

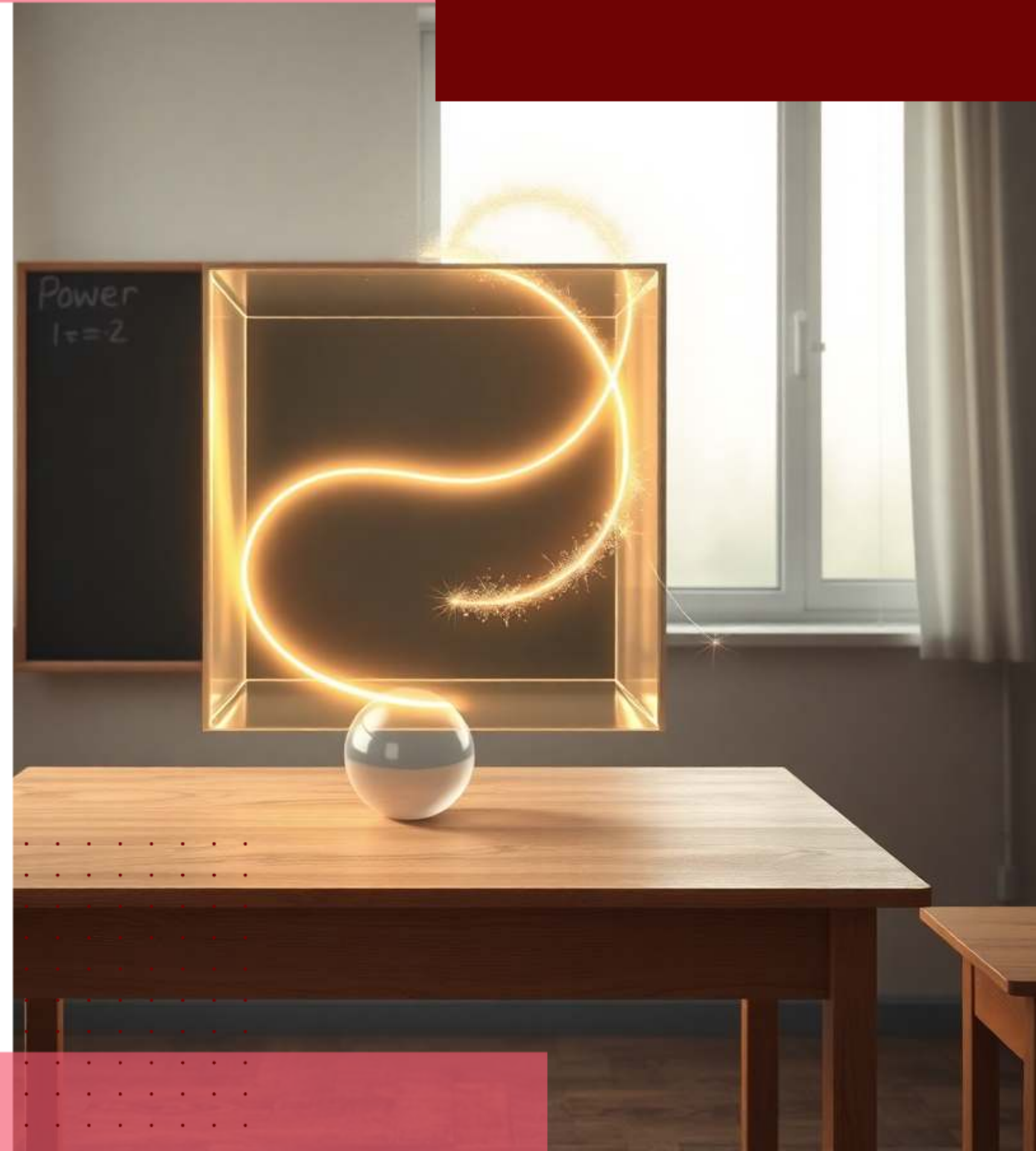
Иррациональность чисел вида $a^{1/n}$

Когда корень становится дробью, а когда — нет?



Зачем это нужно в 9 классе

Корни помогают решать уравнения, упрощать выражения и понимать расположение чисел на прямой. На простых примерах видно, где ответ точный, а где приходится использовать приближение.



Рациональные и иррациональные числа

Рациональные числа

Их можно записать в виде дроби m/n , где m и n — целые числа, а знаменатель не равен нулю. К ним относятся и целые числа.

Иррациональные числа

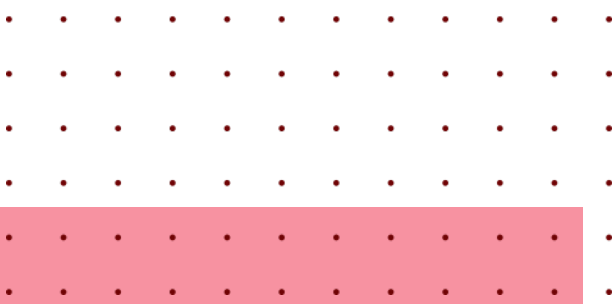
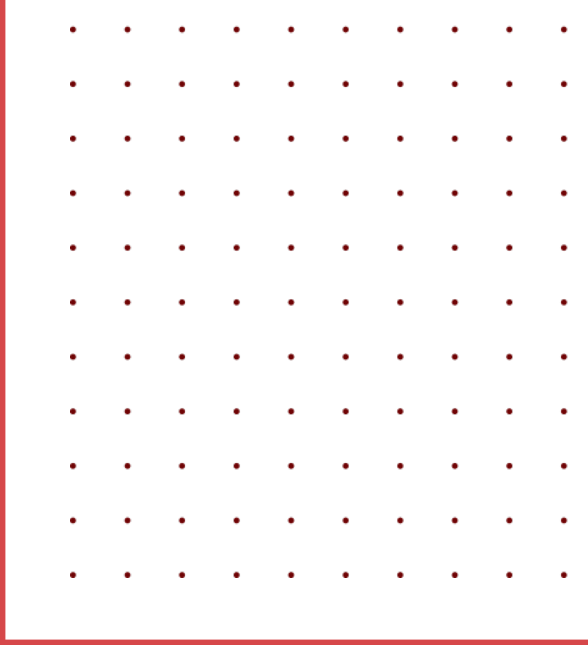
Они не выражаются обыкновенной дробью. Их десятичная запись бесконечна и не повторяется, поэтому точное значение нельзя записать короткой дробью.

Примеры рациональных

Числа 2, -5, $7/3$, а также $4^{(1/2)}=2$ и $27^{(1/3)}=3$ являются рациональными, потому что их можно представить как целое число или дробь.

Примеры иррациональных

Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2^{(1/3)}$ и $5^{(1/4)}$ не имеют точной дробной записи. Такие корни остаются иррациональными, если исходное число не является точной степенью.



Что означает запись $a^{(1/n)}$

1. Запись корня

Выражение $a^{(1/n)}$ читается как n -й корень из числа a . Оно связывает степень и корень: одна операция «отменяет» другую.

2. Точная степень

Если число a можно представить в виде b^n , то n -й корень равен b . В этом случае результат получается целым и, значит, рациональным.

3. Когда точности нет

Если a не является точной n -й степенью целого числа, корень не превращается в целое число. Тогда значение обычно остаётся иррациональным.

4. Главный ориентир

Чтобы понять смысл записи, всегда сравнивают число a с полными степенями. Это самый надёжный способ быстро оценить результат корня.

Примеры на числовой прямой

Корень из 2

$\sqrt{2}$ лежит между 1 и 2, потому что $1^2 < 2 < 2^2$. Это число можно оценить, но нельзя точно записать в виде дроби.

Кубический корень из 3

$3^{(1/3)}$ тоже находится между 1 и 2, так как $1^3 < 3 < 2^3$. Его значение удобно показывать только приближённо.

Четвёртый корень из 16

$16^{(1/4)} = 2$, потому что $16 = 2^4$. Здесь корень даёт точное целое число, а не приближённое значение.

Что показывает прямая

На числовой прямой видно, что иррациональные корни можно сравнивать и оценивать, но они не имеют точной дробной записи.

Как проверить, рационален ли корень

Пошаговая проверка для числа $a^{(1/n)}$ через разложение на простые множители.



1

**критерий решает, будет ли
ответ рациональным: нужно
проверить, является ли
число точной n -й степенью.**

Вывод темы «Иррациональность чисел вида $a^{1/n}$ »

Этот один признак позволяет быстро отличать точные корни от иррациональных и не путать вычисление с приближительной записью.

Идея доказательства на простом уровне



1.

Предположим дробь
Пусть $a^{(1/n)}=m/k$, причём дробь несократима. Тогда можно возвести обе части в n -ю степень и получить связь между a , m и k .

2.

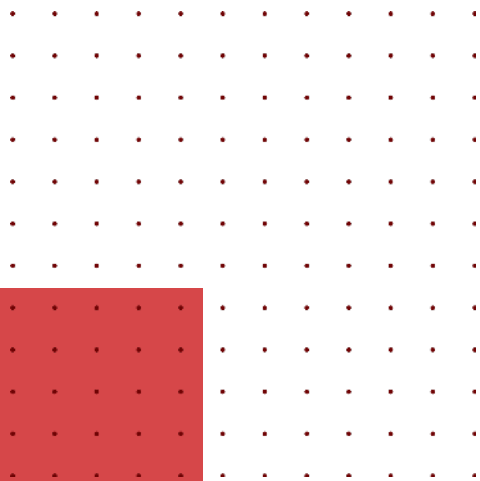
Появляется произведение
Из равенства следует $a \cdot k^n = m^n$. Значит, правая часть делится на k , а потому и левая сторона должна подчиняться тому же условию.

3.

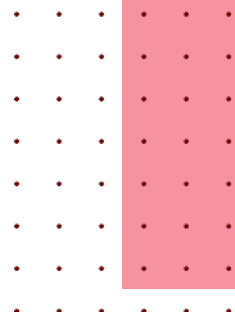
Почему это невозможно
Если $k > 1$, то из несократимости дроби следует, что m и k не имеют общих делителей. Поэтому утверждение о делимости приводит к противоречию.

4.

Итог рассуждения
Рациональная запись возможна только тогда, когда корень уже равен целому числу. Это происходит, если исходное число — точная n -я степень.



Проверка на конкретных примерах

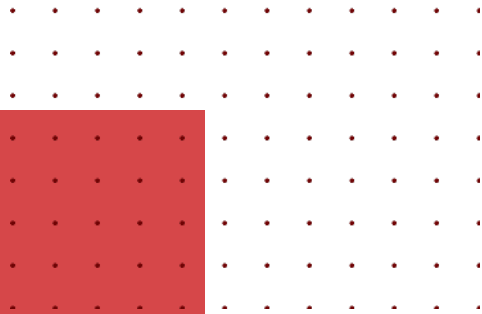


В таблице видно, что решающим является не размер числа, а совпадение с точной n-й степенью.

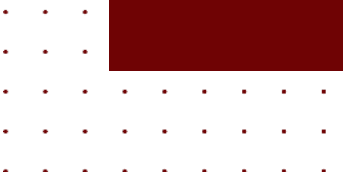
Если число совпадает с полной степенью, корень даёт точный результат; иначе остаётся иррациональным.

a	n	точная степень	вывод
8	3	да	рационально
12	2	нет	иррационально
27	3	да	рационально
50	4	нет	иррационально

Примеры из темы «Иррациональность чисел вида $a^{(1/n)}$ »



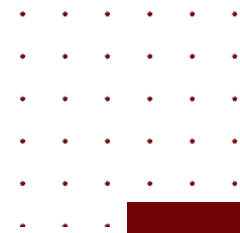
Сколько случаев дают рациональный корень



Примеры подобраны так, чтобы показать оба типа результатов на одинаковом числе задач.

Рациональные корни встречаются только в особой ситуации, когда исходное число является точной степенью.

Составлено по примерам из темы



Квадратные корни как частный случай

1. Полный квадрат

Для $n = 2$ корень из числа a будет рациональным только тогда, когда a является полным квадратом, то есть представляется как b^2 для некоторого целого b .

2. Удобные примеры

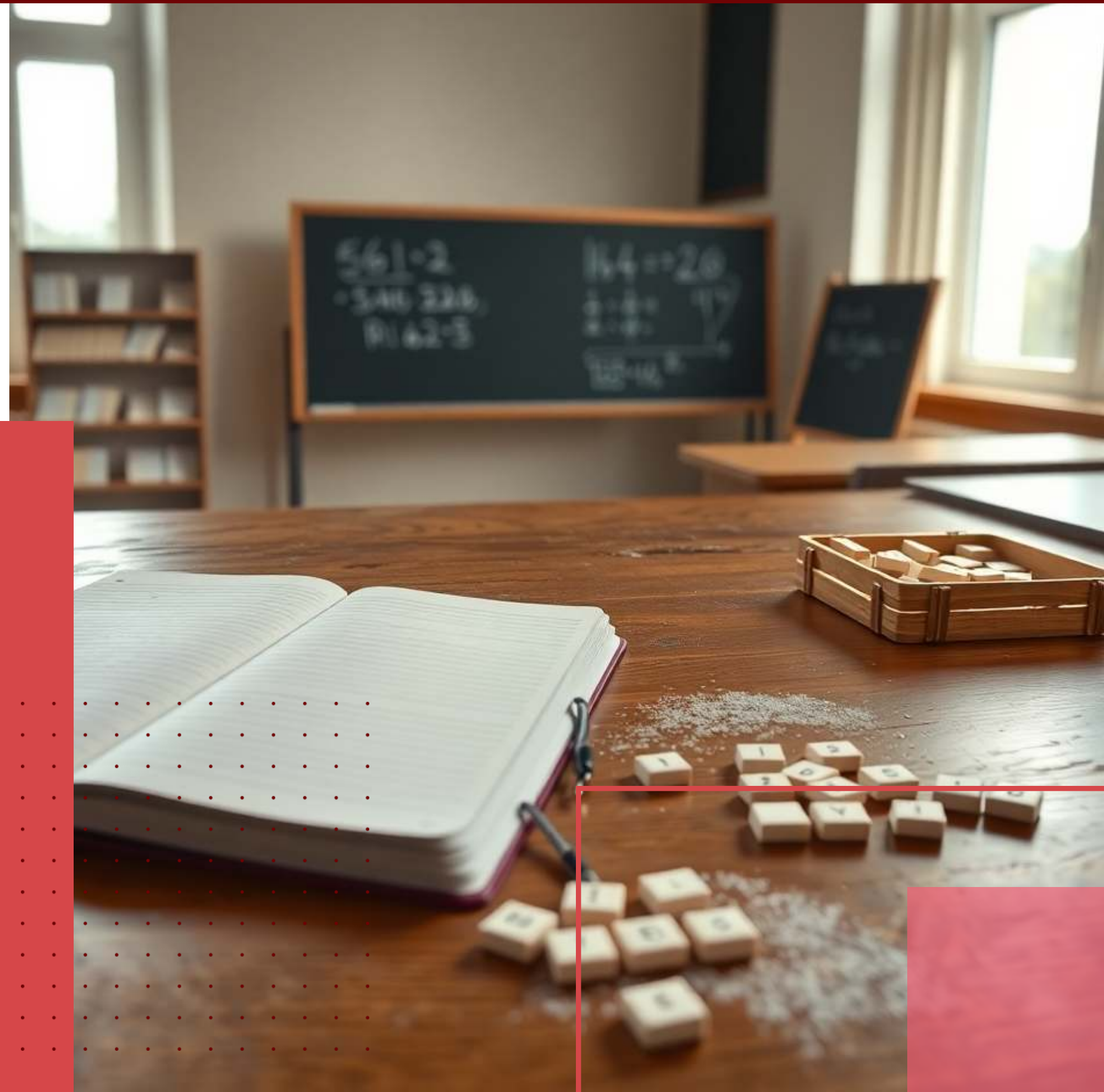
Числа 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 и 64 сразу дают точный квадратный корень. Например, $\sqrt{49} = 7$, а $\sqrt{36} = 6$ без каких-либо приближений.

3. Когда корня нет в дробях

Если число не является полным квадратом, квадратный корень не выражается обыкновенной дробью. Поэтому $\sqrt{18}$ и $\sqrt{20}$ остаются иррациональными числами, хотя их можно оценить приблизительно.

4. Главная проверка

При работе с квадратными корнями важно сначала спросить: можно ли записать исходное число как квадрат целого? Если нет, то корень точно не будет рациональным.



Кубические корни как частный случай

1.

Точный куб

Для $n = 3$ кубический корень из числа a рационален только тогда, когда a является полным кубом, то есть имеет вид b^3 , где b — целое число.

2.

Типичные кубы

К полным кубам относятся 1, 8, 27, 64, 125, 216 и другие. Для них кубический корень находится сразу: $64^{(1/3)} = 4$, а $125^{(1/3)} = 5$.

3.

Нерешаемые в дробях

Если число не является полным кубом, его кубический корень не становится обыкновенной дробью. Поэтому $2^{(1/3)}$, $5^{(1/3)}$ и $18^{(1/3)}$ — иррациональные числа.

4.

Смысл признака

Кубический корень проверяют так же, как квадратный: нужно понять, есть ли у числа точный куб среди целых. Если такого числа нет, рационального значения не получится.



Связь с разложением на простые множители

Критерий показателей

Число является точной n -й степенью тогда, когда в его разложении на простые множители все показатели делятся на n . Именно этот признак позволяет быстро определить рациональность корня.

Пример 72

У числа 72 разложение $2^3 \cdot 3^2$. Показатели 3 и 2 не делятся одновременно ни на 2, ни на 3, поэтому 72 не является ни квадратом, ни кубом.

Пример 64

Число $64 = 2^6$ удобно рассматривать по-разному: оно является квадратом, кубом и четвёртой степенью. Здесь решает не само число, а делимость показателей в разложении.

Почему это работает

Разложение на простые множители показывает скрытую структуру числа. Если показатели кратны нужному n , корень извлекается точно; если хотя бы один показатель не подходит, корень остаётся иррациональным.



Степень числа и результат корня

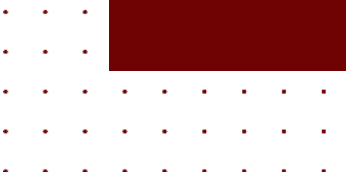
a	n	Разложение	Результат
32	5	2^5	2
81	2	3^4	9
36	2	$2^2 \cdot 3^2$	6
18	2	$2 \cdot 3^2$	иррационально

Учебные примеры по теме «Иррациональность чисел вида $a^{(1/n)}$ »

Таблица сравнивает исходное число, показатель корня и разложение на простые множители. Она показывает, что решающим является именно вид разложения, а не только величина числа.

Если показатели в разложении кратны n , корень извлекается точно. Если кратности не хватает, результат нельзя записать обыкновенной дробью.

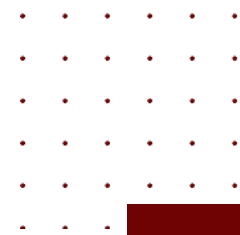
Приближённые значения иррациональных корней



На графике удобно сравнить, насколько близко эти числа расположены к целым значениям. Приближение помогает считать, но не заменяет точную запись корня.

Все показанные значения можно оценить, однако ни одно из них не выражается точной дробью. Это признаки иррациональных чисел.

Школьные приближённые значения корней, округление до двух знаков



Типичные ошибки при работе с корнями



Любой корень рационален

Ошибка в том, что корень из целого числа считают обязательно дробью или целым числом. На самом деле рациональны только корни от точных степеней, например 16 или 27.



Путают точность и приближение

Запись $\sqrt{2} \approx 1,41$ — это лишь округление. Приближённое значение удобно для вычислений, но оно не превращает иррациональное число в рациональное и не даёт точной дроби.

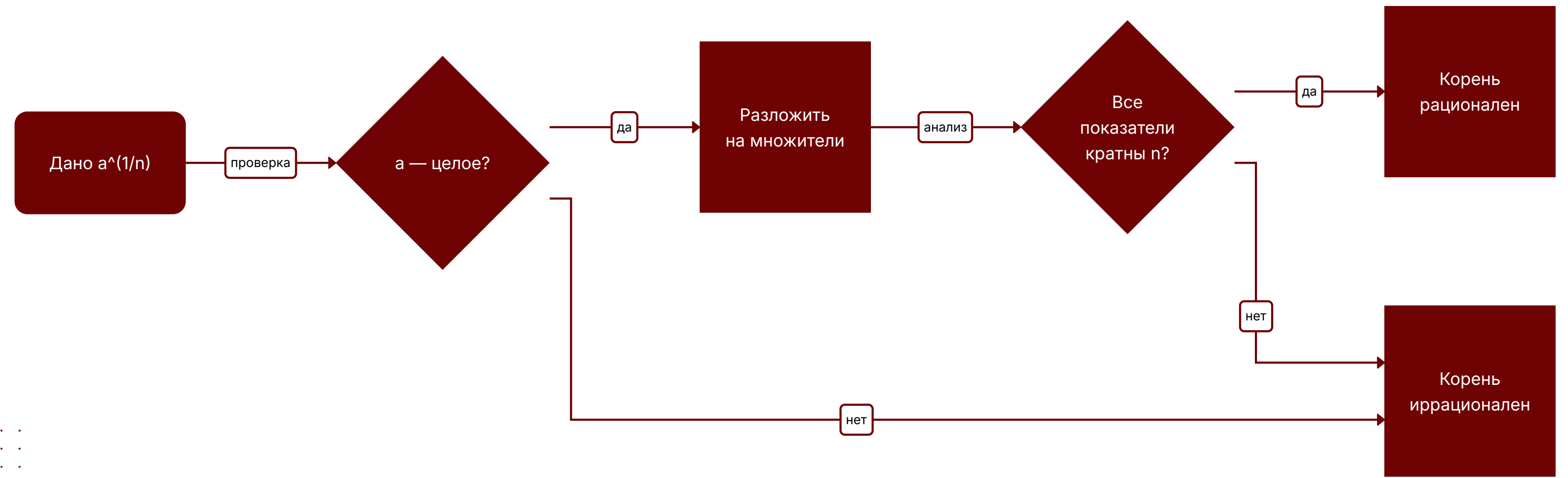


Судят по похожести

Если число выглядит близким к квадрату или кубу, это ещё ничего не значит. Рациональность зависит только от точной степени, а не от внешнего сходства или оценки на глаз.

Алгоритм решения школьных задач

Пошаговая проверка для выражений вида $a^{(1/n)}$



Где встречаются иррациональные корни



Площадь и стороны

При вычислении площади квадрата или восстановлении стороны по площади часто появляется корень. Если число не является полным квадратом, результат будет иррациональным, как у $\sqrt{2}$.



Диагонали фигур

Диагональ прямоугольника или квадрата обычно выражается через корни. Например, диагональ квадрата со стороной 1 равна $\sqrt{2}$, поэтому её нельзя записать точной дробью.



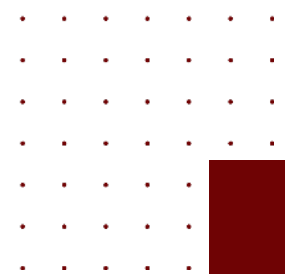
Объём куба

Когда нужно найти ребро куба по известному объёму, возникает кубический корень. Если объём не равен полному кубу, например 2 или 5, корень будет иррациональным.



Расстояния на плоскости

В геометрии и координатной плоскости расстояния часто получают с помощью корней. Поэтому иррациональные числа помогают описывать длины точнее, чем целые числа и обычные дроби.



Главные формулы и правило темы

1. Точная степень

Если a можно представить как b^n , то $a^{(1/n)}$ равно b . В этом случае корень получается точным и обязательно является рациональным числом.

2. Нет точной степени

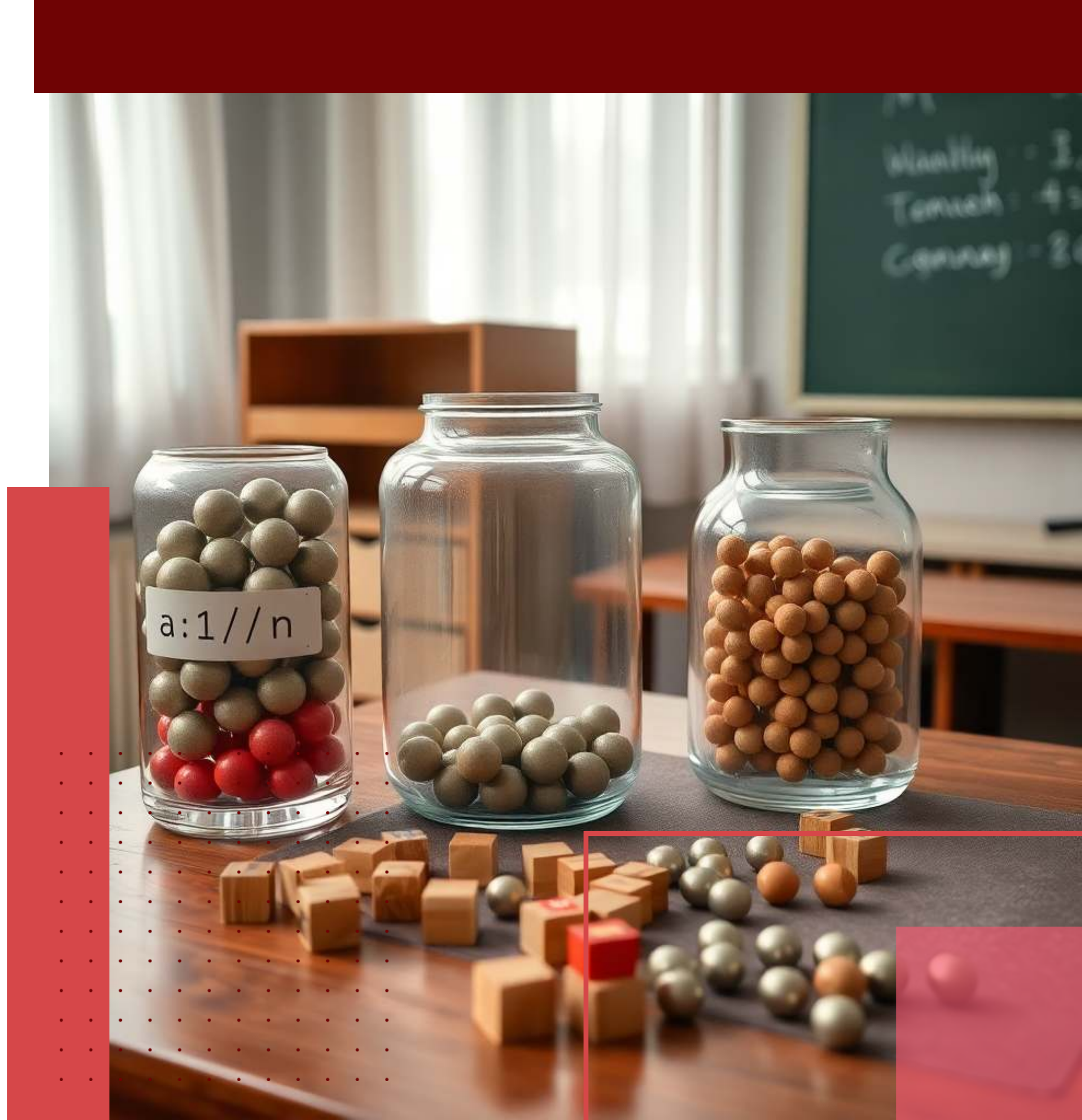
Когда число a не является точной n -й степенью, корень нельзя записать как обыкновенную дробь. Тогда $a^{(1/n)}$ — иррациональное число, даже если оно близко к целому.

3. Проверка через множители

Самый надёжный способ — разложить число на простые множители и посмотреть на показатели. Если они кратны n , корень извлекается точно; если нет, остаётся корень.

4. Чётные корни и отрицательные числа

Для чётных n в действительных числах отрицательные значения a не рассматриваются, потому что корень чётной степени из отрицательного числа не является действительным числом.



Итог: как узнать рациональный корень

Запомни главное правило: корень вида $a^{(1/n)}$ рационален только тогда, когда число a — точная n -я степень. Во всех остальных случаях получается иррациональное число, которое нужно оценивать, а не записывать дробью.