

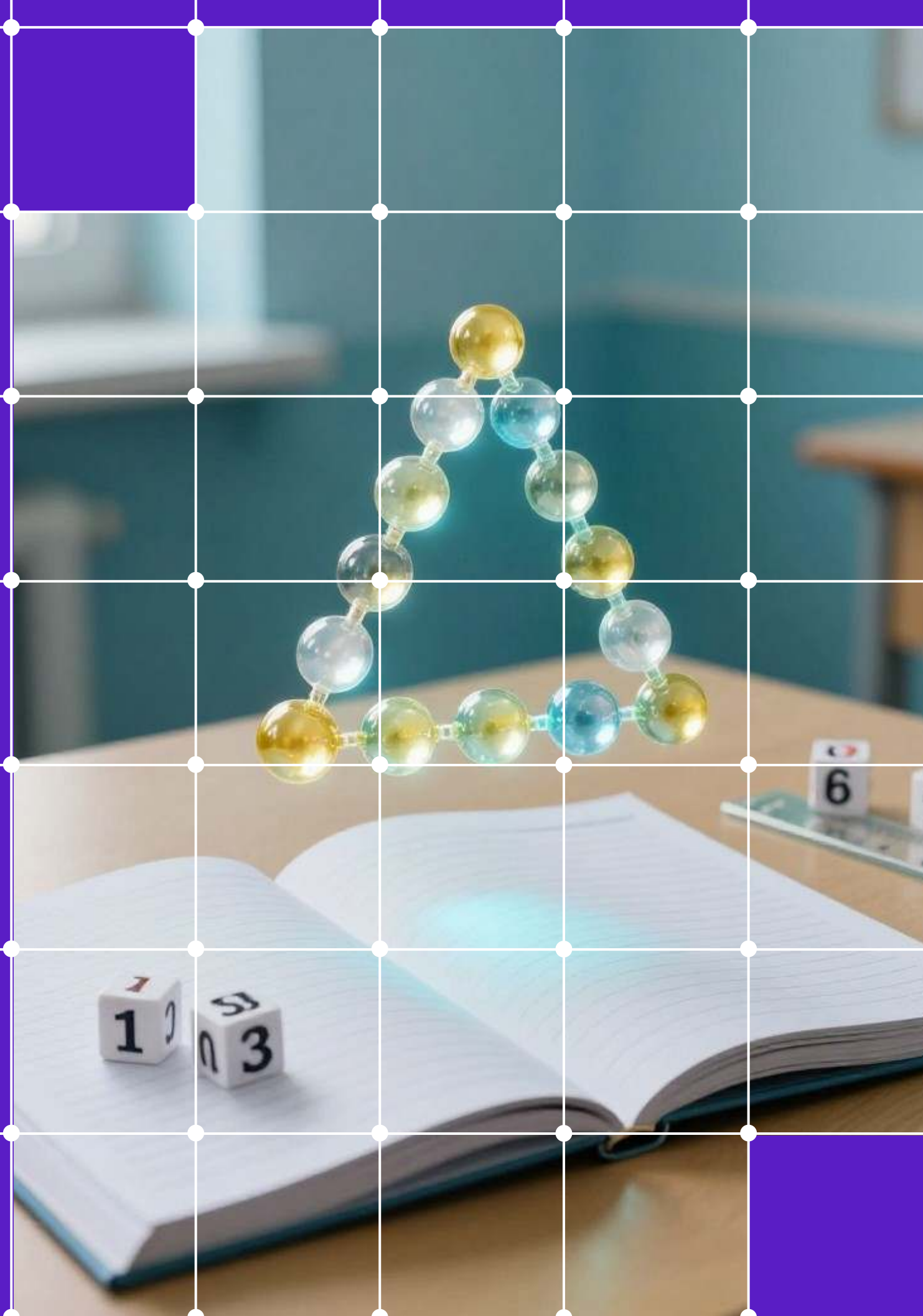
Бином Ньютона и треугольник Паскаля: главная связь

Связь коэффициентов разложения и чисел треугольника Паскаля.



Откуда взялись треугольник Паскаля и биномиальная формула

Треугольник Паскаля известен задолго до Блеза Паскаля и помогает быстро находить коэффициенты, сочетания и закономерности в числах.



Зачем нужен бином Ньютона

1.

Частый вид выражений

Выражения вида $(a+b)^n$ встречаются в алгебре, вероятностях и вычислениях. Биномиальная формула помогает раскрывать скобки быстро и без длинного перемножения.

2.

Быстрее, чем умножение

Она заменяет много шагов одним понятным правилом. Вместо ручного умножения можно сразу записать все члены разложения и их коэффициенты.

3.

Не случайный узор

Коэффициенты не выбираются случайно: они образуют устойчивый порядок, который повторяется для любой степени n и связан с треугольником Паскаля.

4

Удобный инструмент

Поэтому бином Ньютона удобно использовать не только в алгебре, но и там, где нужно увидеть структуру выражения целиком.

Почему появляются коэффициенты

1. Выбор из множителей

При раскрытии $(a+b)^n$ в каждом из n множителей нужно выбрать либо a , либо b . От числа таких выборов и зависят коэффициенты.

2. Сколько раз повторяется

Одинаковые по виду слагаемые складываются вместе. Их количество становится коэффициентом перед соответствующим членом разложения.

3. Зависимость только от n

Поэтому набор коэффициентов определяется только степенью n . Буквы a и b могут быть разными, но сама схема остаётся той же.

$C(n, k)$

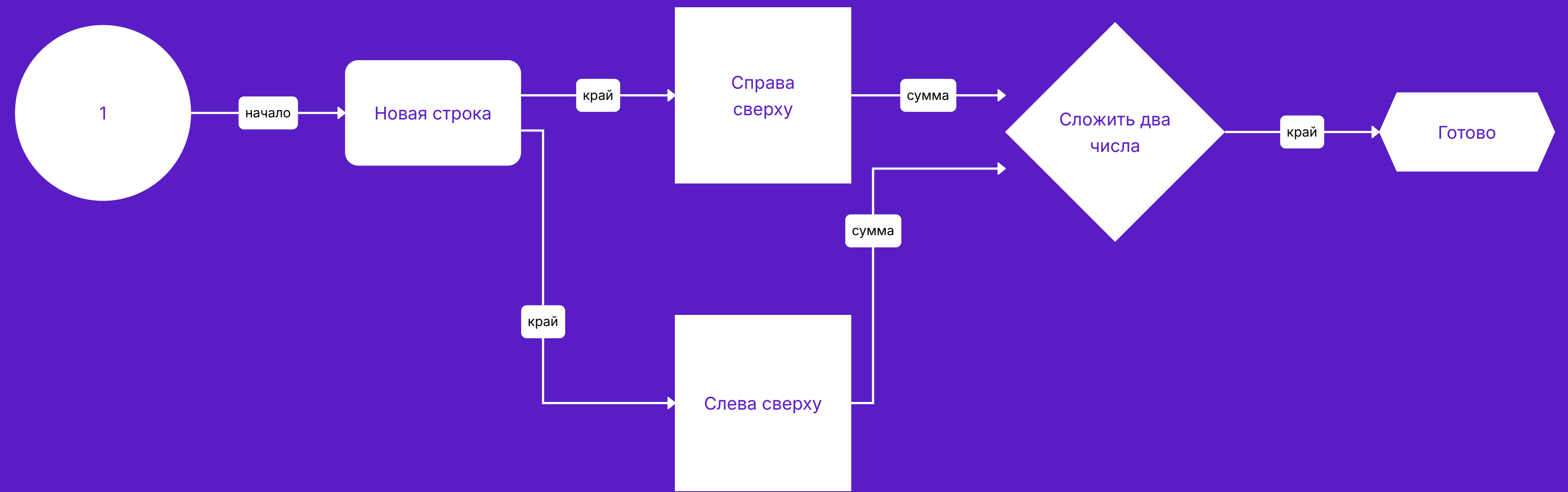
**читается как «n по k»
и встречается в каждом
коэффициенте разложения.**

Определение сочетаний в комбинаторике

Число сочетаний показывает, сколько способов выбрать k элементов из n без учета порядка; именно оно стоит в строках треугольника Паскаля.

Как строится треугольник Паскаля

Каждое число внутри строится из двух чисел над ним, а края всегда равны 1.



Первые строки и симметрия

Строка	Числа
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

Первые строки треугольника Паскаля

Первые строки быстро показывают правило построения и симметрию чисел.

Числа зеркально повторяются слева и справа, потому что $C(n, k) = C(n, n - k)$.

Как читать строку n

1.

Строка как ключ

Строка n в треугольнике Паскаля содержит все коэффициенты для разложения $(a+b)^n$. Поэтому достаточно найти нужную строку, чтобы увидеть всю схему сразу.

2.

Примеры строк

В строке 4 стоят числа 1, 4, 6, 4, 1, а в строке 5 — 1, 5, 10, 10, 5, 1. Они идут без пропусков.

3.

Порядок чтения

Читать строку нужно слева направо, как разложение: сначала степень a самая большая, затем она уменьшается на 1 в каждом следующем члене.

4

Изменение степени b

Одновременно степень b растет от 0 до n. Это делает запись аккуратной и помогает быстро проверять правильность каждого члена.

Связь треугольника и разложения

1. Та же строка

Коэффициенты в формуле $(a+b)^n$ совпадают с числами строки n треугольника Паскаля. Именно поэтому одна и та же строка помогает сразу записать разложение.

2. Степень a убывает

Первый член всегда содержит a^n , а дальше степень a уменьшается на 1. Так строится последовательность: a^n , $a^{(n-1)}b$, $a^{(n-2)}b^2$ и так далее.

3. Степень b растет

Степень b , наоборот, увеличивается от 0 до n . Из-за этого каждый следующий член отличается от предыдущего одним дополнительным множителем b .

4. Готовый шаблон

Когда коэффициенты и степени записаны вместе, получается полный и упорядоченный вид разложения. Формула становится похожей на готовый шаблон.

4

**члена появляется
при раскрытии скобок, потому
что степень на единицу
меньше их количества.**

Бином Ньютона для $(a+b)^3$

В разложении степени 3 получается четыре слагаемых: коэффициенты берутся из строки 3 треугольника Паскаля.

6

Это самый большой
коэффициент в разложении
 $(a+b)^4$.

Строка 4 треугольника Паскаля, связанная с биномиальным разложением $(a+b)^4$

Центральный коэффициент в строке 4 показывает,
как распределяются члены разложения.

6

Именно столько членов
содержит разложение
 $(a+b)^5$.

Строка 5 треугольника Паскаля, связанная с биномиальным разложением
 $(a+b)^5$

Строка 5 даёт шесть коэффициентов, и они снова образуют симметричный ряд.

8

Такой вклад даёт первый
член в разложении $(2x+3)^3$.

Разложение $(2x+3)^3$ по биному Ньютона

При подстановке чисел коэффициенты строки Паскаля
умножаются на степени выражений, а не остаются
просто числами из строки.

Сумма коэффициентов и степень двойки

Если подставить вместо букв 1 и 1, каждый коэффициент складывается в общую сумму без изменений.

Сумма коэффициентов растёт как 2^n , поэтому каждая следующая строка удваивает общий итог.



Биномиальная формула: сумма коэффициентов при $a=1$ и $b=1$

3

**Для этой степени
чередование знаков видно
уже в четырёх слагаемых.**

Разложение $(a-b)^3$ по биному Ньютона

В разложении с минусом знаки меняются через один,
но числа из строки Паскаля остаются теми же.

Диагонали треугольника Паскаля

Диагональ единиц

Крайняя левая диагональ состоит только из единиц. Она показывает, что у каждого разложения есть первые и последние одинаковые коэффициенты, независимо от степени.

Натуральные числа

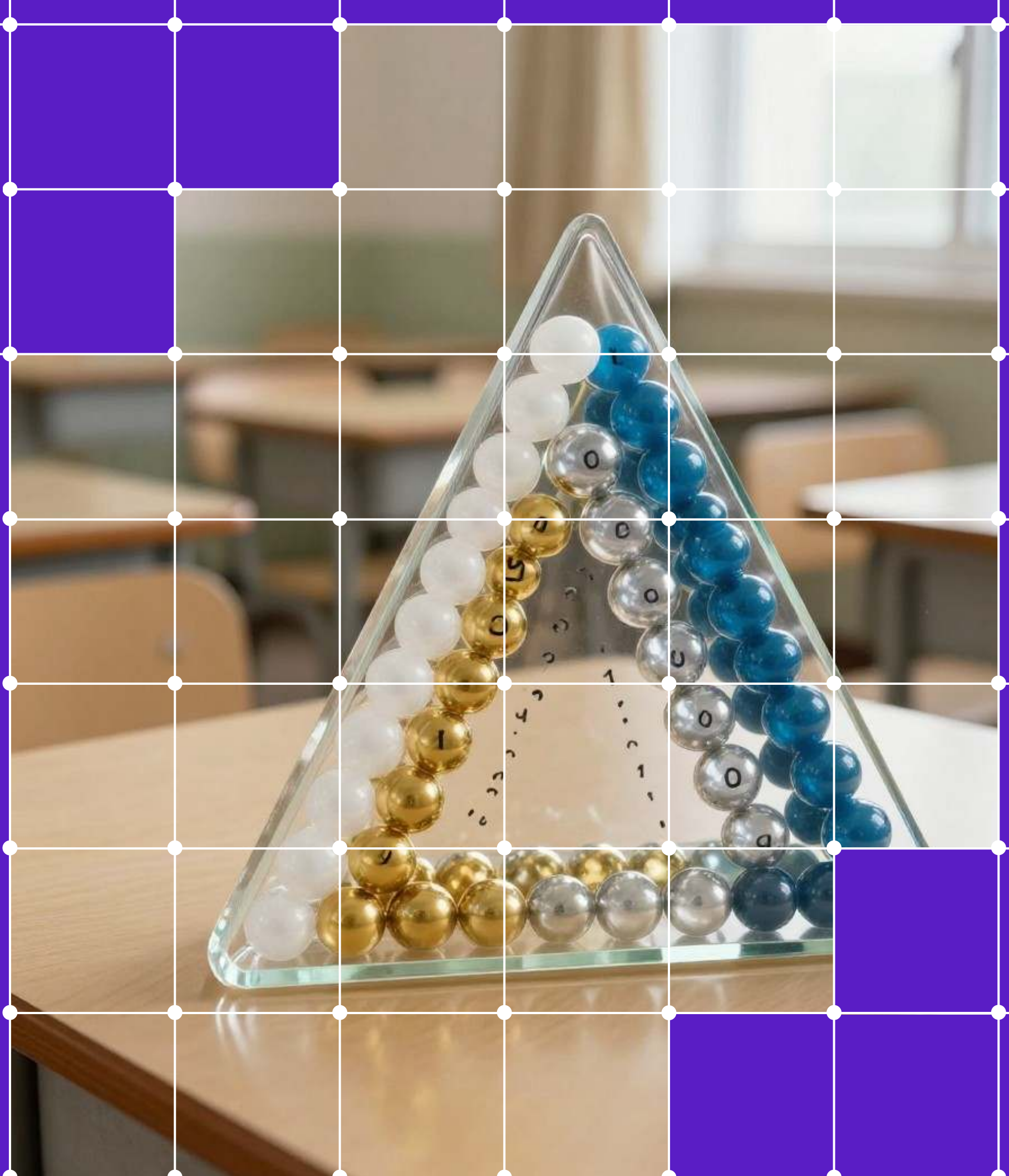
Следующая диагональ даёт натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5. Этот ряд удобно замечать в треугольнике и использовать как проверку правильности построения.

Треугольные числа

Третья диагональ образует треугольные числа: 1, 3, 6, 10. Они связаны с подсчётом точек в треугольных фигурах и отражают накопление сумм.

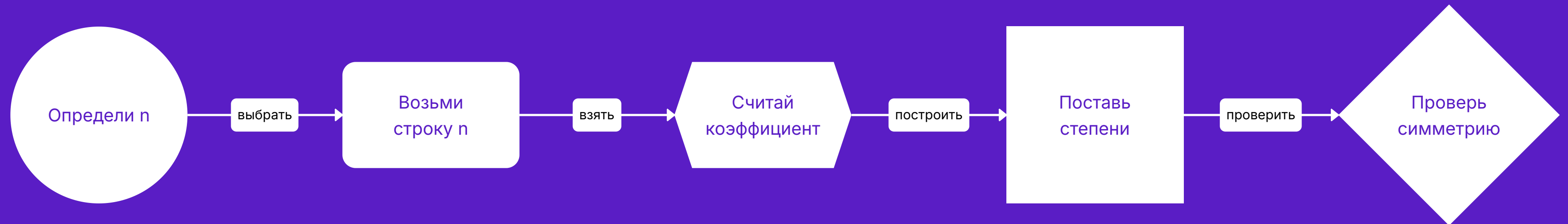
Тетраэдрические числа

Ещё одна диагональ содержит тетраэдрические числа: 1, 4, 10, 20. Так треугольник Паскаля соединяет двумерные и трёхмерные числовые закономерности.



Как найти коэффициент или собрать разложение

Алгоритм связывает степень, строку треугольника и нужный коэффициент разложения.



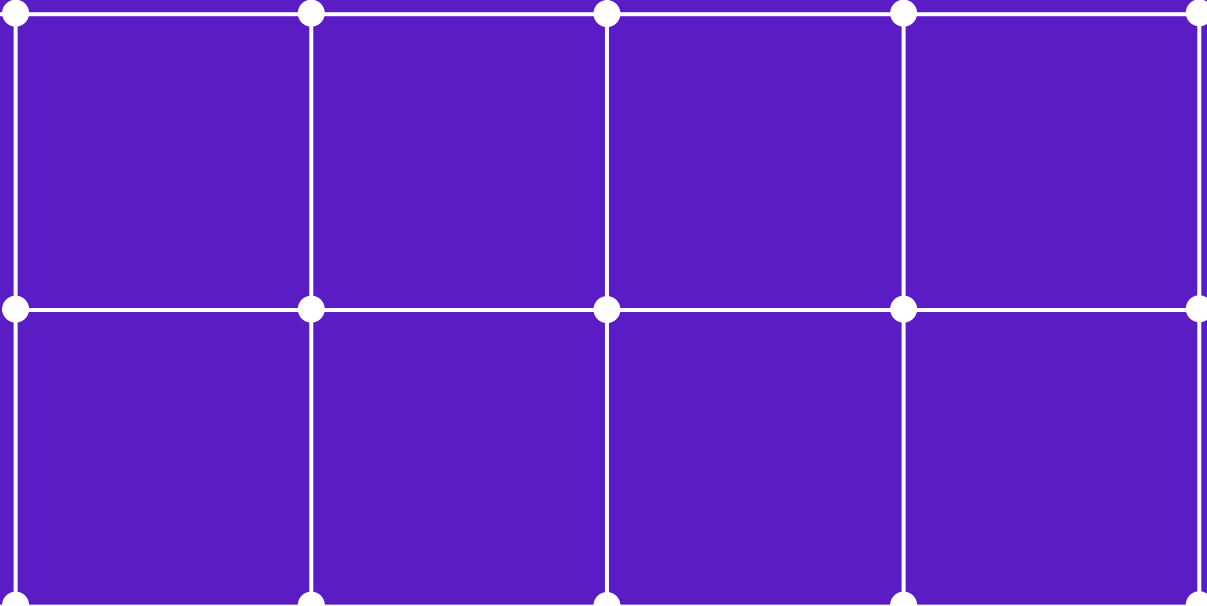
Мини-практика: заполнить пропуски

Строка	Фрагмент	Готово
5	1 5 10 _ 5 1	1 5 10 10 5 1
6	1 6 _ 20 15 6 1	1 6 15 20 15 6 1

Правило построения треугольника Паскаля

Сравнивайте строки треугольника и заполняйте каждую пустую клетку по правилу суммы двух чисел сверху.

В обоих примерах недостающие числа находятся только из соседних значений над ними, без дополнительных вычислений.



Типичные ошибки и памятка

1.

1. Найди степень

Сначала определите степень n : именно она задаёт строку треугольника и количество членов. Ошибка здесь сразу меняет всё разложение.

2.

2. Выбери строку

Затем возьмите строку n , а не $n+1$ и не $n-1$. Число членов всегда на один больше степени, что часто путают.

3.

3. Расставь степени

После этого расставьте степени a от n до 0 и b от 0 до n . Порядок степеней должен быть строго последовательным.

4.

4. Проверь знаки

Если есть минус, знаки должны чередоваться. Это помогает не забыть, что $(a-b)^n$ использует те же коэффициенты, но с отрицательным b .

5.

5. Сделай проверку

В конце сравните результат с симметрией и суммой коэффициентов. Такая проверка быстро показывает, не допущена ли ошибка в записи.

Одна формула — много закономерностей

Бином Ньютона и треугольник Паскаля образуют одну систему: степени задают строку, строка даёт коэффициенты, а правила помогают быстро проверять ответ и замечать закономерности.