

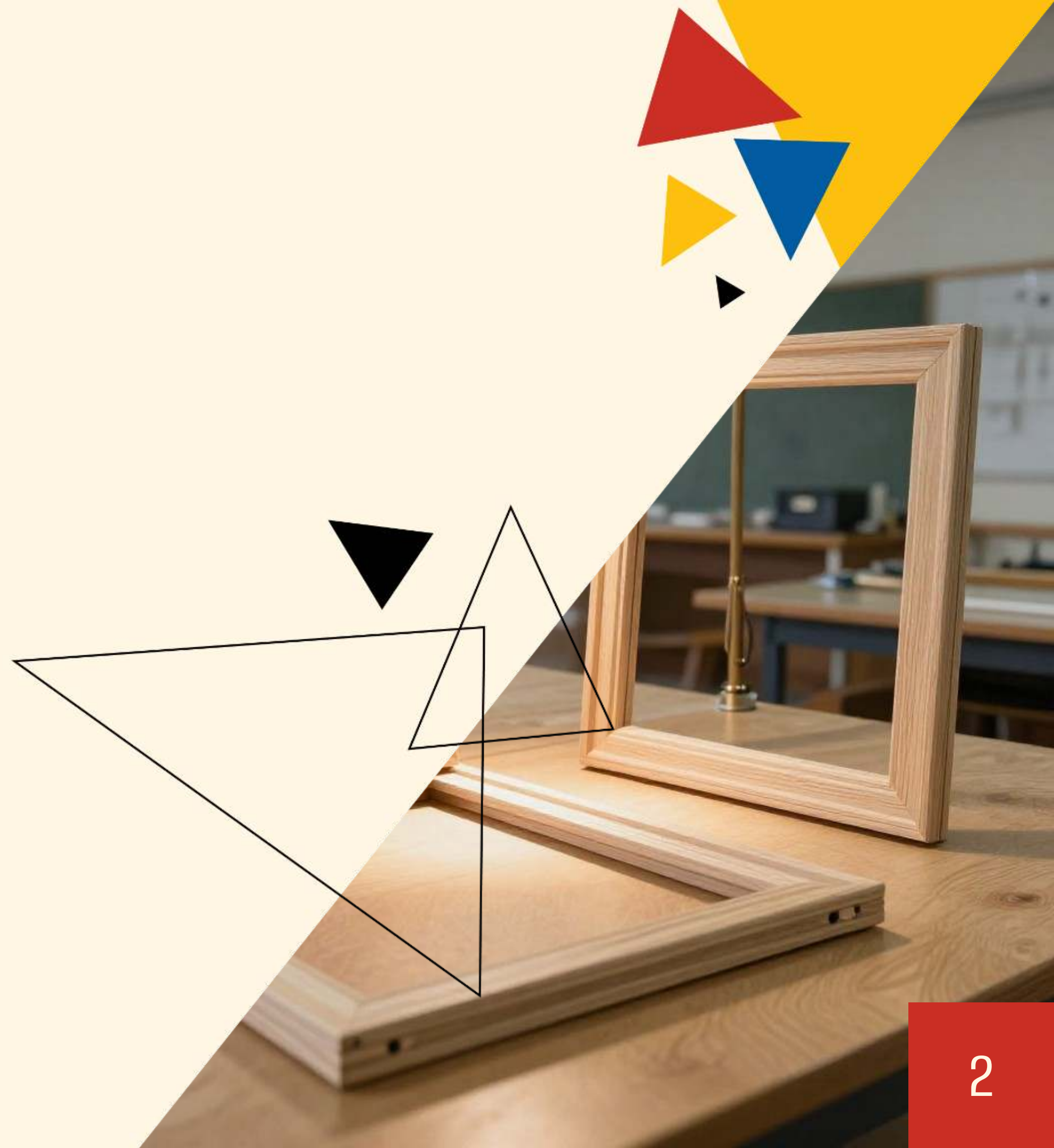
Подобие фигур и гомотетия в геометрии 9 класса

Одна форма, разные размеры: изучаем подобие
и гомотетию



Где это пригодится

Подобие помогает читать карты, чертежи и планы, строить модели и работать с изображениями. Оно связывает пропорции, масштаб и изменения длины, периметра и площади.



Что такое подобные фигуры

Одинаковая форма

Подобные фигуры сохраняют общий вид: их углы совпадают по соответствию, а различие может быть только в размере.

Пропорциональные стороны

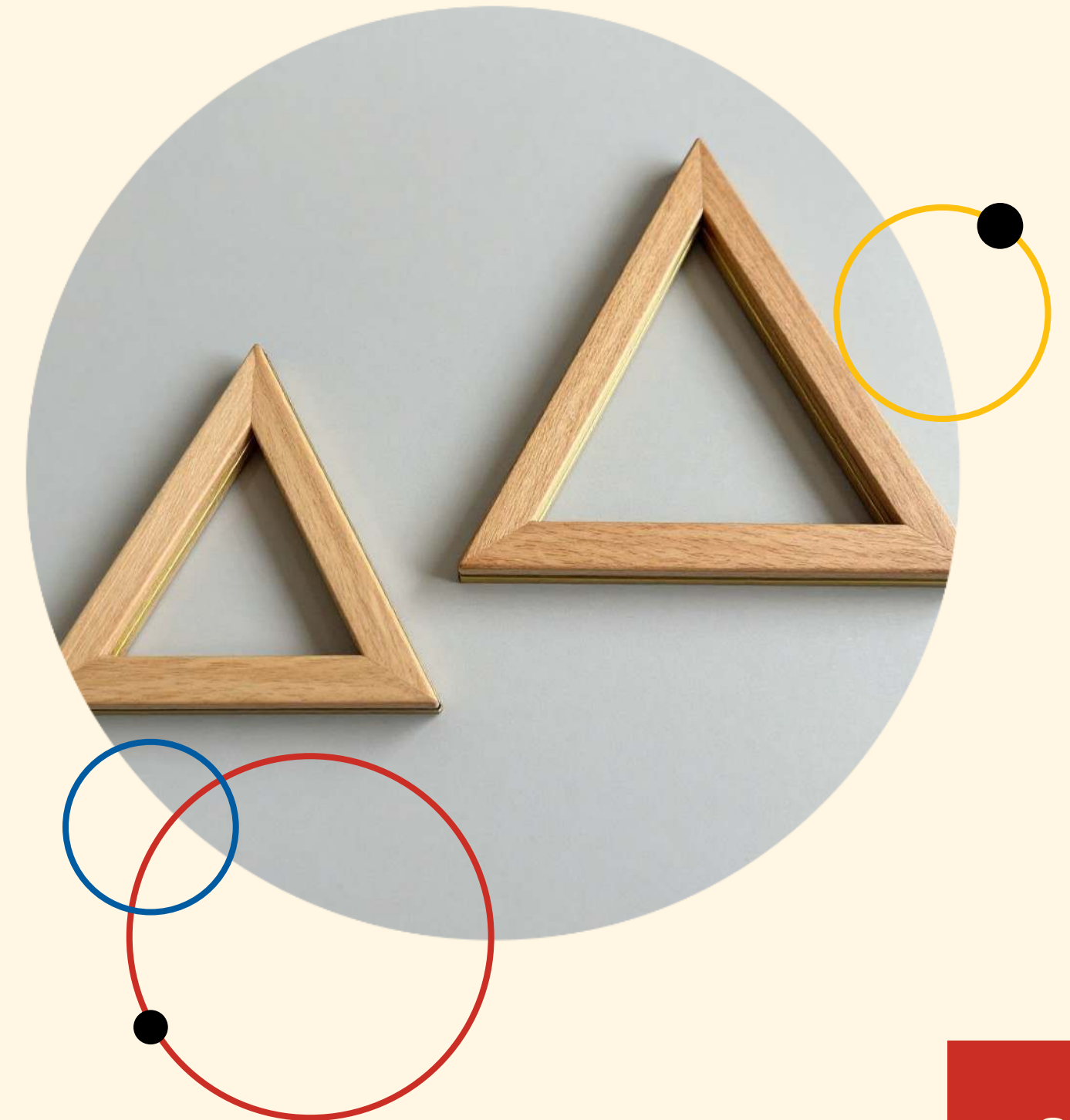
Соответствующие стороны подобных фигур находятся в одном и том же отношении, поэтому все линейные размеры изменяются одинаково.

Пример с треугольниками

Треугольники со сторонами 3, 4, 5 см и 6, 8, 10 см подобны: каждая сторона второго вдвое больше соответствующей стороны первого.

Что не меняется

При подобии сохраняются форма и углы, а меняются только размеры. Именно поэтому одну и ту же фигуру можно увидеть в разных масштабах.



Признаки подобия треугольников

1 По двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого, то треугольники подобны. Третьи углы тоже окажутся равными.

2 По двум сторонам и углу

Когда две стороны пропорциональны и угол между ними одинаков, треугольники можно сразу считать подобными без дополнительных измерений.

3 По трём сторонам

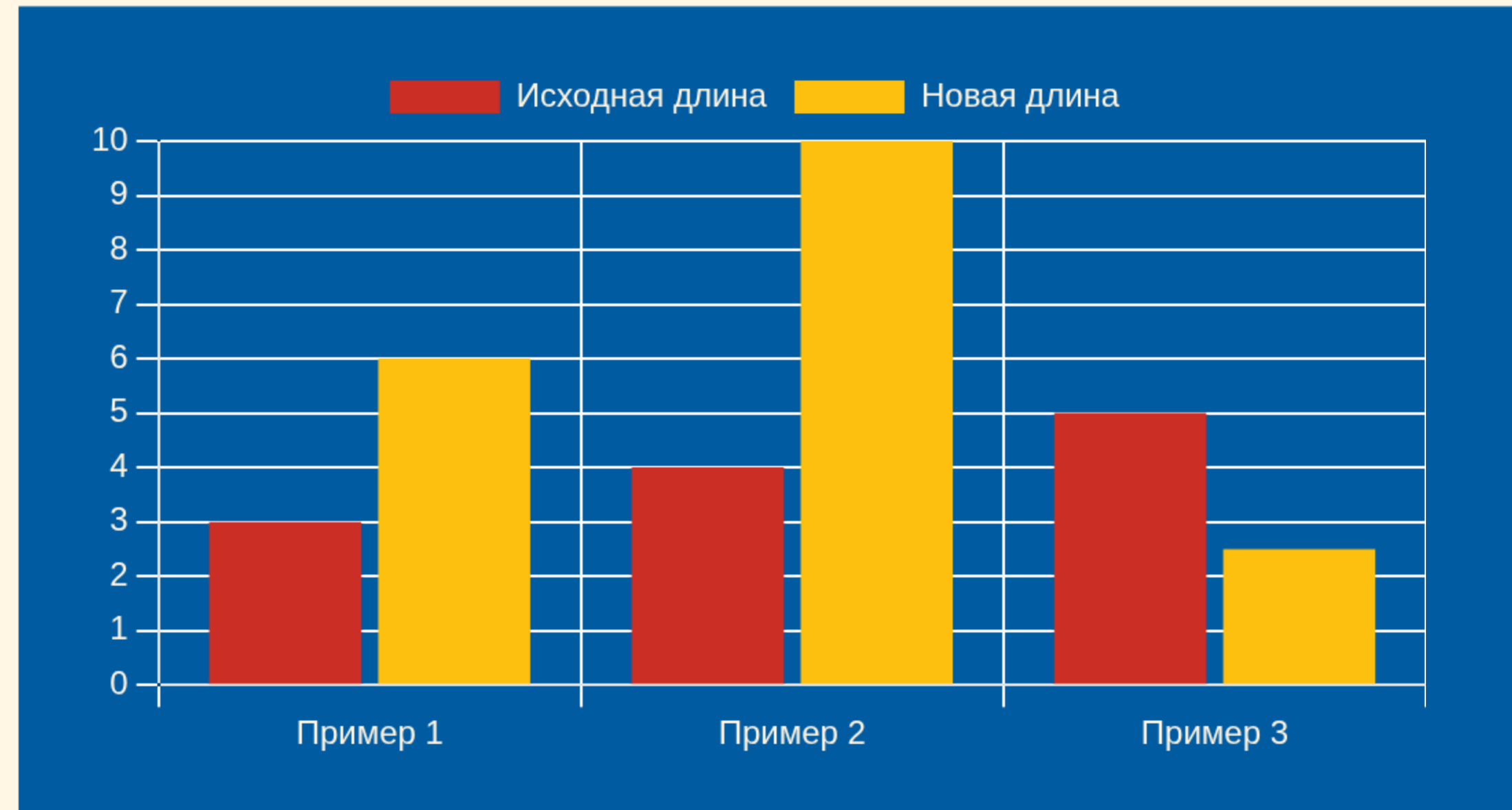
Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, это также доказывает подобие. Этот признак особенно удобен в вычислениях.



Коэффициент подобия в примерах

На диаграмме видно, как меняется длина каждого объекта после преобразования при разных коэффициентах.

Во всех примерах новая длина получается умножением на один коэффициент для соответствующей пары.



Условие задания, учебные примеры.

Гомотетия как преобразование фигуры

1 Задание преобразования

Гомотетия определяется центром и коэффициентом k . Именно они задают, где окажется каждая точка исходной фигуры после преобразования.

3 Увеличение и уменьшение

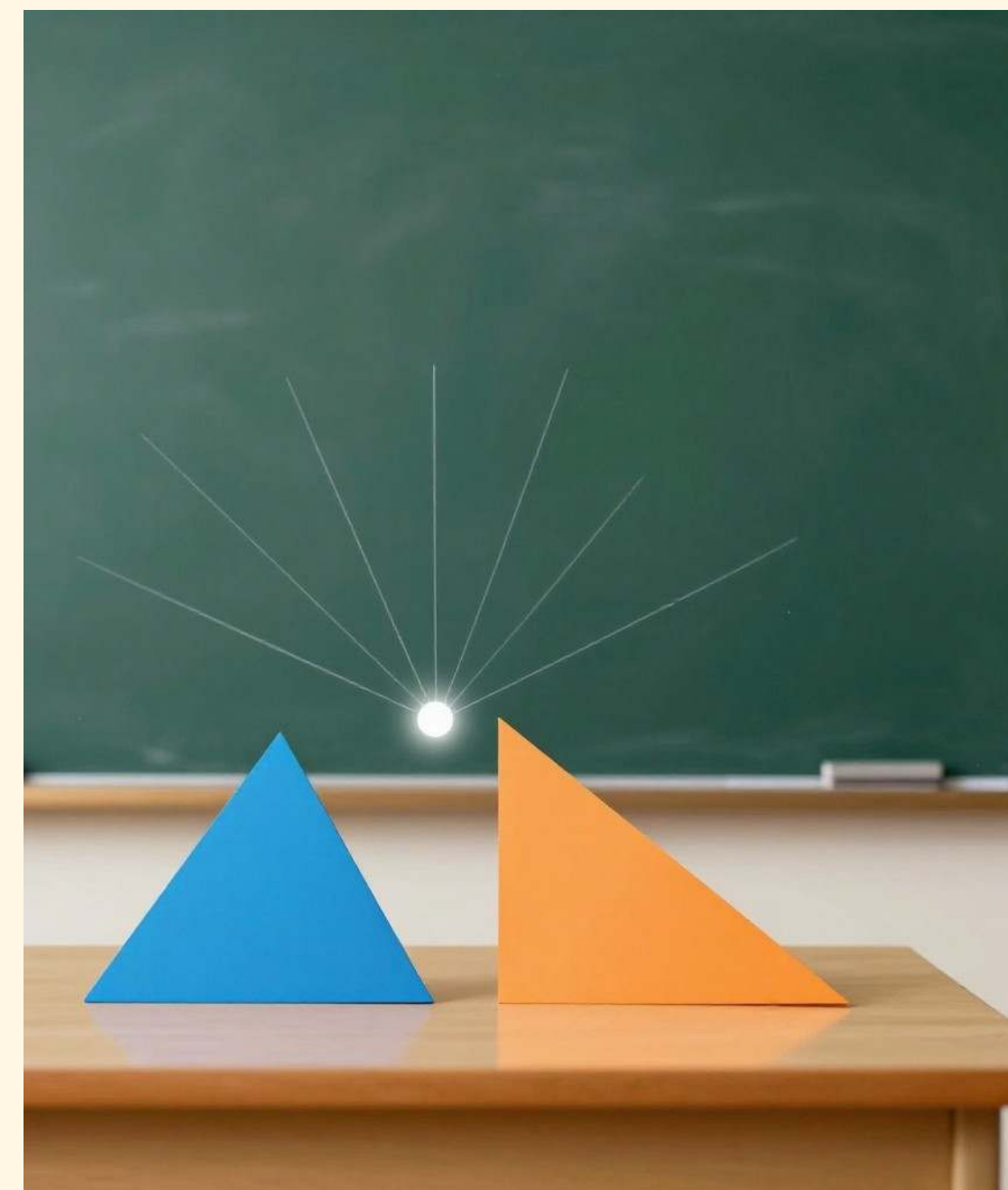
Если k больше 1, фигура увеличивается. Если 0 меньше k меньше 1, она уменьшается, но форма и углы остаются теми же.

2 Перемещение точек

Каждая точка движется по лучу, выходящему из центра. Новое расстояние от центра становится в k раз больше или меньше исходного.

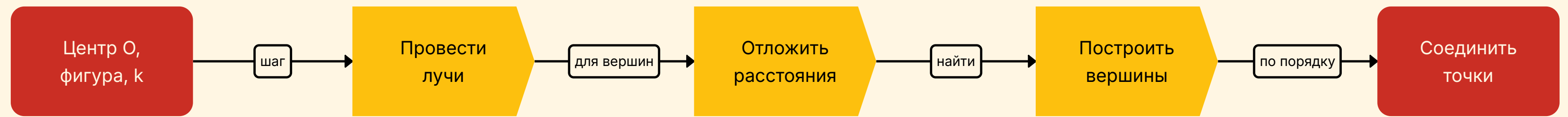
4 Отрицательный коэффициент

При отрицательном k образ строится по другую сторону от центра. Точки оказываются на противоположных лучах относительно исходной фигуры.



Построение образа при гомотетии

Последовательность построения образа фигуры с центром O и коэффициентом k



Центр гомотетии и расположение соответствующих точек

Одна прямая

Каждая пара соответствующих точек вместе с центром гомотетии лежит на одной прямой. Это помогает быстро проверить правильность построения.

Положительный коэффициент

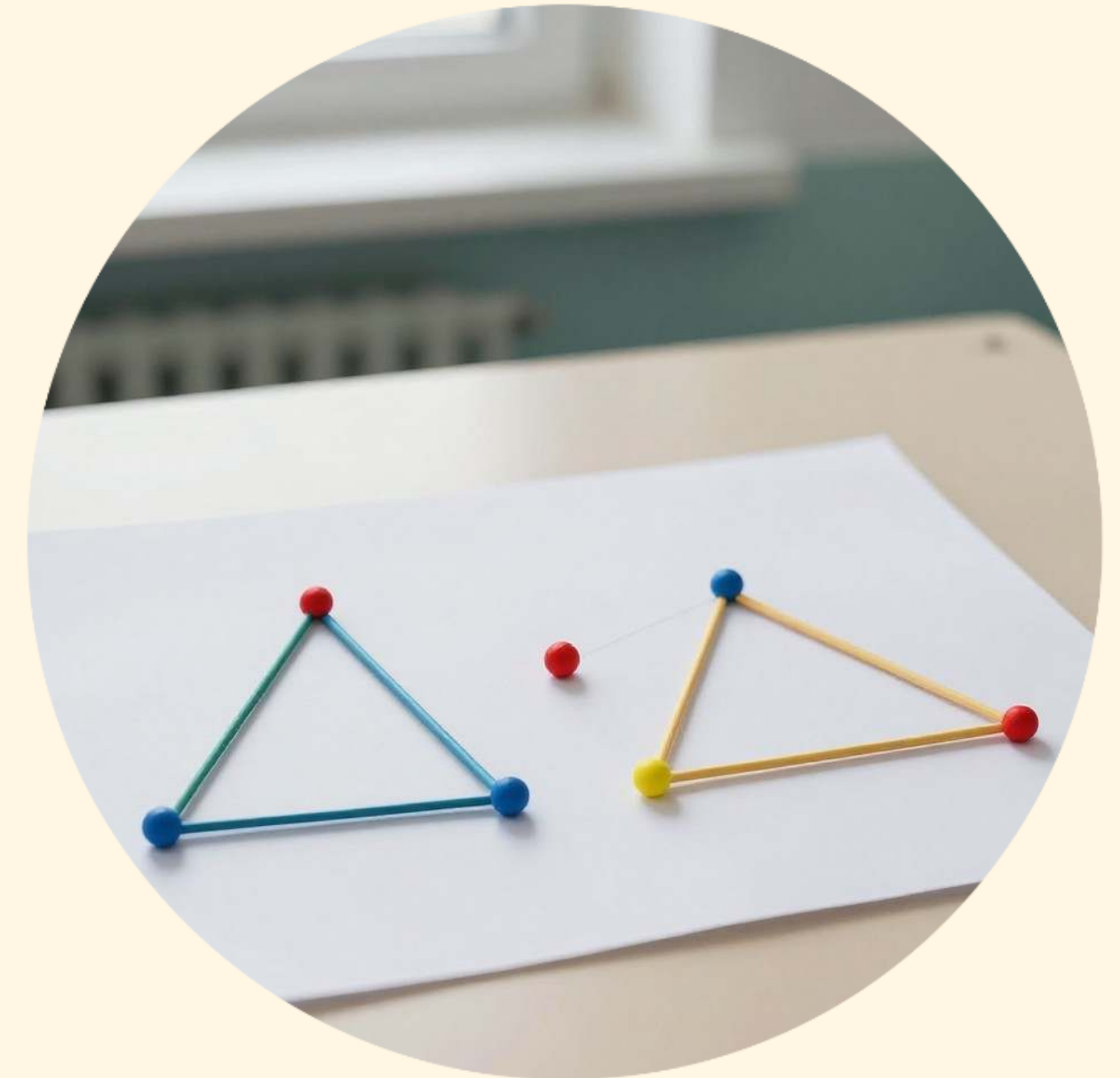
Если коэффициент положительный, исходная точка и её образ находятся на одном луче от центра. Фигура сохраняет направление расположения вершин.

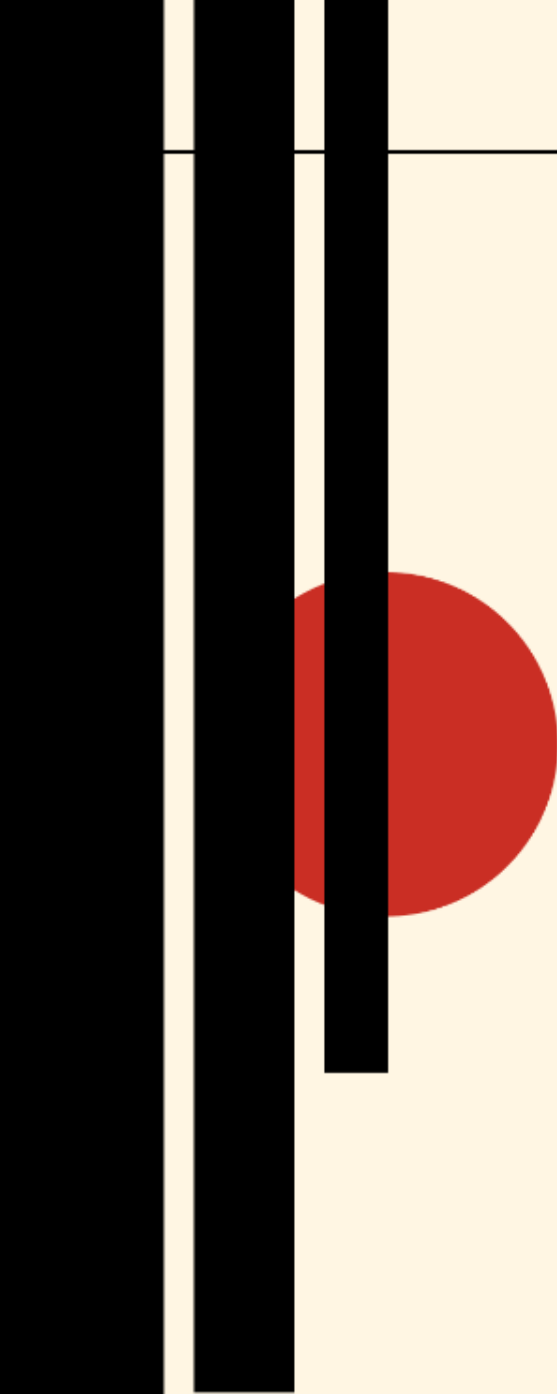
Отрицательный коэффициент

При отрицательном коэффициенте точки переходят на противоположные лучи. Тогда образ оказывается как бы перевёрнутым относительно центра.

Наглядность схемы

Такая схема позволяет увидеть не только изменение размеров, но и связь между центром, направлением лучей и положением образа фигуры.

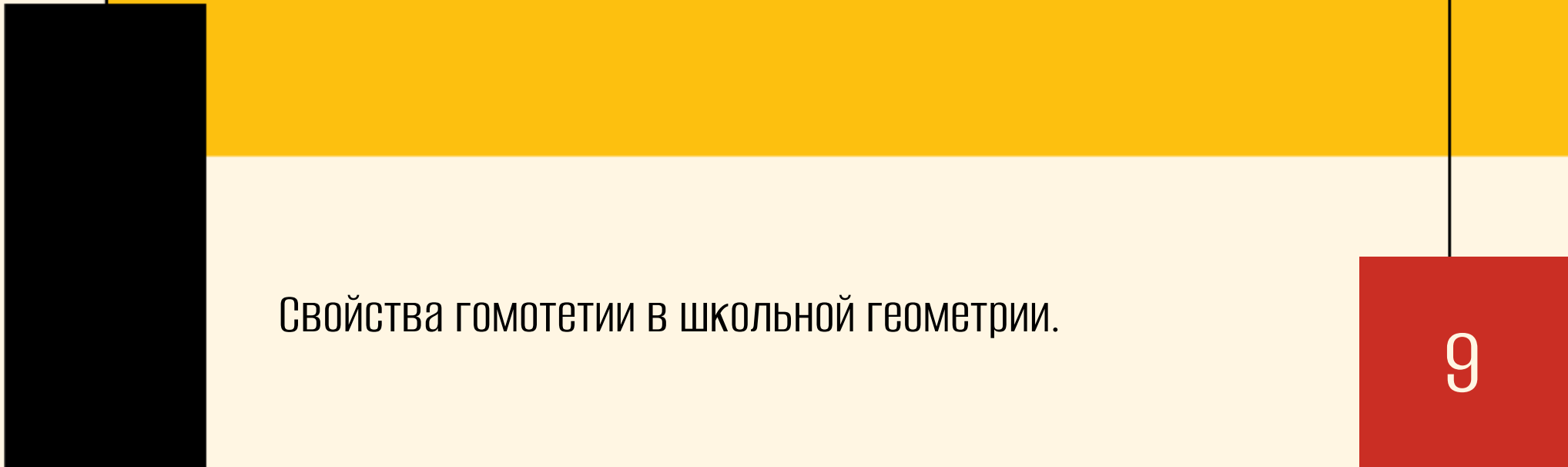




Если длины меняются в k раз,
то площадь меняется гораздо
сильнее — по квадрату
коэффициента. Поэтому увеличение
быстро заметно на рисунке.



k^2
показывает,
как изменяется площадь
при гомотетии.



Свойства гомотетии в школьной геометрии.

Сравнение фигур и коэффициентов подобия

В таблице показано, как связаны исходная длина, новая длина и коэффициент подобия в простых примерах.

Один коэффициент задаёт масштаб всей фигуры: все соответствующие размеры изменяются одинаково.

Объект	Было	Стало	k
Отрезок	4 см	10 см	2,5
Квадрат	3 см	6 см	2
Треугольник	5 см	2,5 см	0,5

Как находят коэффициент подобия

1 Берут соответствующие стороны

Сначала находят пару сторон, которые отвечают друг другу в двух фигурах. Для подобных фигур отношение любой такой пары всегда одно и то же, независимо от выбранного отрезка.

2 Составляют отношение длин

Если одна сторона равна 8 см, а соответствующая ей сторона — 12 см, то коэффициент подобия равен $12/8 = 1,5$. Это означает увеличение в полтора раза.

3 Проверяют несколько пар

Одного отношения недостаточно: нужно сравнить ещё несколько соответствующих сторон. У подобных фигур все полученные дроби совпадают, поэтому коэффициент остаётся одинаковым для всей фигуры.

4 Делают вывод о подобии

Если хотя бы одно отношение отличается от остальных, фигуры не являются подобными. Такой проверкой удобно пользоваться в задачах, где нужно быстро подтвердить или опровергнуть подобие.



Подобие прямоугольников и квадратов

Прямоугольники и отношения сторон

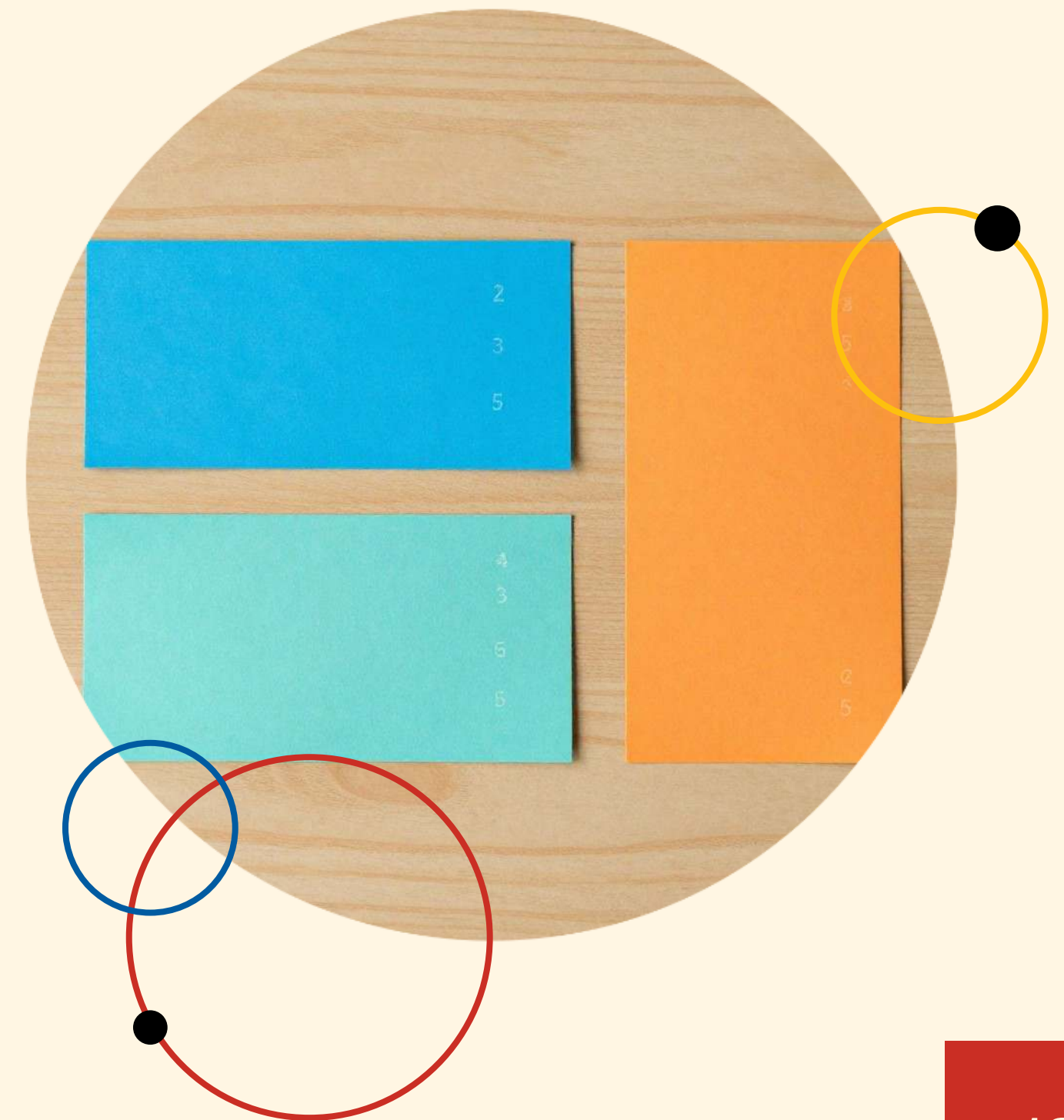
Для прямоугольников решающим является отношение длины и ширины. Если оно одинаково у двух фигур, то прямоугольники подобны, даже если их размеры заметно различаются.

Пример и контрпример

Прямоугольник 2 см × 3 см подобен прямоугольнику 4 см × 6 см, потому что отношения сторон равны. А прямоугольник 4 см × 5 см уже не подходит.

Почему квадраты всегда подобны

У любого квадрата все стороны равны, а все углы прямые. Поэтому два квадрата совпадают по форме и отличаются только размером, то есть всегда подобны между собой.



Где встречается подобие фигур

Подобие особенно важно там, где нужно передавать объект в другом масштабе, сохраняя форму и пропорции.

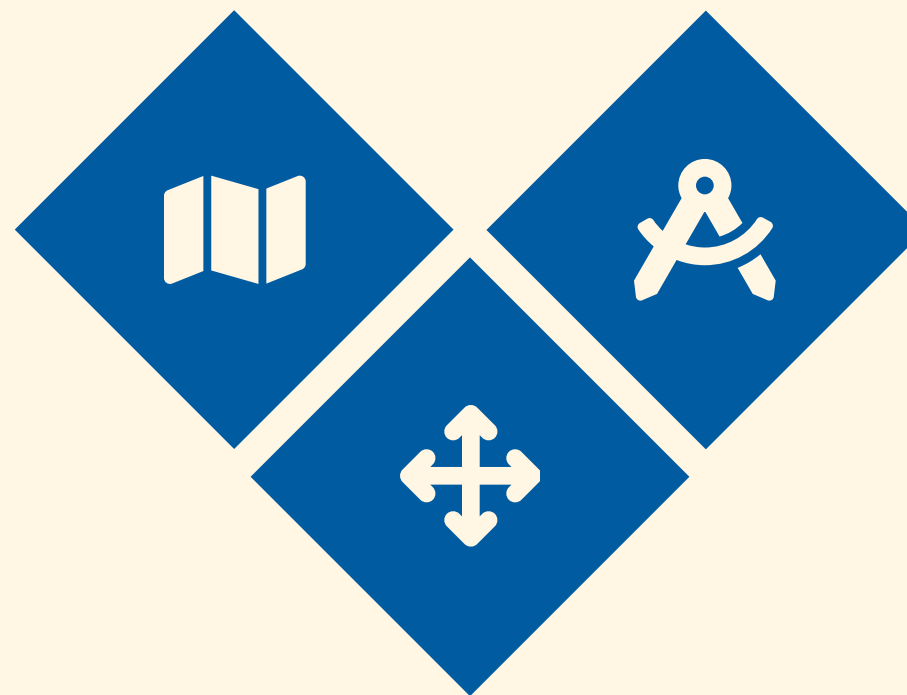
Больше всего примеров связано с картами и моделями: именно они наглядно показывают работу масштаба и преобразования размеров.



Масштаб и гомотетия

Масштаб на плане

Запись 1:1000 означает, что 1 см на плане соответствует 1000 см на местности, то есть 10 м. Это практический способ показать уменьшение без потери формы.



Связь с коэффициентом

Масштаб можно рассматривать как коэффициент подобия в записи для чертежей и карт. Он показывает, во сколько раз все длины увеличены или уменьшены относительно оригинала.

Применение в изображениях

При увеличении рисунка масштаб указывает, насколько выросли все отрезки. При уменьшении он помогает точно восстановить, как выглядел бы объект в натуральную величину.

Как решают задачи на подобие фигур

1 Находят соответствия

Сначала определяют, какие углы, стороны и вершины в двух фигурах соответствуют друг другу. Без этого невозможно правильно составить отношения и сравнить фигуры.

3 Вычисляют неизвестное

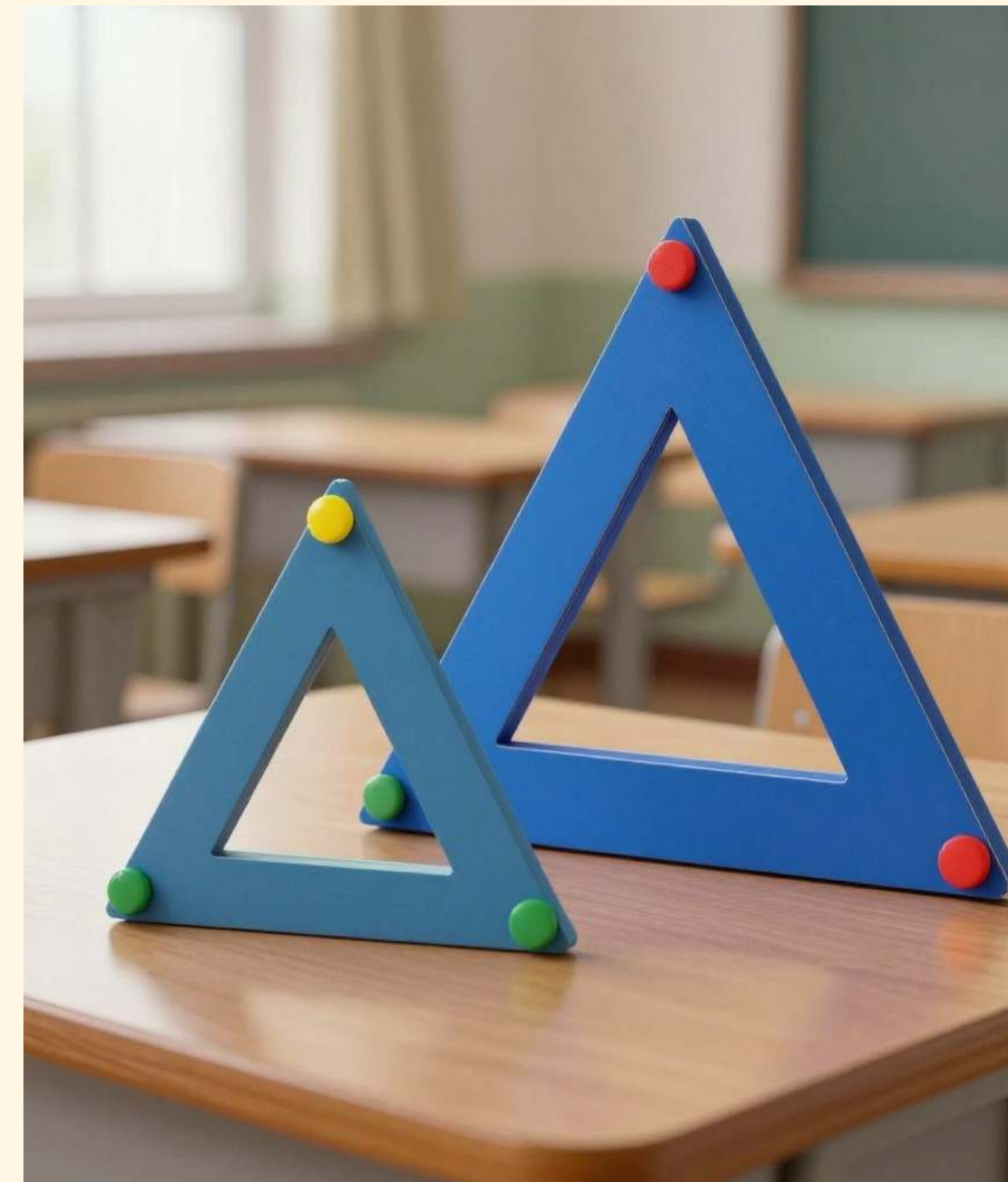
После проверки подставляют коэффициент в пропорцию и находят длину, периметр или площадь. Для площади важно помнить, что она изменяется не так, как стороны.

2 Проверяют коэффициент

Затем составляют отношения соответствующих сторон и смотрят, совпадают ли они. Если все отношения одинаковы, можно говорить о подобии и использовать коэффициент для дальнейших вычислений.

4 Учитывают признаки треугольников

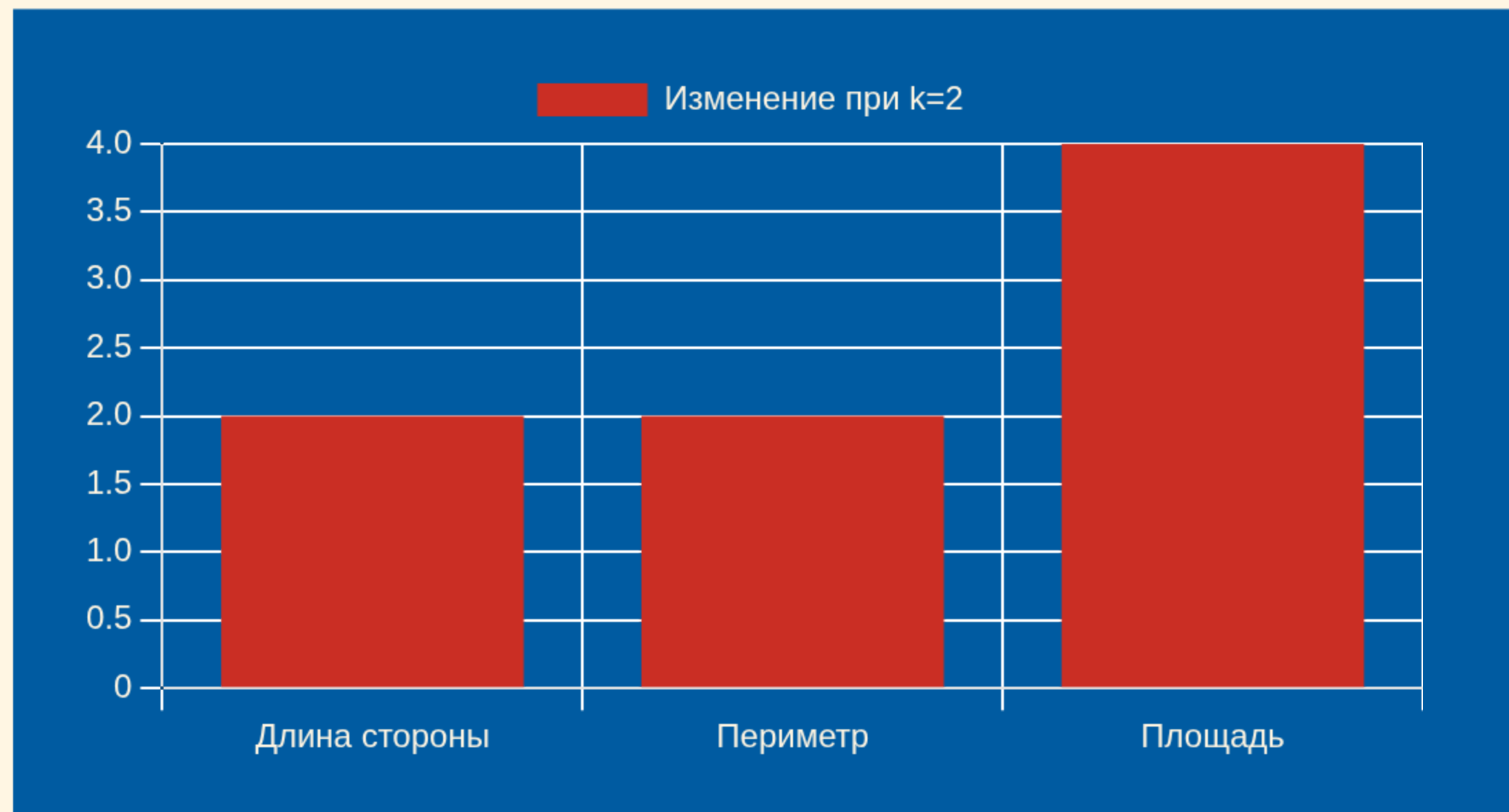
В задачах с треугольниками особенно полезно помнить три признака подобия. Они позволяют доказать результат даже тогда, когда известны не все стороны фигуры.



Что меняется при увеличении в 2 раза

Одинаковый коэффициент по-разному влияет на длины и площади, поэтому нельзя судить о росте фигуры только по одному измерению.

При удвоении размеров линейные величины растут в 2 раза, а площадь — в 4 раза, то есть быстрее и заметнее.



Типичные ошибки при определении подобия

Судят по виду

Иногда фигуры считают подобными только потому, что они похожи внешне. На самом деле нужно проверять углы и отношения сторон, а не полагаться на общий силуэт.

Путают с равенством

Равные фигуры имеют одинаковые размеры, а подобные могут быть больше или меньше. Если не отличать эти понятия, легко сделать неверный вывод о совпадении фигур.

Неверно выбирают стороны

Ошибка часто возникает при сравнении неправильных пар сторон. Соответствующие элементы нужно выбирать аккуратно, иначе отношение длин не даст правильного коэффициента подобия.

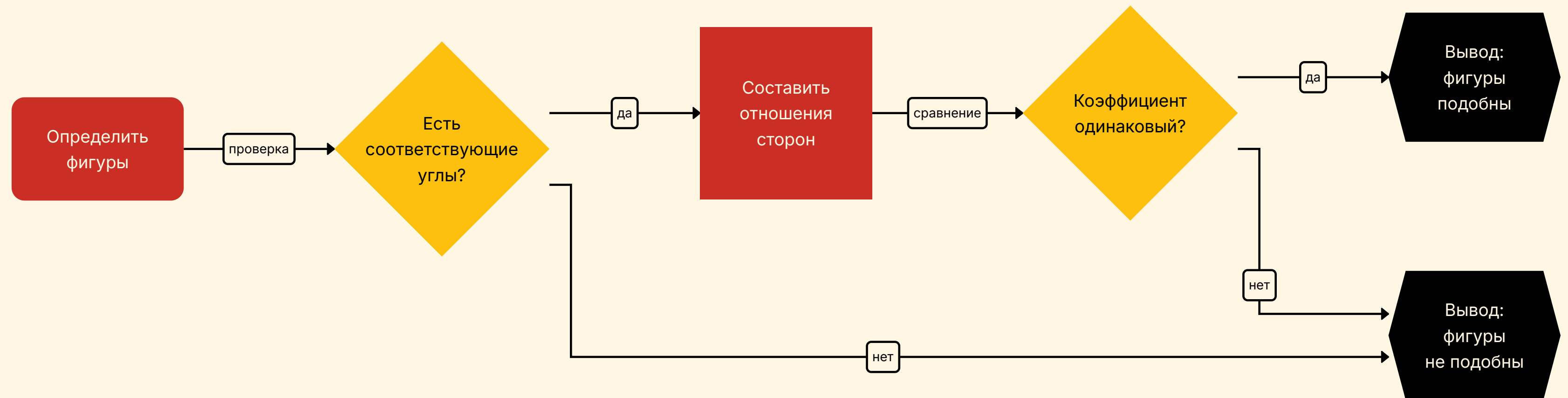
Не проверяют все отношения

Если совпало только одно отношение, этого недостаточно. Для подтверждения подобия нужно убедиться, что все соответствующие стороны дают один и тот же результат.



Проверка подобия шаг за шагом

Последовательность проверки фигуры на подобие и выбор признака для треугольников

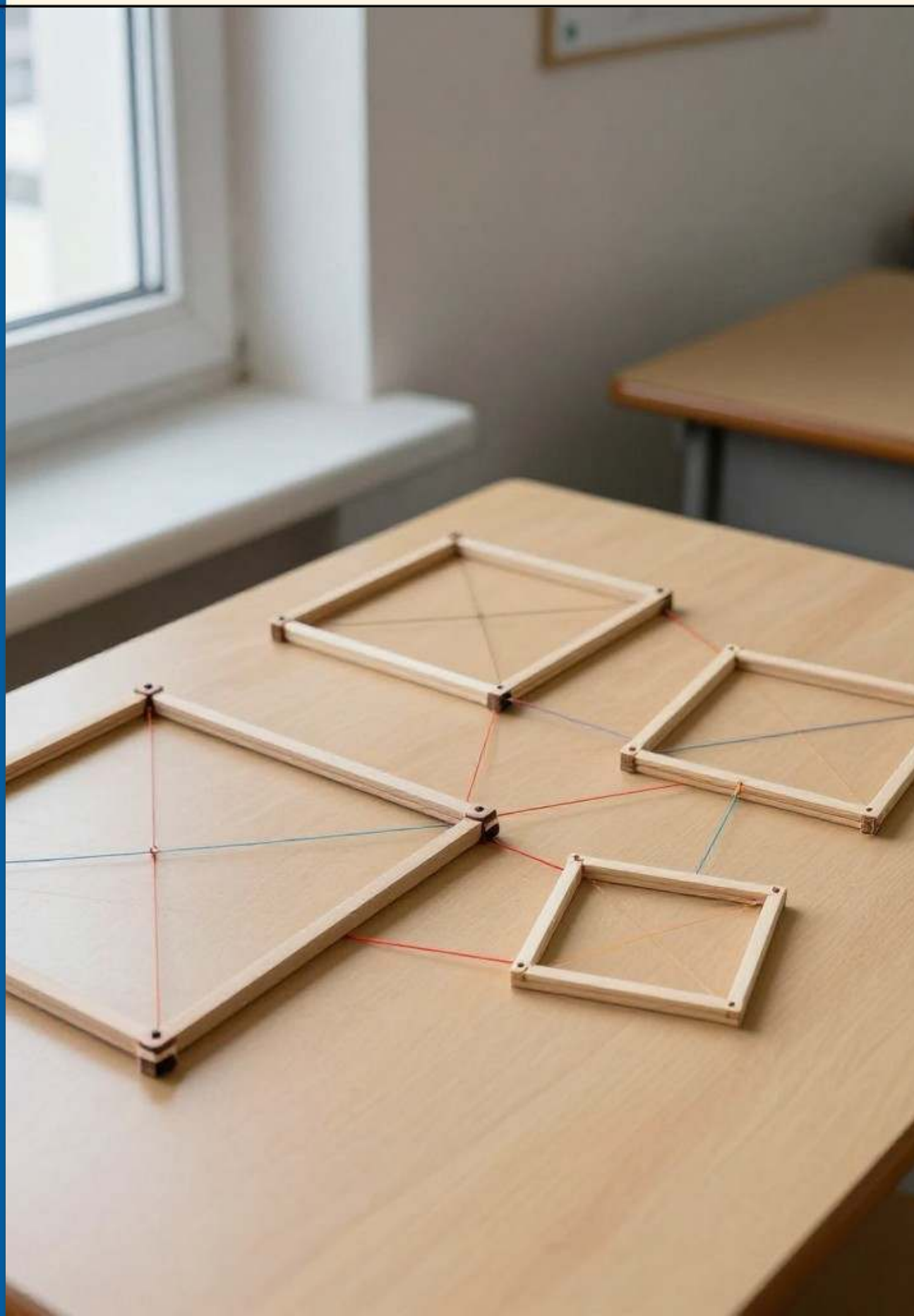


Ключевые формулы темы

Таблица показывает основные зависимости между длинами, периметром, площадью и гомотетией.

Длины и периметры изменяются одинаково, а площадь растёт или уменьшается значительно быстрее, потому что зависит от квадрата коэффициента.

Понятие	Формула	Смысл
Коэффициент	$k = a_2/a_1$	Отношение сторон
Периметр	$P_2 = k \cdot P_1$	Меняется линейно
Площадь	$S_2 = k^2 \cdot S_1$	Меняется по квадрату
Гомотетия	$OA' = k \cdot OA$	Расстояние от центра



Подобие и гомотетия помогают видеть геометрию в жизни

Эти понятия объясняют, как одна и та же форма может существовать в разных размерах. Они нужны для карт, чертежей, моделей и точных измерений, а в задачах помогают уверенно находить неизвестные величины.