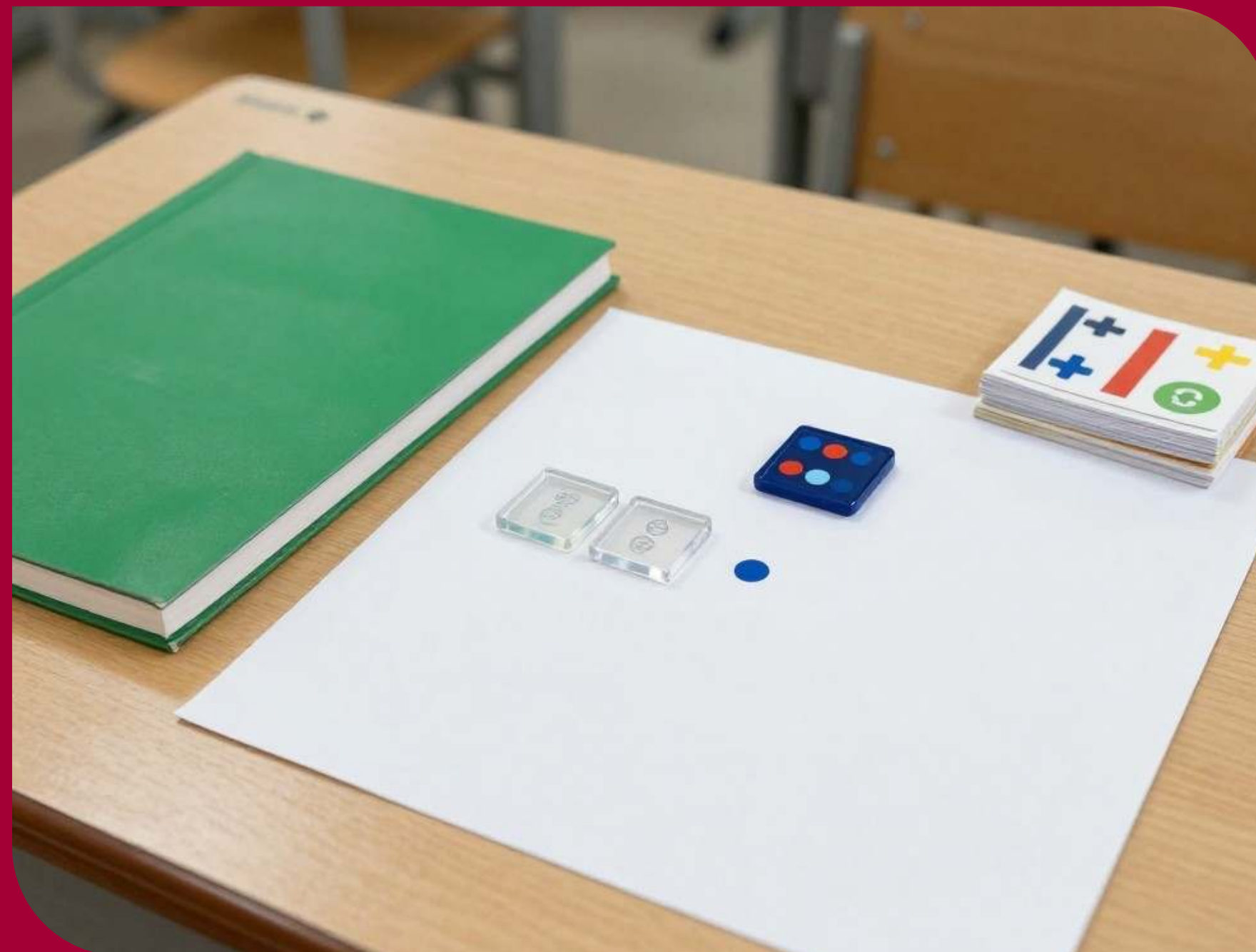
После деления обеих частей на a получают выражение $x^2=d$, где $d=-c/a$. Теперь задача сводится к поиску числа, квадрат которого равен d .

○ Роль знака d

Знак числа d определяет, будут ли действительные корни. Если d положительно, уравнение имеет два решения; если d равно нулю, корень один.

○ Схема решения

На таких уравнениях удобно отрабатывать аккуратные преобразования: сначала перенос, затем деление, а потом извлечение квадратного корня. Это помогает не потерять знак и правильно оценить ответ.

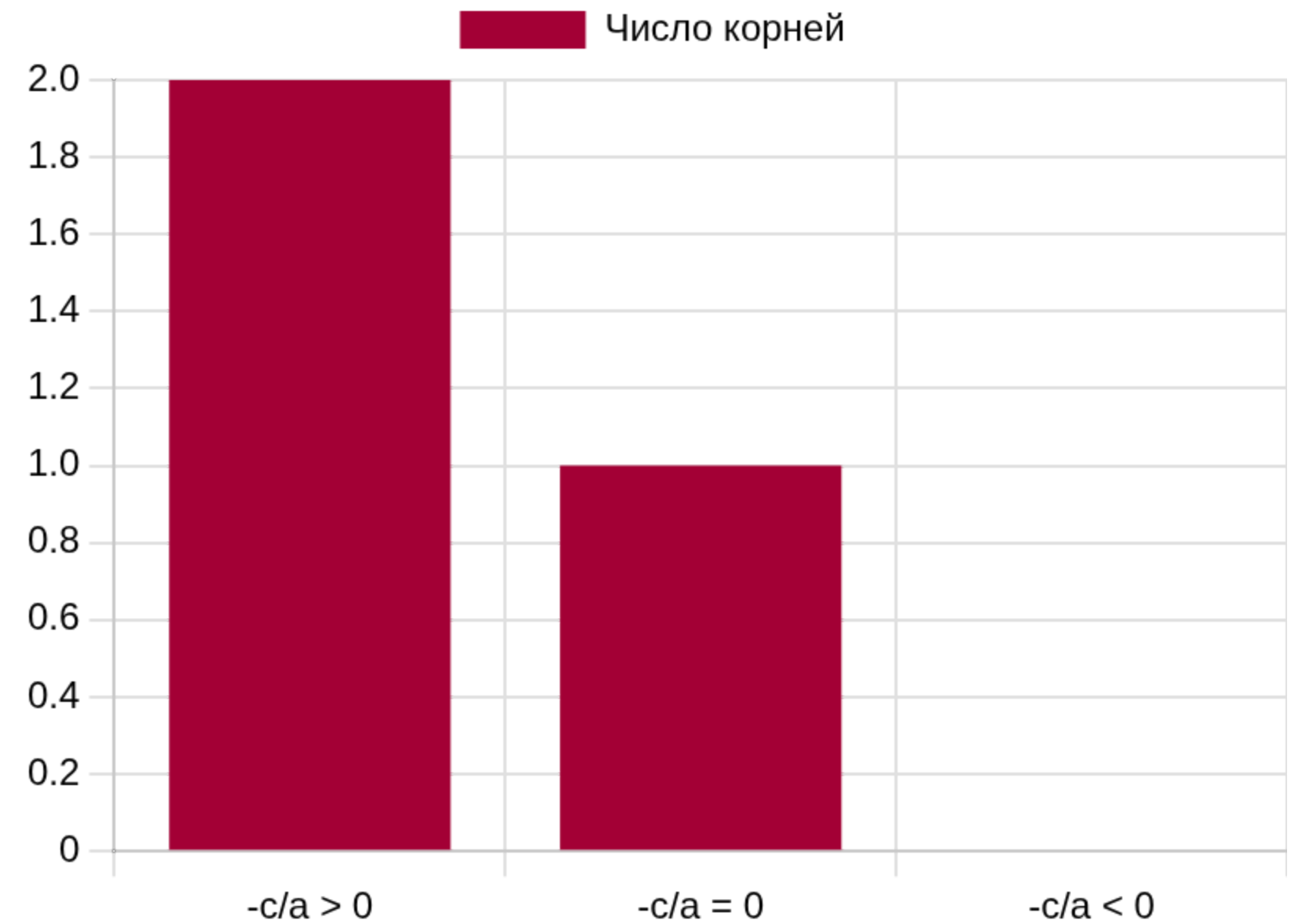


Сколько корней может быть у $ax^2+c=0$

Одно и то же уравнение может дать разные ответы в зависимости от знака числа после деления на a .

Положительное значение даёт два корня, ноль — один, отрицательное — ни одного действительного решения.

Схема составлена по правилу извлечения квадратного корня для уравнения $ax^2+c=0$.



Алгоритм решения уравнения $ax^2+c=0$

01

Перенести c

Сначала свободный член переносят в правую часть уравнения. Это позволяет оставить слева только квадратный член и подготовить выражение к дальнейшему преобразованию.

02

Разделить на a

Затем обе части делят на коэффициент a . В результате получают уравнение вида $x^2=d$, где d уже записано как обычное число.

03

Проверить знак d

После преобразования важно посмотреть на знак d . От него зависит, будет ли одно решение, два решения или вообще не будет действительных корней.

04

Извлечь корень

Если d больше нуля, записывают два корня с разными знаками. Если d равно нулю, получается единственный корень $x=0$, а при отрицательном d действительных корней нет.

05

Сверить ответ

Последний шаг — проверить найденные значения подстановкой в исходное уравнение. Это помогает убедиться, что при вычислениях не допущена ошибка со знаком или делением.



Примеры уравнений вида $ax^2+c=0$

Уравнение	Преобразование	Ответ
$2x^2-18=0$	$x^2=9$	$x=\pm 3$
$x^2-9=0$	$x^2=9$	$x=\pm 3$
$5x^2+20=0$	$x^2=-4$	нет корней

В таблице показано, как после преобразования сразу видно число корней и их значения.

После деления на коэффициент a становится ясно, положительно ли число d и сколько действительных корней получится.

Примеры подобраны по школьному правилу решения неполных квадратных уравнений.

Второй вид неполного уравнения: $ax^2+bx=0$

Нет свободного члена

Если $c=0$, квадратное уравнение записывается как $ax^2+bx=0$. В такой записи оба слагаемых содержат x , поэтому можно вынести его за скобки.

Разложение на множители

После вынесения общего множителя получается $x(ax+b)=0$. Это очень удобная форма, потому что она сразу связывает уравнение с правилом нулевого произведения.

Первый корень

Один множитель уже равен x , поэтому один корень всегда равен нулю. Его важно не забыть, особенно когда второй корень находится быстро и кажется очевидным.

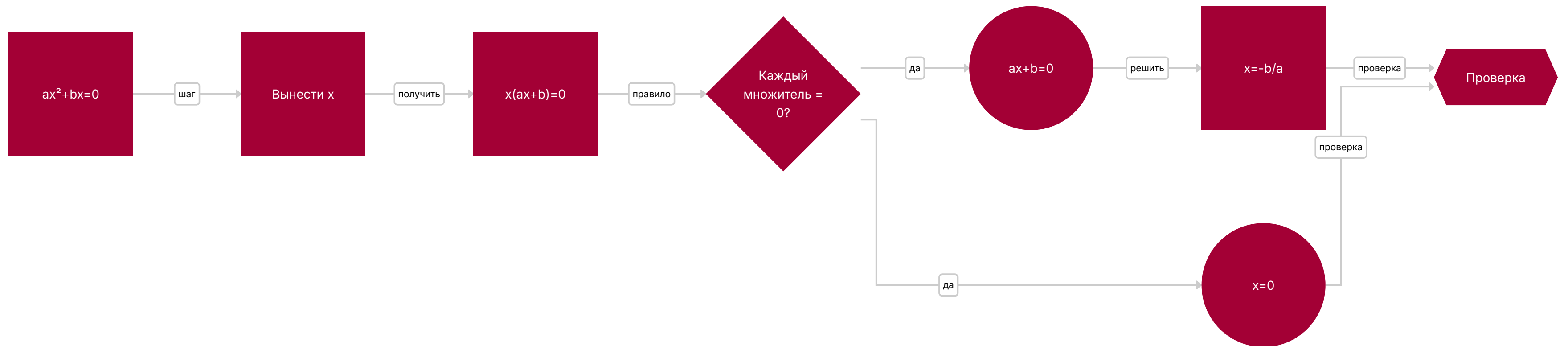
Второй корень

Второй множитель приравнивают к нулю: $ax+b=0$. Отсюда находят $x=-b/a$, если a не равно нулю. Так получаются все решения уравнения.



Как решать $ax^2+bx=0$

Схема показывает связь преобразования уравнения с правилом нулевого произведения.



2

множителя могут привести к нулю произведения.

Это свойство позволяет решать уравнения быстро: достаточно приравнять каждый множитель к нулю и найти все корни.

Правило нулевого произведения из курса алгебры 8 класса.

Примеры уравнений вида $ax^2+bx=0$

Уравнение	Преобразование	Корни
$x^2-5x=0$	$x(x-5)=0$	0; 5
$3x^2+12x=0$	$3x(x+4)=0$	0; -4
$-2x^2+8x=0$	$-2x(x-4)=0$	0; 4

Таблица показывает, как уравнение раскладывается на множители и какие корни получаются в каждом случае.

Во всех случаях один корень равен нулю, а второй находится после решения линейного множителя.

Примеры составлены по общему правилу решения уравнений вида $ax^2+bx=0$.

1

единственный корень уравнения после деления на ненулевой коэффициент

Это самый простой случай неполного квадратного уравнения: после деления на a получается $x^2=0$, поэтому подходит только $x=0$.

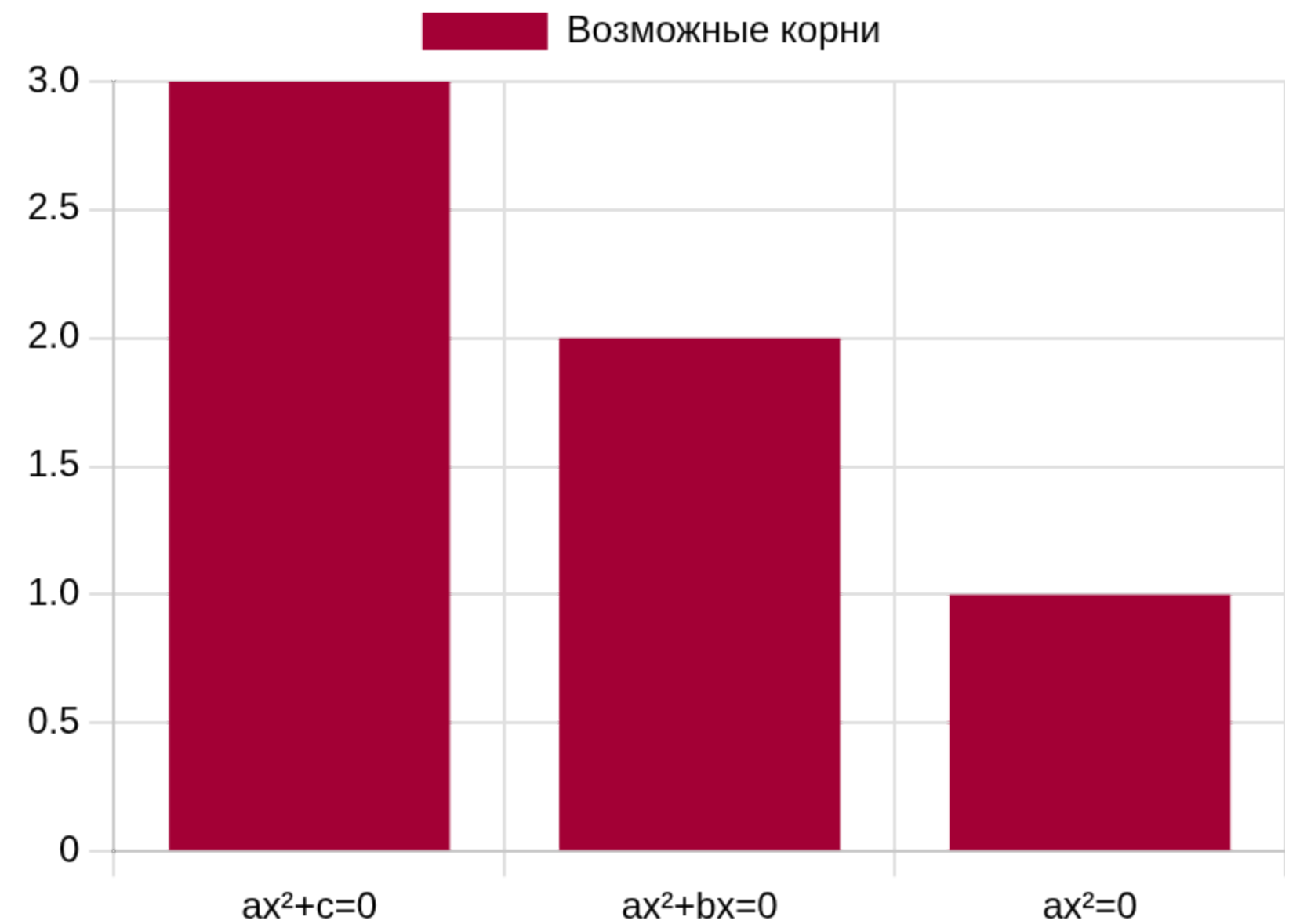
Общий вывод следует из свойства квадратного корня и вида уравнения $ax^2=0$.

Сравнение трёх видов неполных квадратных уравнений

Чем меньше ненулевых членов в уравнении, тем проще способ решения: либо корни ищут через корень, либо сразу получают нуль.

Вид уравнения определяет и количество решений, и основной приём: корень, множитель или немедленный ответ.

Сравнение основано на свойствах неполных квадратных уравнений школьного курса алгебры.



Связь с графиком параболы

01

Корни и пересечения

Каждый корень уравнения соответствует точке, где график функции пересекает ось x . Если пересечений нет, действительных решений тоже нет.

02

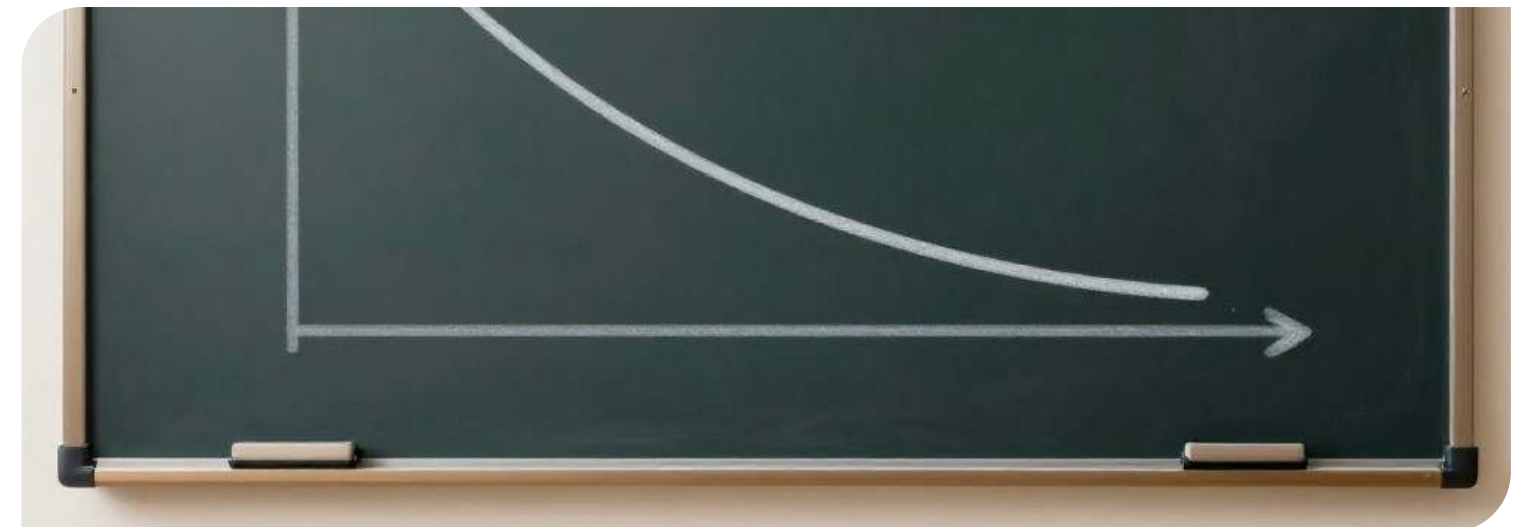
Случай $ax^2+c=0$

Когда линейный член отсутствует, парабола остаётся симметричной относительно оси y . Поэтому её пересечения с осью x располагаются попарно и одинаково удалены от начала координат.

03

Случай $ax^2+bx=0$

Если свободный член равен нулю, один из корней всегда равен нулю. На графике это означает, что парабола проходит через начало координат.



Типичные ошибки при решении

01**Смена знака**

При переносе числа в другую часть уравнения часто забывают поменять знак. Из-за этого дальнейшие вычисления становятся неверными уже на первом шаге.

02**Неверный корень из числа**

При извлечении квадратного корня нужно помнить о двух знаках, если число положительное. Ошибка возникает, когда записывают только один вариант ответа.

03**Потерянный ноль**

В уравнении вида $ax^2+bx=0$ легко забыть корень $x=0$ после вынесения общего множителя. Его обязательно нужно записать отдельно.

04**Ошибка в делении**

После преобразования важно аккуратно делить коэффициенты. Неверное сокращение или деление с ошибкой меняет второй корень.

05**Нет проверки**

Если не подставить найденные значения в исходное уравнение, можно не заметить арифметическую ошибку или перепутанный знак.

Проверка найденных корней

01

Подстановка

Каждый найденный корень подставляют вместо x в исходное уравнение. Это самый надёжный способ убедиться, что решение действительно подходит.

02

Нулевая левая часть

После подстановки левая часть должна стать равной нулю. Если это не так, значит в решении есть ошибка.

03

Особая польза

Проверка особенно важна, когда корней два или когда ответ получен после деления на коэффициент. Тогда легко пропустить неточность.

04

Контроль знаков

Этот шаг помогает заметить перепутанные знаки, неверное раскрытие скобок и арифметические ошибки при вычислениях.

Сравнение способов решения

Вид	Приём	Ответ
$ax^2+c=0$	Перенос и корень	0, 2 корня
$ax^2+bx=0$	x за скобки	0 и второй
$ax^2=0$	Деление на a	$x=0$

Таблица помогает быстро увидеть, какой приём подходит для каждого вида неполного квадратного уравнения.

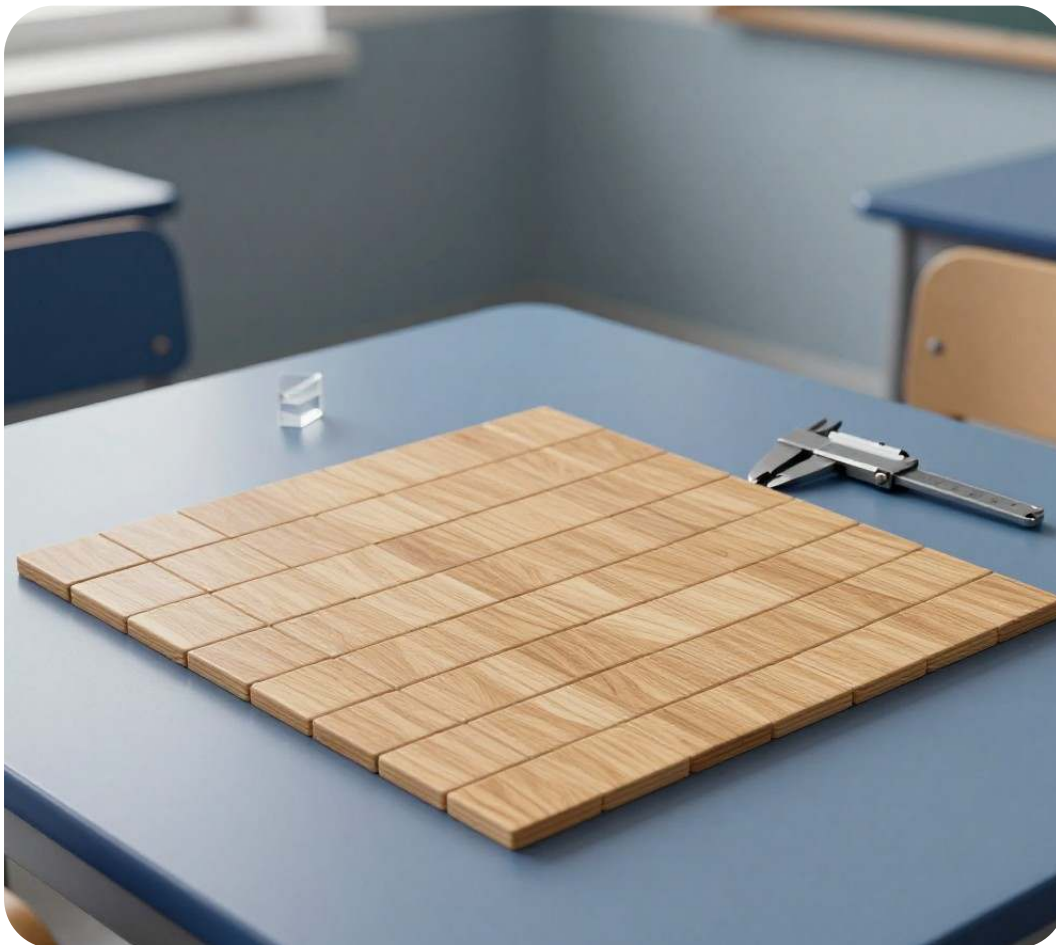
Разные виды уравнений решаются разными приёмами, но выбор способа всегда подсказывает сама запись уравнения.

Сравнение составлено по правилам решения неполных квадратных уравнений.

Практические задачи с неполными уравнениями

Площадь квадрата

Если сторона квадрата выражена через x , то его площадь часто приводит к уравнению вида $x^2 = \text{число}$. По нему удобно находить длину стороны и выбирать только положительный ответ.



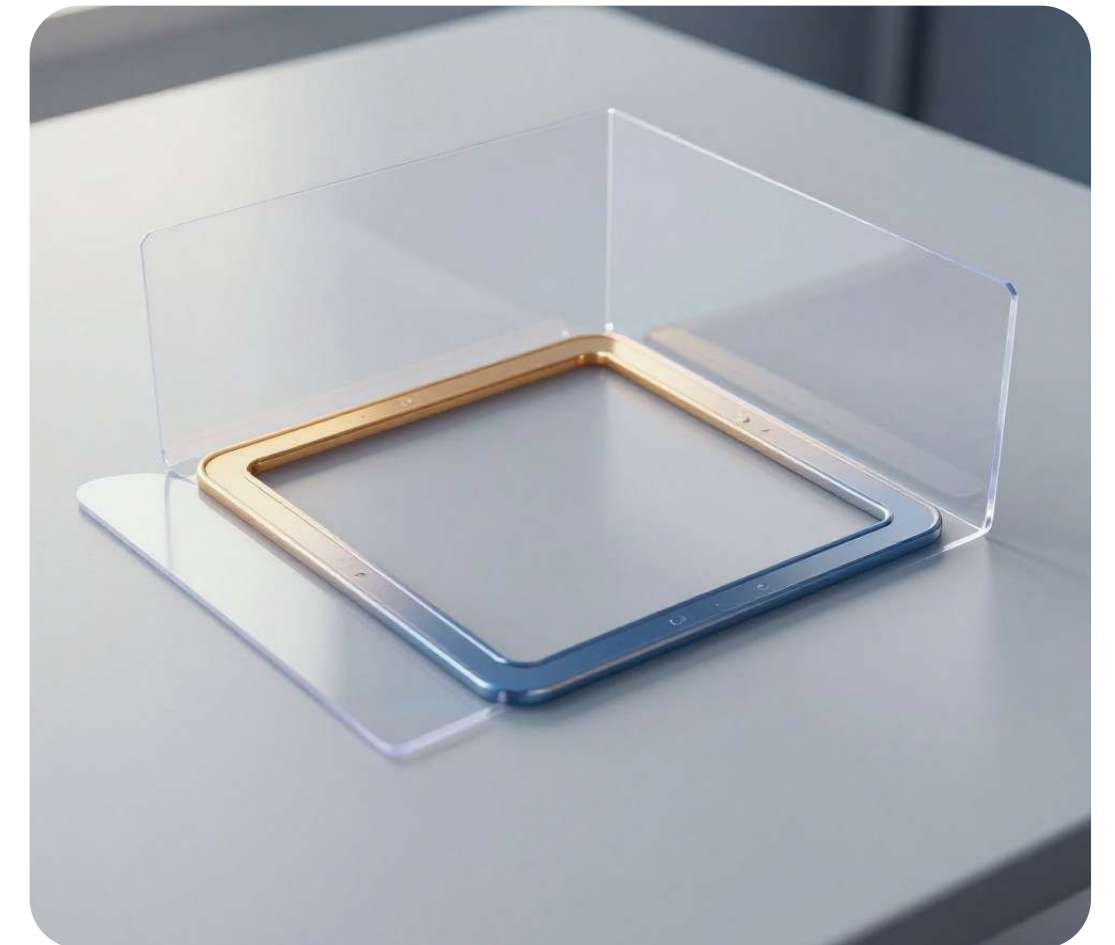
Движение по прямой

В задачах на движение иногда появляется произведение, которое можно разложить на множители. Тогда уравнение сразу превращается в более простую форму и решается через нулевое произведение.



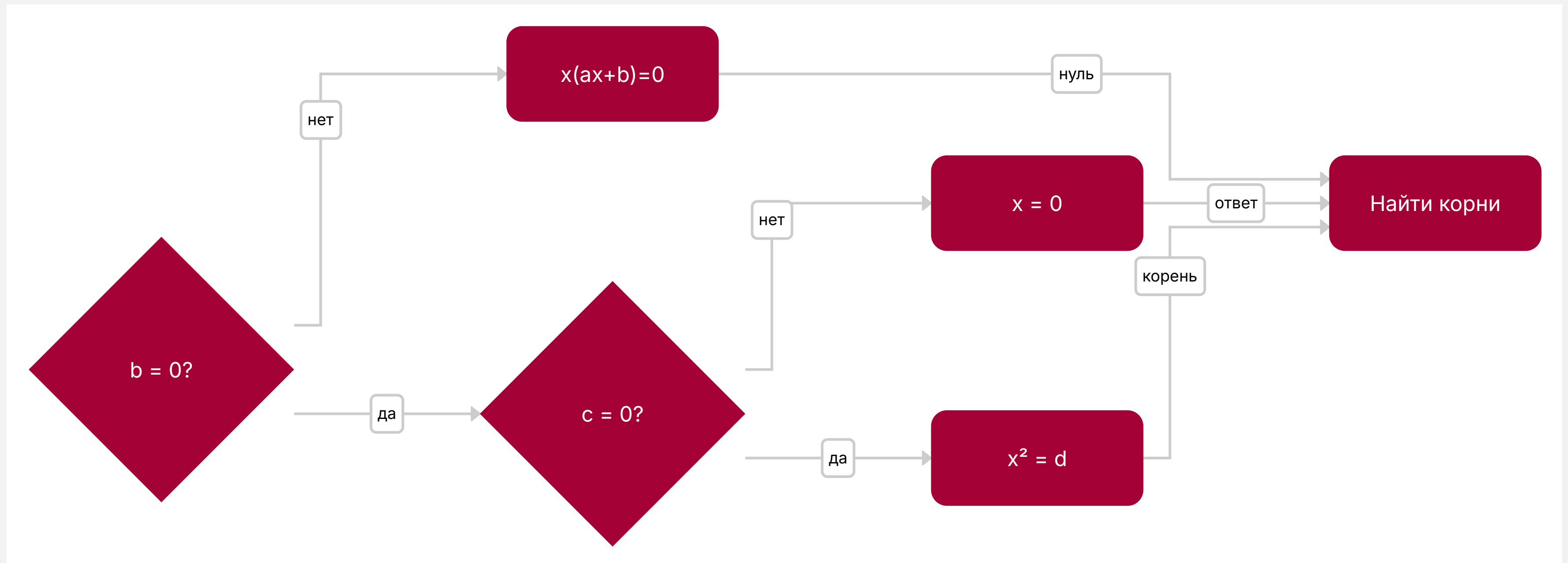
Геометрическая схема

При построении фигур или измерении отрезков неизвестная величина нередко входит только в квадрат или без свободного члена. В таких задачах видно, почему неполные уравнения так полезны на практике.



Как выбрать способ решения

Схема показывает, какие коэффициенты нужно проверить перед началом вычислений.



Что важно запомнить

Неполное квадратное уравнение легко распознать по нулевым коэффициентам b или c . Правильный выбор приёма, аккуратные вычисления и проверка ответа помогают быстро находить верные корни.