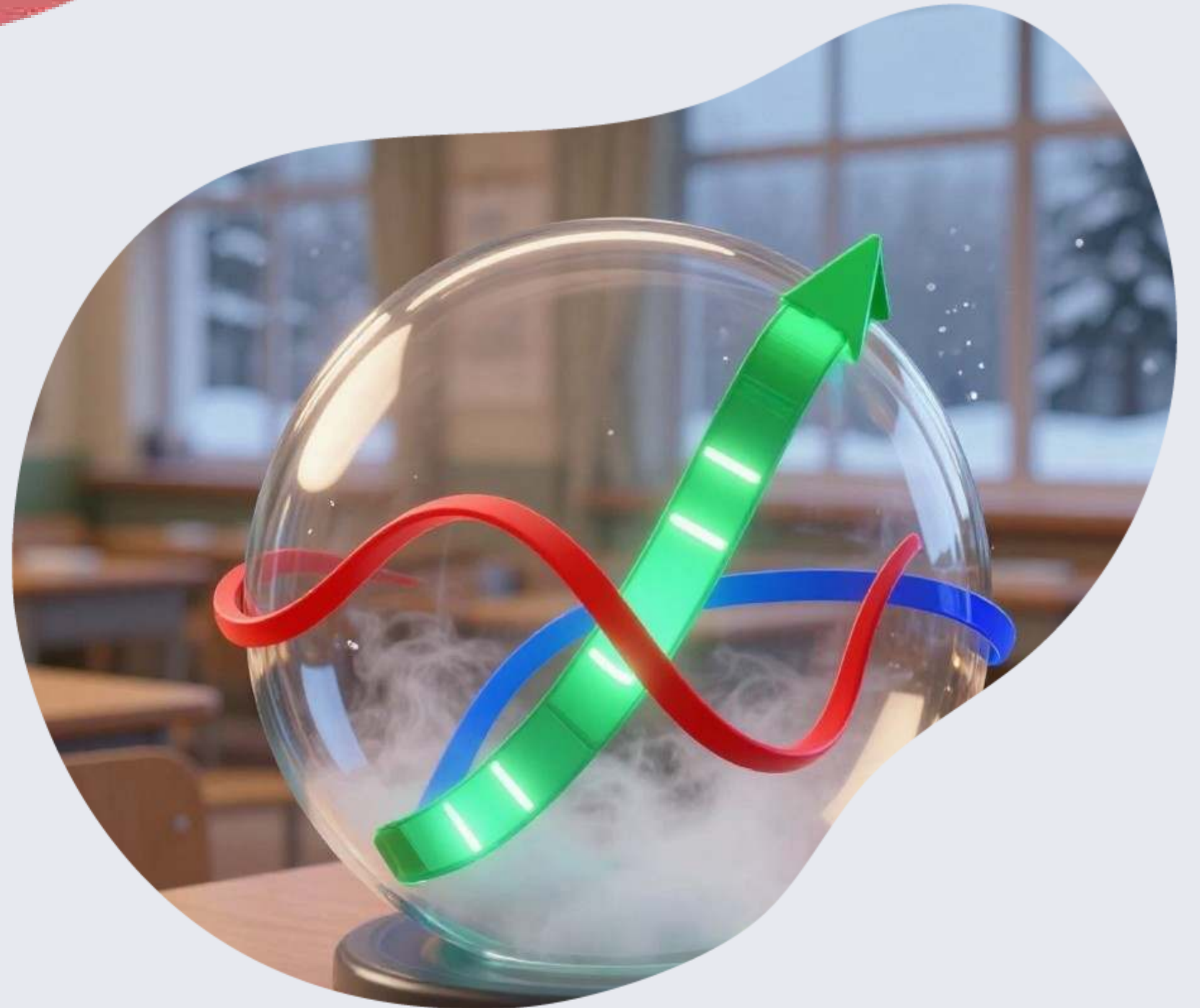
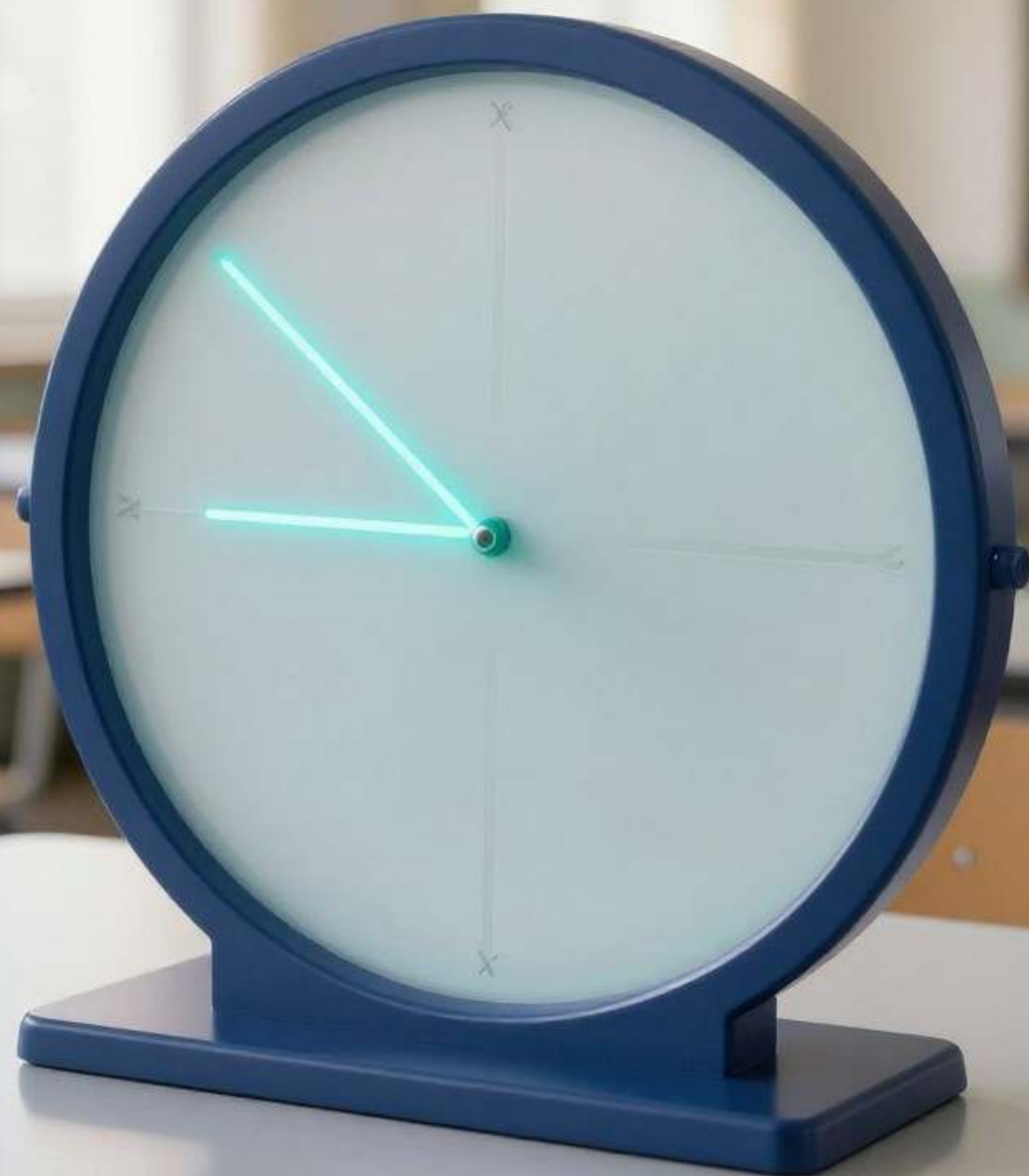


Как меняются синус, косинус, тангенс и котангенс при росте угла

Посмотрим, как угол «двигает» значения функций и почему у них есть разрывы и повторы.





Угол, радианная мера и единичная окружность

Полный оборот — 360° или 2π . На единичной окружности точка $(x; y)$ задаёт $\cos x = x$ и $\sin x = y$. Тангенс — $\sin x / \cos x$, котангенс — $\cos x / \sin x$. При движении против часовой стрелки угол возрастает.

Синус при увеличении угла

В I четверти синус растёт: от 0° он равен 0, а к 90° доходит до 1. Дальше кривая синуса плавно меняется, не скачет и всегда остаётся между -1 и 1 .

Во II четверти синус убывает: в 90° он снова 1, а к 180° становится 0. Даже при уменьшении величины знак ещё остаётся положительным, потому что точка над осью абсцисс.

В III четверти синус отрицателен: от -1 при 270° он возвращается к 0 при 180° , проходя значения ниже оси. В IV четверти синус снова возрастает к 0 при 360° , завершив цикл.

Косинус при увеличении угла



В I четверти косинус убывает: при 0° он равен 1, а к 90° становится 0. Это связано с горизонтальной координатой точки на единичной окружности: она сдвигается к нулю.



В III четверти косинус возрастает: от -1 он доходит до 0 при 270° . Здесь точка снова приближается к вертикальной оси, поэтому горизонтальная координата стремится к нулю.



Во II четверти косинус продолжает убывать до -1 при 180° . Знак меняется, потому что точка переходит на сторону отрицательных значений по горизонтали, и $\cos x$ становится отрицательным.

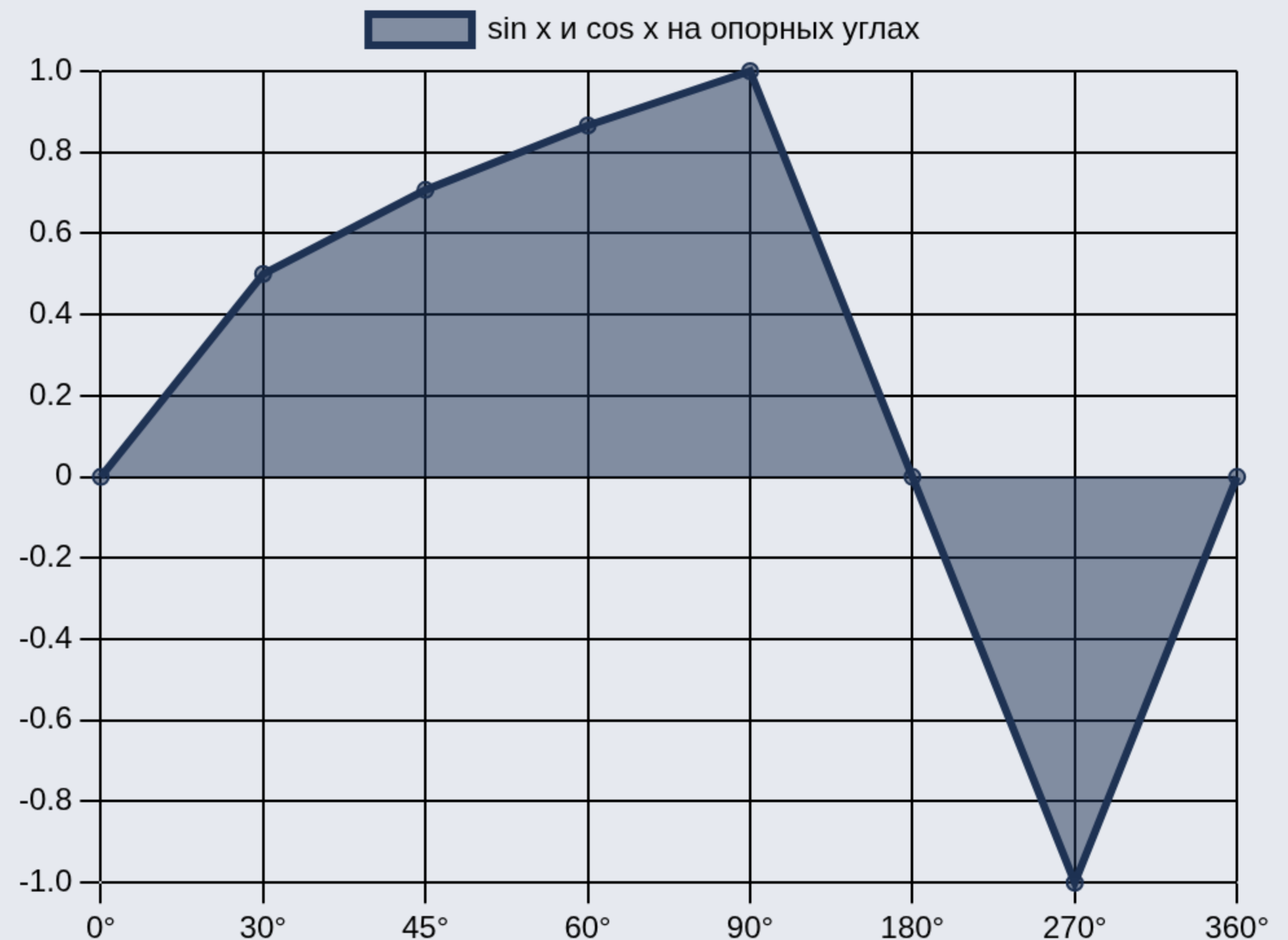


В IV четверти косинус снова возрастает к 1 при 360° . Значит, максимум $\cos$ равен 1, минимум — -1 , а весь повторный рисунок происходит каждые 360° .

Сравнение синуса и косинуса на опорных углах

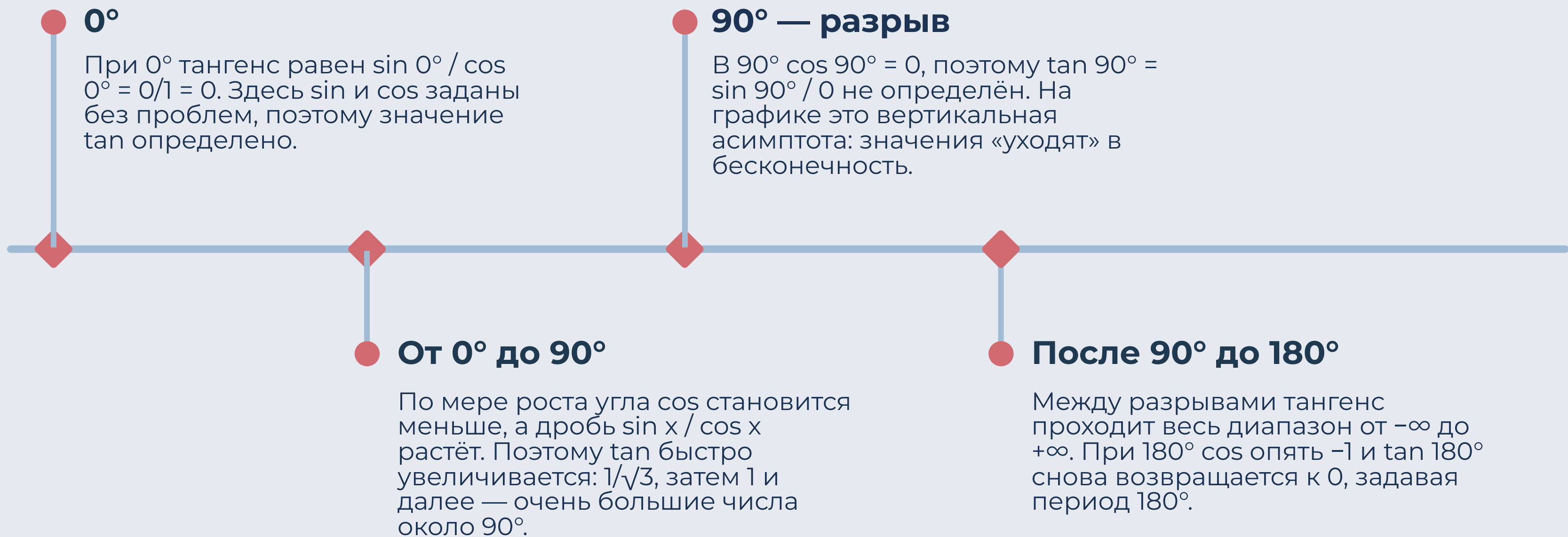
Пересечение кривых соответствует углам, где $\sin$ и $\cos$ равны; это удобно находить по единичной окружности.

По рисунку видно: синус «поднимается» до 1 и затем возвращается, а косинус идёт в противоположную сторону; через 360° значения повторяются.



Расчёт по определениям $\sin x$ и $\cos x$ через координаты точки на единичной окружности (без внешних данных).

Тангенс: быстрый рост и точки, где функция не определена



Котангенс: убывание и разрывы

01

Котангенс равен $\cos x / \sin x$. Он не определён при 0° , 180° и 360° , потому что $\sin x$ там равно 0. В этих точках дробь делить нельзя, поэтому возникают разрывы.

02

На каждом промежутке определения $\cot$ убывает: от $+\infty$ до $-\infty$. В I четверти значения стартуют «большими положительными» и стремятся к 0 по мере приближения к 90° .

03

В III четверти котангенс снова убывает от очень больших положительных к 0, потому что там $\cos$ отрицателен, а $\sin$ тоже меняет знак по окружности. Период котангенса равен 180° .

Таблица опорных значений тригонометрических функций

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса на опорных углах помогают быстро определять знаки и характер изменения.

Синус возрастает от 0 к 1 на $0^\circ\text{--}90^\circ$, косинус убывает от 1 к 0. Тангенс и котангенс «меняют скорость» сильнее и дают точки, где функция не определена.

угол	значения (sin, cos, tan, cot)
0°	0; 1; не определён; 0
30°	$1/2$; $\sqrt{3}/2$; $1/\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$; $\sqrt{2}/2$; 1; 1
60°	$\sqrt{3}/2$; $1/2$; $\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$
90°	1; 0; 0; не определён

Табличные значения, выводимые из единичной окружности и определений sin, cos, tan и cot.

Единичная окружность и знаки функций по четвертям

Знаки $\sin$ и $\cos$ в четвертях

На единичной окружности точка в I четверти имеет положительные $\sin$ и $\cos$, потому что обе координаты x и y положительны. Во II четверти $\sin$ остаётся положительным, а $\cos$ становится отрицательным.

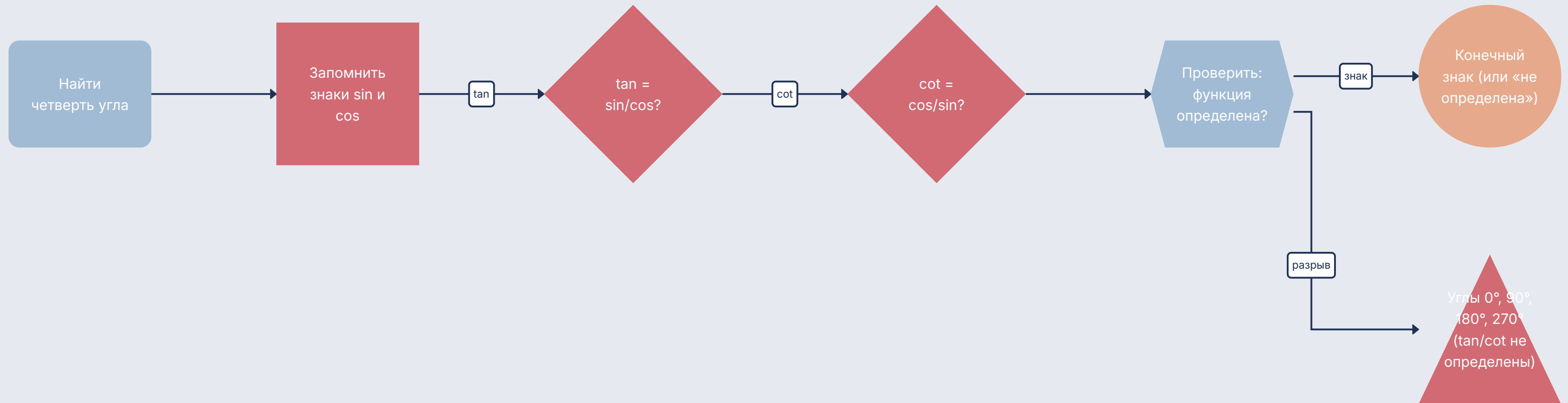
Знаки $\tan$ и $\cot$ через $\sin$ и $\cos$

В III четверти отрицательны и $\sin$, и $\cos$, а в IV четверти $\sin$ отрицателен, $\cos$ положителен. Тангенс положителен там, где $\sin$ и $\cos$ одного знака, и отрицателен при разных знаках; котангенс ведёт себя аналогично.



Как определить знак тригонометрической функции по углу

Алгоритм основан на знаках $\sin$ и $\cos$ по четвертям и определениях $\tan = \sin/\cos$ и $\cot = \cos/\sin$.

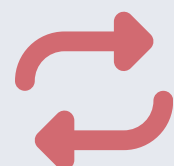


Периодичность тригонометрических функций



Синус и косинус

Значения синуса и косинуса повторяются после полного оборота: через 360° или через 2π . Это видно на окружности: точка возвращается в то же положение, и координаты совпадают.



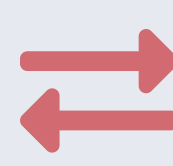
Пример для косинуса

Для косинуса действует такое же правило полного оборота. Например, $\cos 45^\circ = \cos 405^\circ$. Точка с тем же положением относительно оси Ох даёт одинаковую горизонтальную координату.



Пример для синуса

Если угол отличается на полный оборот, их синусы равны. Например, $\sin 30^\circ = \sin 390^\circ$. Поскольку 390° отличается от 30° на 360° , точка на окружности та же.



Тангенс и котангенс

Тангенс и котангенс повторяются быстрее: период равен 180° или π . Поэтому, например, $\tan 60^\circ = \tan 240^\circ$ и $\cot 30^\circ = \cot 210^\circ$.

Графики четырёх функций на одной системе координат

На одном поле графики $\sin x$ и $\cos x$ держатся в пределах от -1 до 1 , а $\tan x$ и $\cot x$ имеют разрывы и уходят к большим по модулю значениям.

Сравнение показывает: периодичность общая для всех, но характер поведения различается. Наличие вертикальных асимптот у $\tan$ и $\cot$ объясняет резкие «разрывы» графиков.



Справочные сведения по графикам тригонометрических функций (школьный курс), без привлечения внешних измерений.

Где функции возрастают и убывают

$0^\circ \rightarrow 90^\circ$

На отрезке от 0° до 90° синус возрастает, а косинус убывает. Это соответствует движению точки по окружности от начала координат к точке на оси Oy.

$180^\circ \rightarrow 270^\circ$

К 180° косинус достигает минимума, затем при росте угла он начинает возрастать. Синус при этом остаётся отрицательным и убывает до -1 в 270° .

$90^\circ \rightarrow 180^\circ$

После 90° синус начинает убывать, а косинус продолжает убывать до -1 в точке 180° . Для $\tan$ и $\cot$ важны новые знаки и приближение к разрывам.

$270^\circ \rightarrow 360^\circ$

От 270° до 360° синус снова возрастает к 0. Косинус также возрастает к 1, а $\tan$ и $\cot$ сохраняют закономерное «движение» в пределах каждого промежутка определения.

Изменение значений на соседних углах

Угол	sin	cos	tan (cot)
0°,15°,30°,45°,60°,75°,90°	0; 0.26; 1/2; 0.71; 0.87; 0.97; 1	1; 0.97; √3/2; 0.71; 1/2; 0.26; 0	tan: растёт к 90°; при 90° не определён (cot: от неопр. при 0° к 0 при 90°)

Короткая таблица для ориентира: приведены значения sin и cos на углах 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а также указано, что tan растёт и не определён при 90°.

По данным видно: sin монотонно растёт на выбранной сетке до 90°, а cos монотонно убывает до 0. У tan и cot резкость связана с точками разрыва.

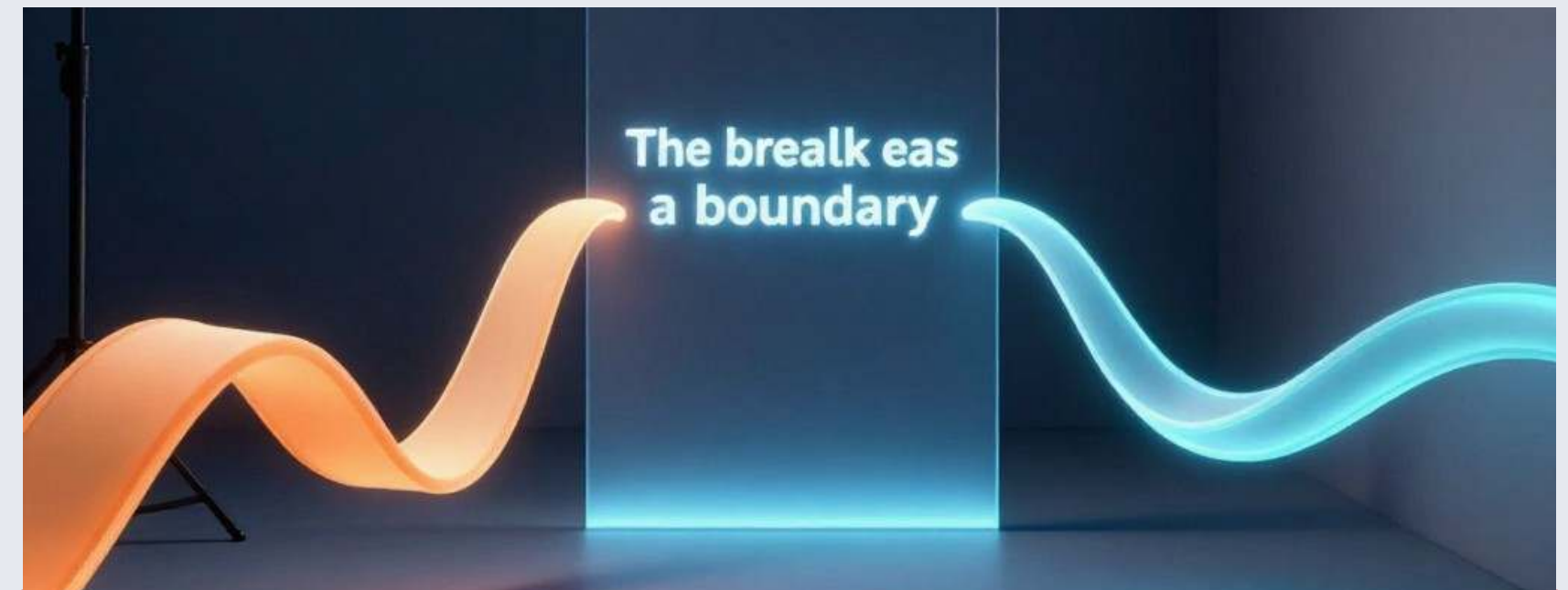
Сводные опорные/приближённые значения, указанные в исходном описании слайда.

Почему тангенс резко возрастает около 90°



Когда $\cos$ почти ноль

При приближении угла к 90° косинус становится очень маленьким по модулю. Тангенс — это дробь $\sin x / \cos x$, поэтому числитель остаётся «обычным», а деление на почти ноль даёт взлёт: значения быстро уходят к большим положительным или отрицательным.



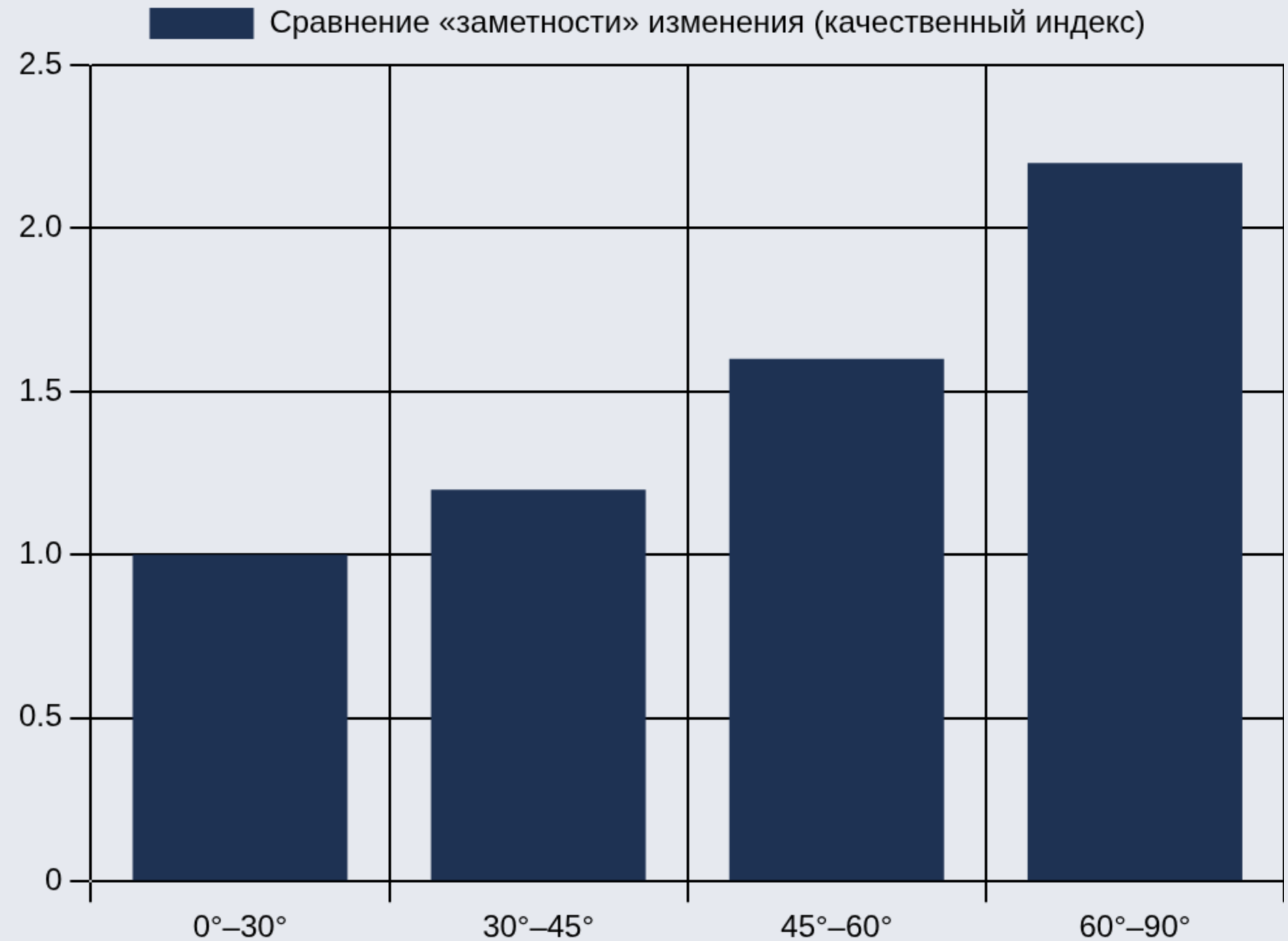
Разрыв как «граница»

Вблизи 90° график тангенса не просто растёт, а приближается к вертикальной асимптоте. Слева от 90° значения стремятся в одну сторону, справа — в другую. На рисунке это подчёркивает отметка оси разрыва возле 90° .

Сравнение скорости изменения функций

Если сравнивать, как быстро меняются значения на соседних отрезках, то $\sin$ и $\cos$ меняются плавно, а $\tan$ и $\cot$ заметно резче, особенно ближе к 90° и 180° .

Чем ближе к точкам разрыва, тем сильнее разница в поведении. Поэтому максимальные «скачки» появляются возле 90° и 180° , где $\tan/\cot$ не определены или стремятся к большим величинам.



Иллюстративная диаграмма по свойствам графиков (монотонность и разрывы), без внешних измерений.

Практические задачи, где нужны тригонометрические функции

01

Синус и косинус помогают находить высоту и расстояние в геометрии. Например, измеряя наклон и используя известную длину тени, можно оценить высоту дерева или здания при освещении под углом.

02

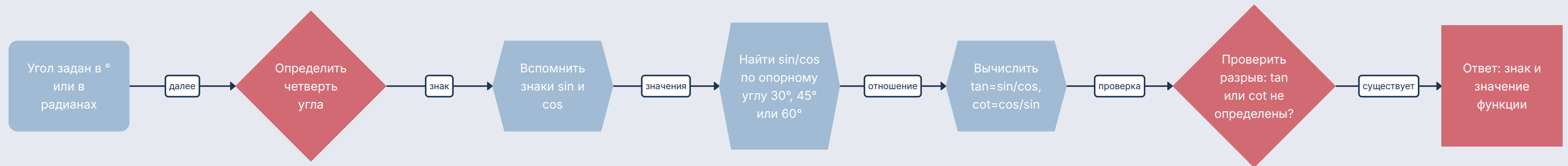
Косинус удобно связывать с горизонтальной составляющей, а синус — с вертикальной. Это применяется при расчёте траектории луча света и при построении схем местности по известным углам.

03

Тангенс часто используют для крутизны наклона: он показывает отношение «подъём/пробег». Так решают задачи про лестницы у стены, пандусы и уклон дороги, чтобы траектория была безопасной.

Как находить значение функции по углу

Алгоритм опирается на четверти, знак и опорные углы 30° , 45° , 60° , а также на проверку разрывов для $\tan$ и $\cot$.



Типичные ошибки при изучении изменения тригонометрических функций

+ Считают, что все четыре функции ведут себя одинаково: например, что $\sin$ и $\tan$ растут одинаково. На самом деле у тангенса и котангенса есть разрывы, и характер изменения другой.

+ Забывают, что $\tan$ и $\cot$ не определены в отдельных точках. Кроме того, путают знаки во II, III и IV четвертях: $\sin$ и $\cos$ меняют знак по окружности, а $\tan/\cot$ получают его через дробь.

+ Путают периоды: у синуса и косинуса период 360° (или 2π), а у тангенса и котангенса — 180° (или π). Из-за этого неверно переносят углы и получают неправильные значения.

+ Неверно читают таблицу опорных значений: берут, например, $\sqrt{2}/2$ вместо $1/\sqrt{3}$ или перепутывают значения для разных углов. Лучше сразу сверять угол и столбец, а не полагаться на память.

Ключевой вывод урока

При увеличении угла синус и косинус изменяются периодически и плавно, но в противоположных направлениях на разных участках. Тангенс возрастает и имеет разрывы при 90° и 270° , котангенс убывает и разрывается при 0° , 180° и 360° . Единичная окружность, четверти и таблица опорных значений помогают быстро находить знаки, значения и характер изменения всех четырёх функций.