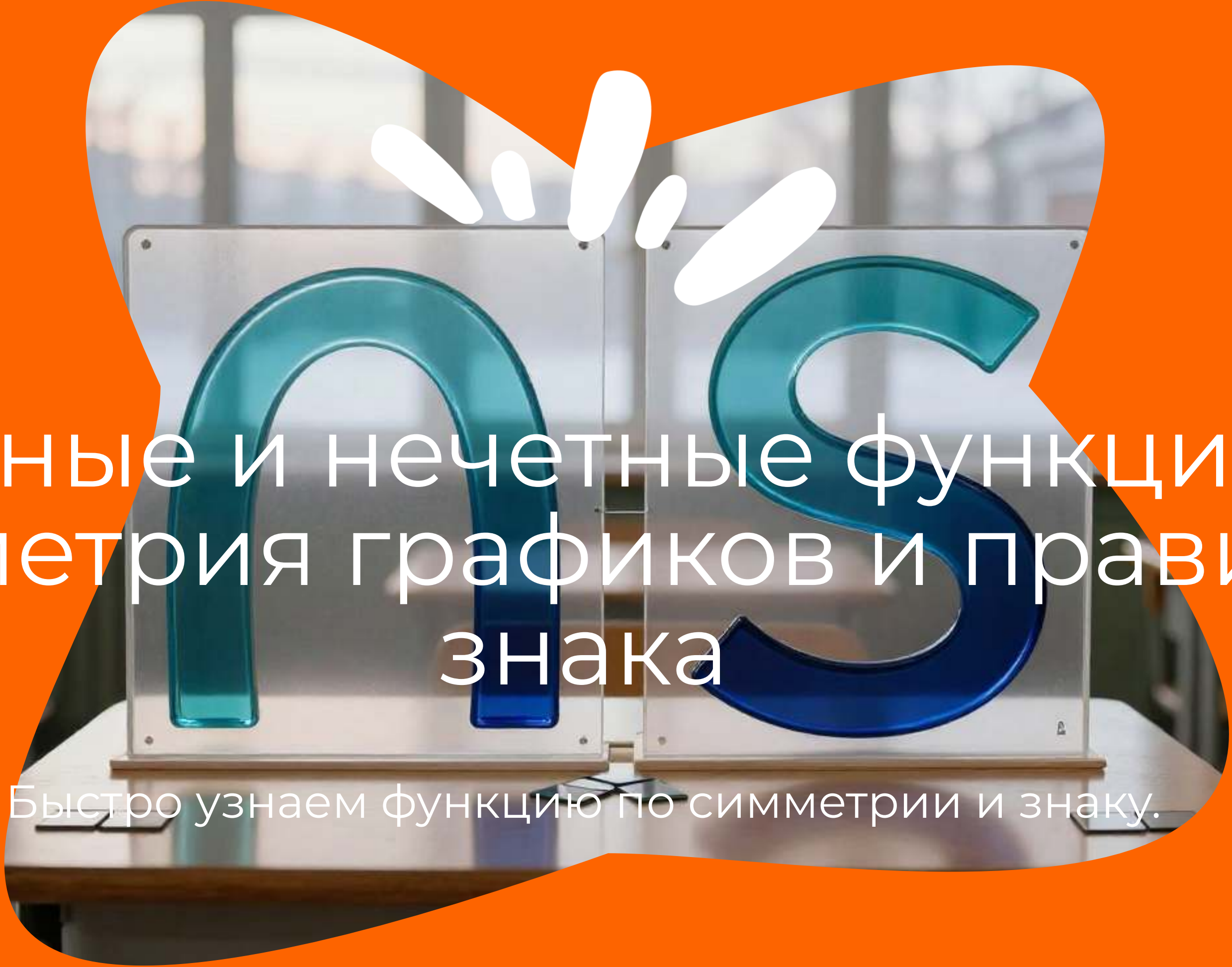


The background of the slide features a play button icon. Inside the play button is a photograph of a mathematical display. The display consists of two vertical panels. The left panel shows a blue, three-dimensional letter 'E' on a coordinate plane. The right panel shows a blue, three-dimensional letter 'S' on a coordinate plane. The letters are positioned such that they appear to be part of a larger, symmetrical shape. The play button icon is white and is centered over the background image.

Четные и нечетные функции: симметрия графиков и правило знака

Быстро узнаем функцию по симметрии и знаку.

Зачем искать симметрию у функций?

График показывает зависимость $y=f(x)$, а симметрия помогает сразу заметить закономерности. Достаточно сравнить значения при x и $-x$, чтобы быстрее понять свойства формулы и не строить лишнюю таблицу значений.



Определение четной функции

Главное равенство

01

Четная функция удовлетворяет условию $f(-x)=f(x)$ для всех x из области определения. Это значит, что значения в точках x и $-x$ совпадают.

Симметрия графика

02

На координатной плоскости график четной функции отражается относительно оси Oy . Левая и правая части рисунка оказываются одинаковыми.

Условие области

03

Чтобы проверка была возможна, область определения должна быть симметрична относительно нуля. Если x допустим, то и $-x$ тоже должен быть допустим.

Примеры из курса

04

К четным функциям относятся $y=x^2$, $y=x^4$, $y=|x|$ и $y=\cos x$. У них значения в парных точках 1 и -1 , 2 и -2 совпадают.



Определение нечетной фу

Главное равенство

Нечетная функция удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения. Значения в точках x и $-x$ равны по модулю, но имеют разные знаки.

01



02

Симметрия графика

График нечетной функции сохраняется при повороте на 180° вокруг начала координат. Это называют центральной симметрией.



Точка ноль

Если 0 входит в область определения нечетной функции, то обязательно $f(0) = 0$. Иначе равенство $f(0) = -f(0)$ невозможно.

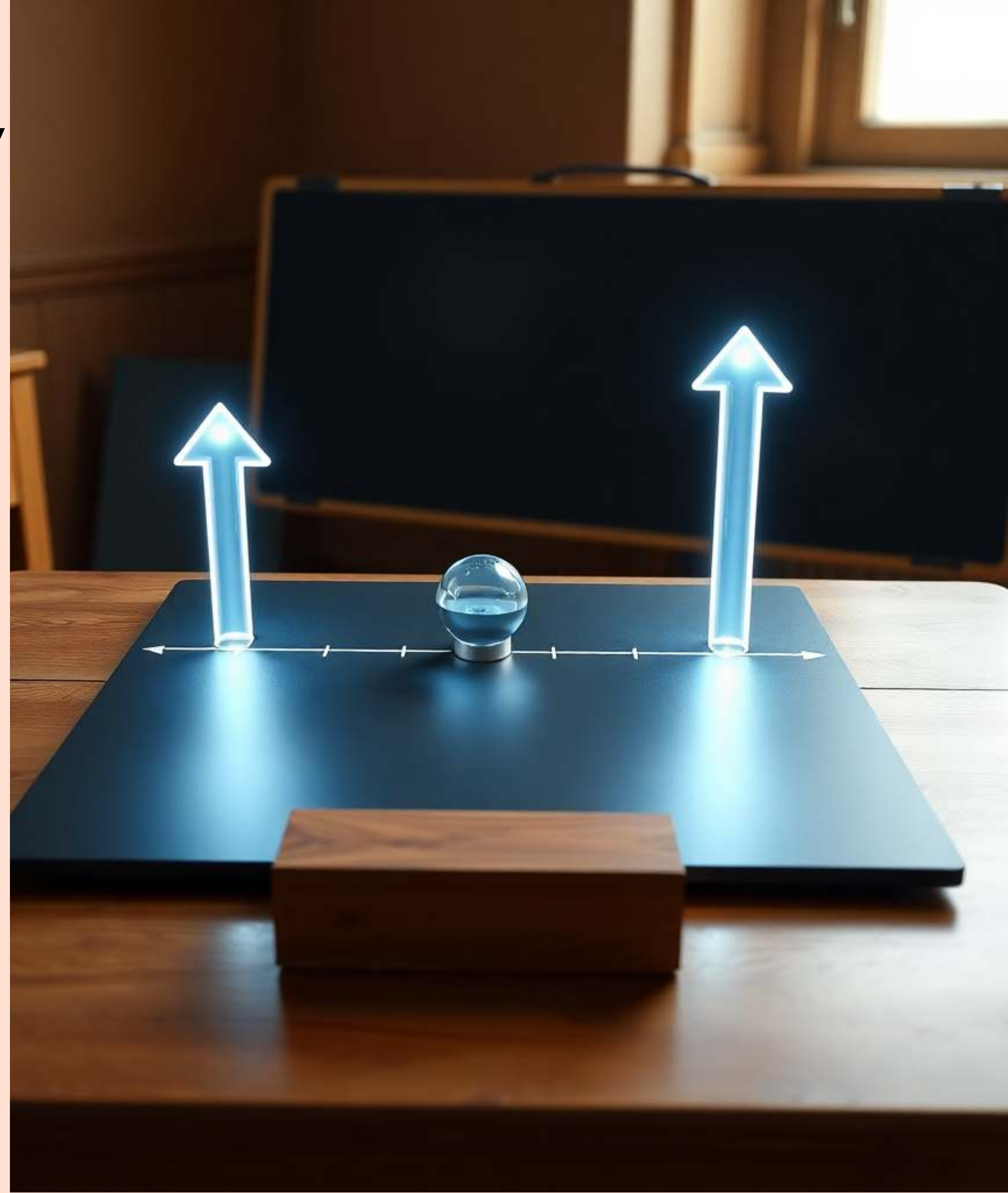
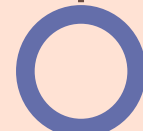
03



04

Примеры из курса

К нечетным функциям относятся $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$ на своей области определения. У них значения в точках 1 и -1, 2 и -2 противоположны.



Признак	Четная	Нечетная
Формула	$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$
График	Ось Oy	Начало координат
Пример	$y=x^2$	$y=x^3$

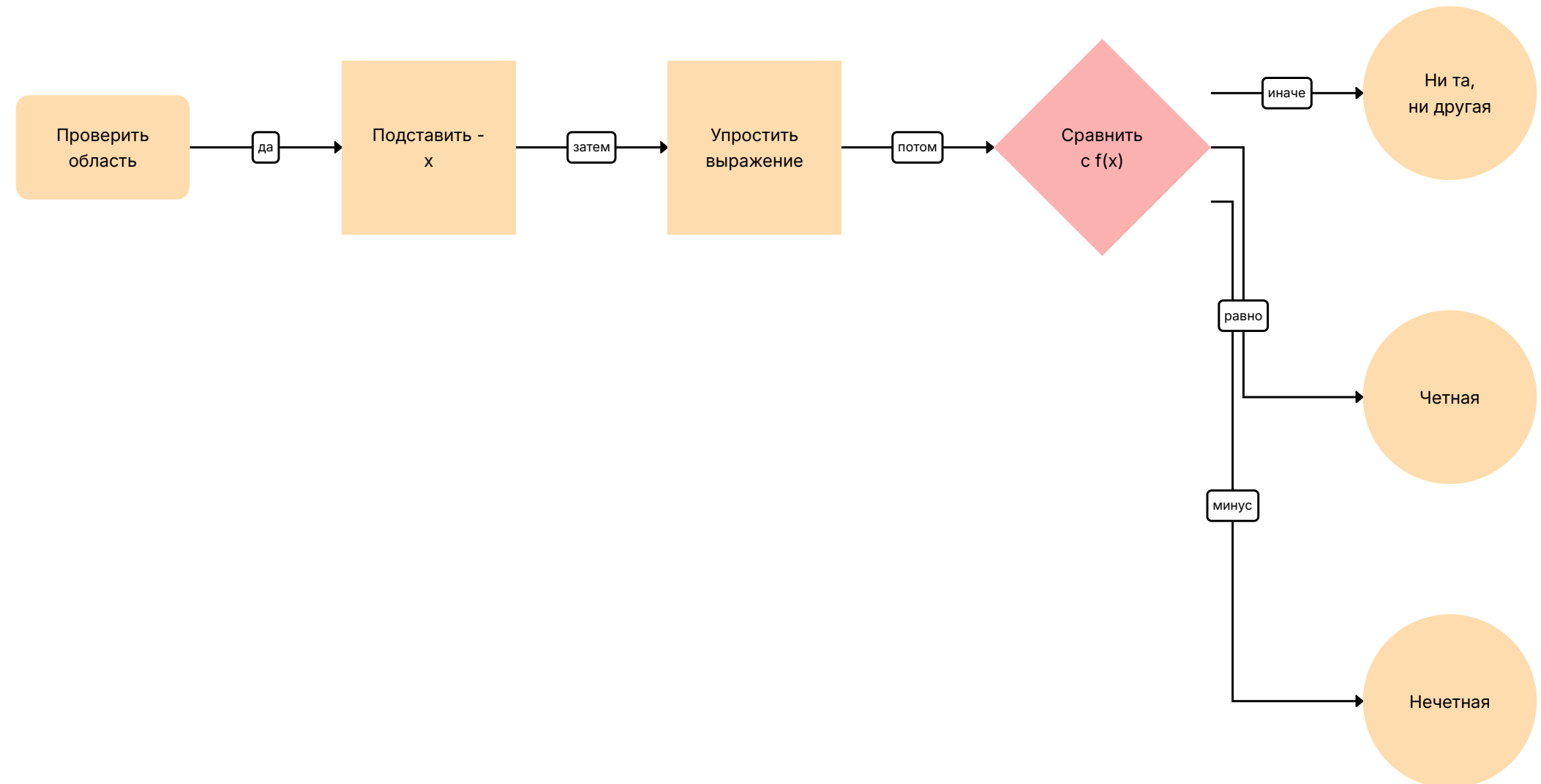
Сравнение четных и нечетных функций

Краткое сравнение двух типов функций по основным признакам.

У четной функции парные значения совпадают, у нечетной — меняют знак. По этому признаку легко узнавать тип функции по формуле и графику.

Как проверить функцию на четность или нечетность

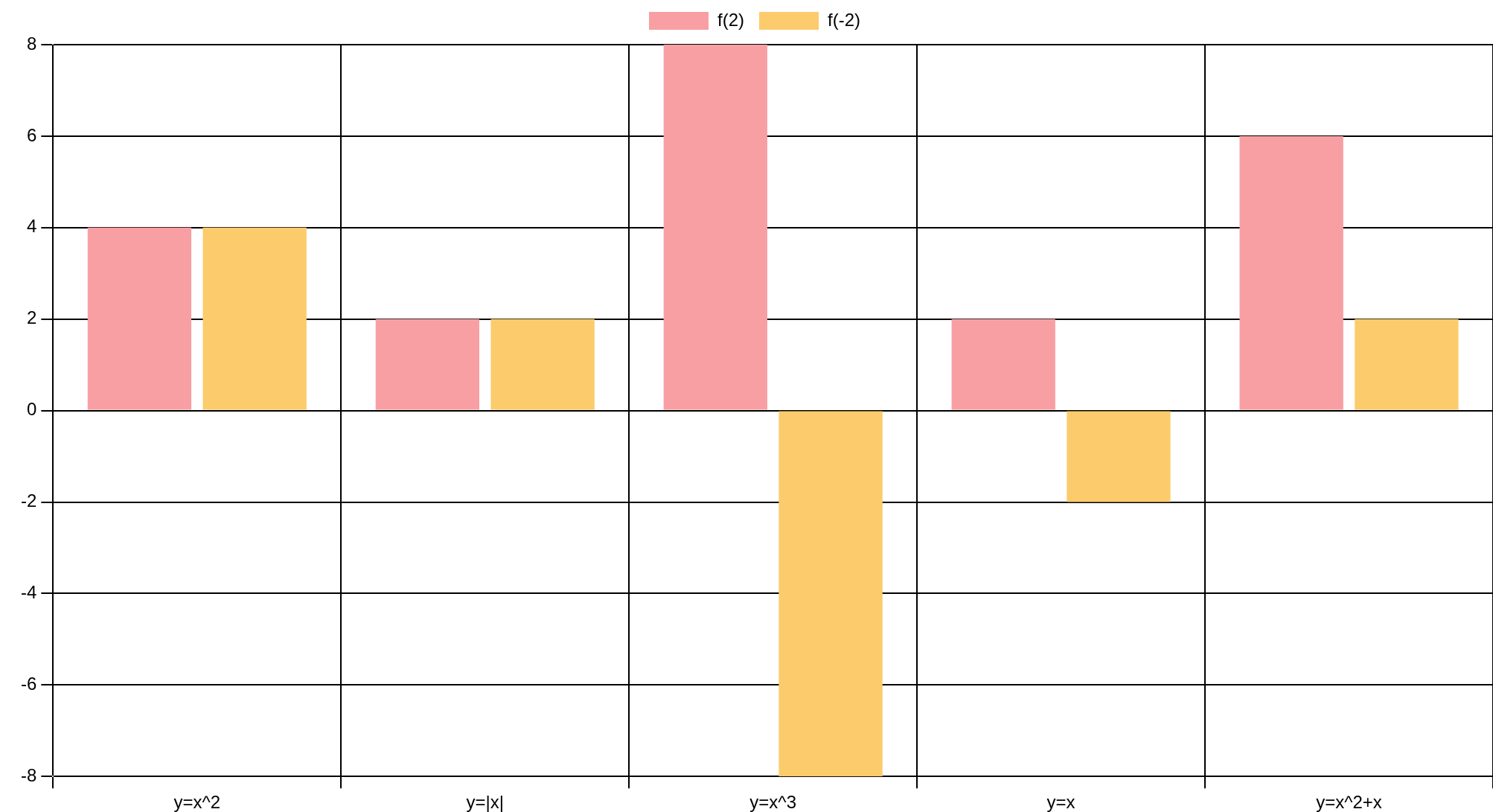
Пошаговая проверка по формуле
и области определения



Как меняются значения при x и $-x$

Сравнение значений при $x=2$ и $x=-2$ показывает, что симметрия зависит от формы формулы. Удобно видеть не только совпадение, но и смену знака.

Если столбцы совпадают, функция четная; если меняют знак, нечетная. Формула x^2+x ломает оба правила, поэтому к двум типам не относится.



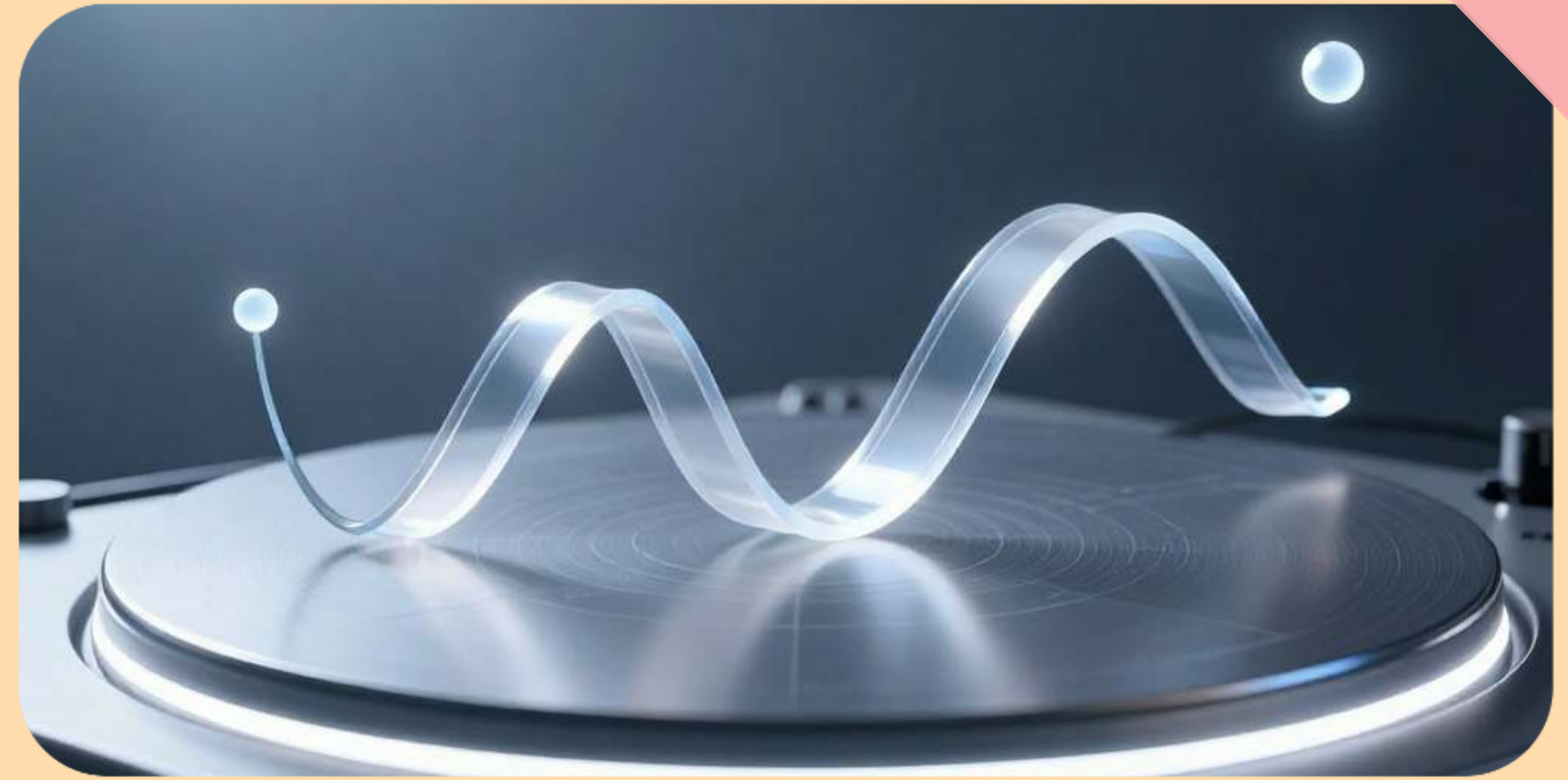
Проверка по подстановке значений $x=2$ и $x=-2$, по формулам школьного курса

Как симметрия видна на графике



Зеркало относительно оси Oy

У четной функции правая и левая части графика выглядят одинаково, как отражение в зеркале. Поэтому точки с одинаковыми ординатами, но противоположными абсциссами, стоят на одной высоте. Это хорошо видно на параболе $y=x^2$ и графике $y=|x|$.



Поворот вокруг начала координат

У нечетной функции рисунок сохраняется после поворота на пол-оборота. Точка $(2,8)$ переходит в $(-2, -8)$, а форма графика остается прежней. Такой эффект легко заметить на кубической кривой $y=x^3$ или на синусоиде.

Четные функции в школьном курсе

Степени и модуль

Функции с четными степенями, например $y=x^2$ и $y=x^4$, часто оказываются четными. Модуль $y=|x|$ тоже дает одинаковые значения для x и $-x$.

Симметрия графика

У четных функций левая и правая части графика совпадают относительно оси Oy . Поэтому по одной стороне рисунка можно мысленно восстановить другую.

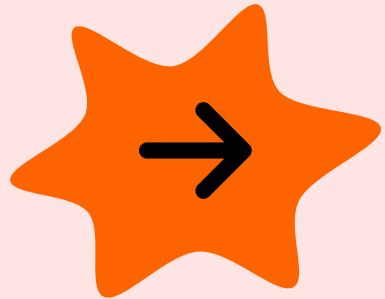
Проверка значений

Для точек 1 и -1, 2 и -2 значения совпадают. Это быстрый признак, который помогает отличить четную функцию от других уже на первых шагах.

Косинус

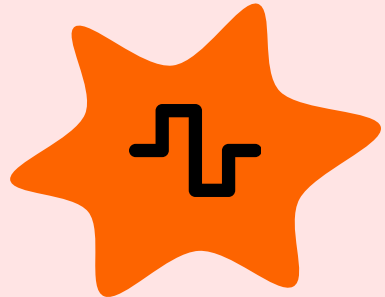
Функция $y=\cos x$ остается четной, потому что $\cos(-x)=\cos x$. Это важный пример из тригонометрии, который часто встречается в заданиях 9 класса.

Нечетные функции в школьном курсе



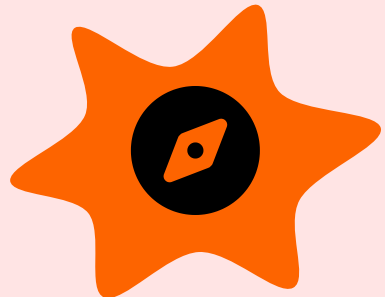
Линейная и кубическая

Функции $y=x$ и $y=x^3$ относятся к нечетным. При замене x на $-x$ их значения меняют знак, а графики сохраняют центральную симметрию.



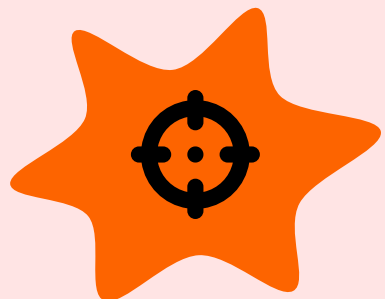
Синус

Функция $y=\sin x$ нечетная, потому что $\sin(-x)=-\sin x$. На графике это видно по симметрии относительно начала координат.



Тангенс

Функция $y=\operatorname{tg} x$ также нечетная на своей области определения. Ее значения по разные стороны от нуля имеют противоположные знаки.



Начало координат

Если $x=0$ входит в область определения, график нечетной функции проходит через начало координат. Это следует из равенства $f(0)=-f(0)$, значит $f(0)=0$.

Проверка на конкретных значениях

Сравнение значений функции в точках 2 и -2 помогает быстро увидеть, сохраняется ли симметрия без полного преобразования формулы.

Одинаковые значения в парных точках указывают на чётность, противоположные по знаку — на нечётность; если ни одно условие не выполняется, тип не подходит.

Функция	$f(2)$	$f(-2)$	Вывод
$y=x^2$	4	4	чётная
$y=x^3$	8	-8	нечётная
$y=x^2+x$	6	2	ни та, ни другая
$y= x $	2	2	чётная

2

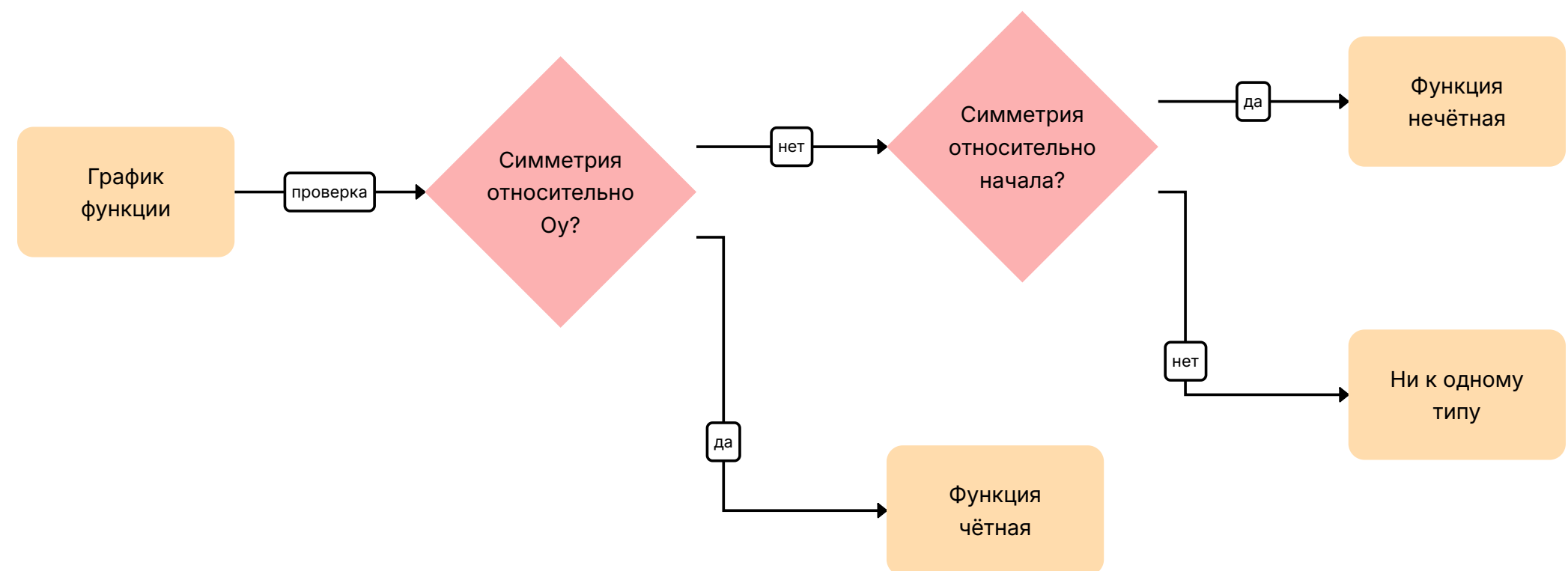
разные значения для $x=1$
и $x=-1$ показывают, что
симметрия не сохраняется.

Для функции $y=x^2+x$ одна и та же
по модулю точка даёт разные
результаты: это сразу показывает
отсутствие и зеркальной,
и центральной симметрии.

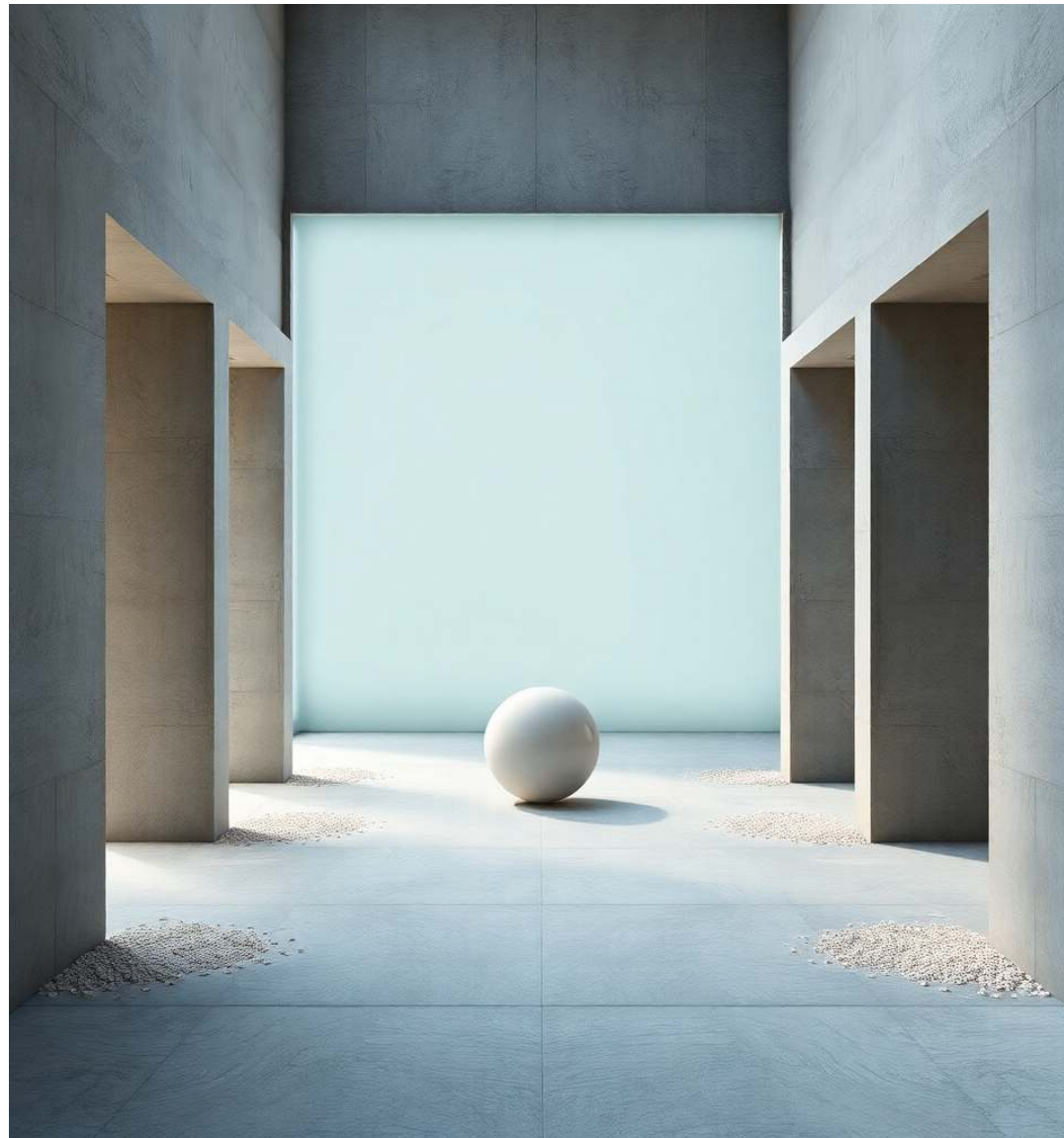
*Пример из школьного курса алгебры: $y=x^2+x$,
значения при $x=1$ и $x=-1$.*

Как распознать тип функции по графику

Последовательность основана на проверке симметрии относительно оси Oy и начала координат.



Где встречаются чётные и нечётные функции



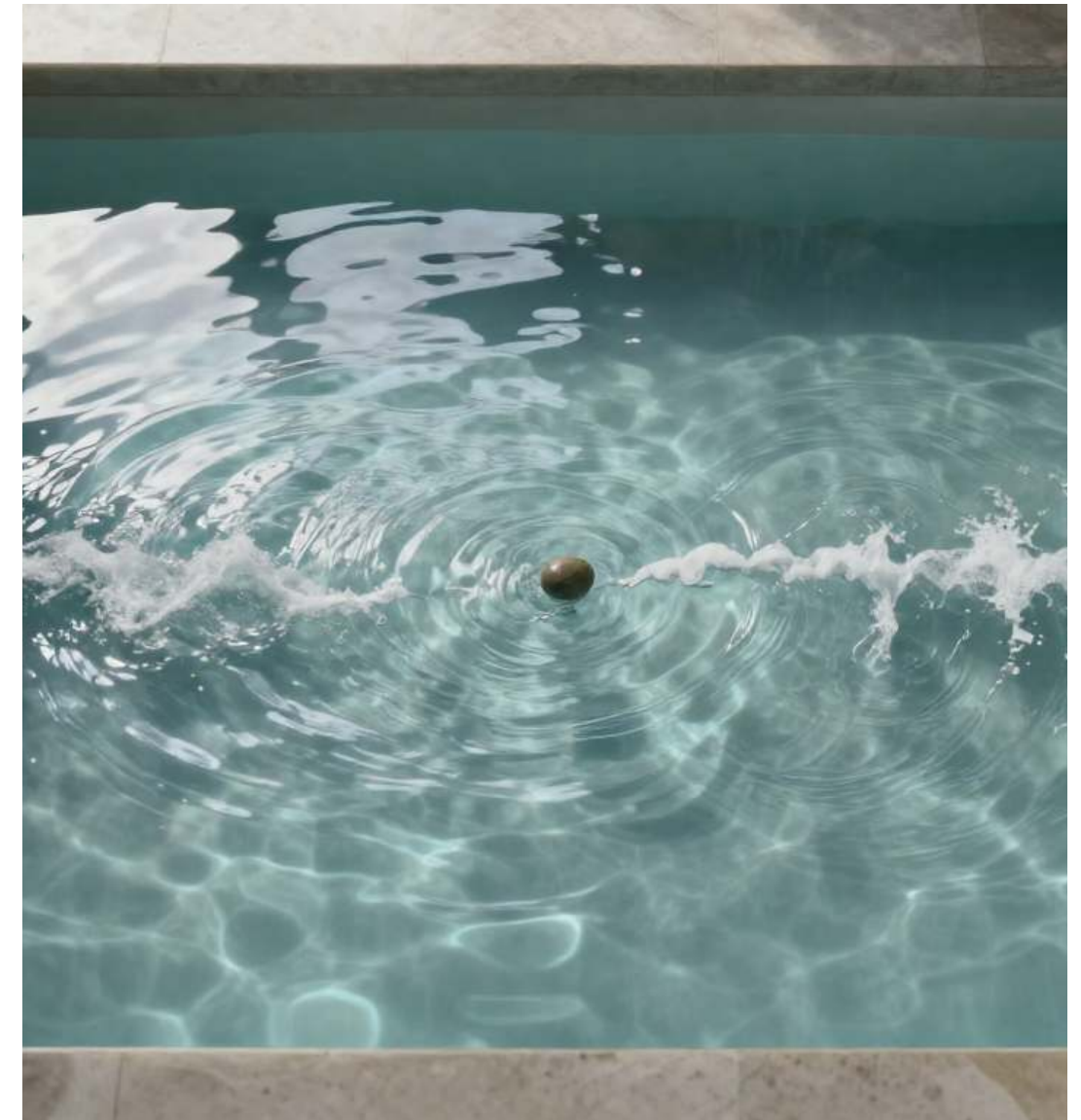
Симметрия в геометрии

Чётные функции часто появляются там, где одинаково важны левая и правая стороны от нуля. Так описывают расстояния, модули и симметричные кривые, у которых одна половина повторяет другую относительно оси Oy .



Движение и равновесие

Нечётные функции удобно применять, когда величина меняет направление. Так можно описывать смещение относительно точки равновесия: если движение идёт в одну сторону, то при смене знака координаты меняется и знак результата.



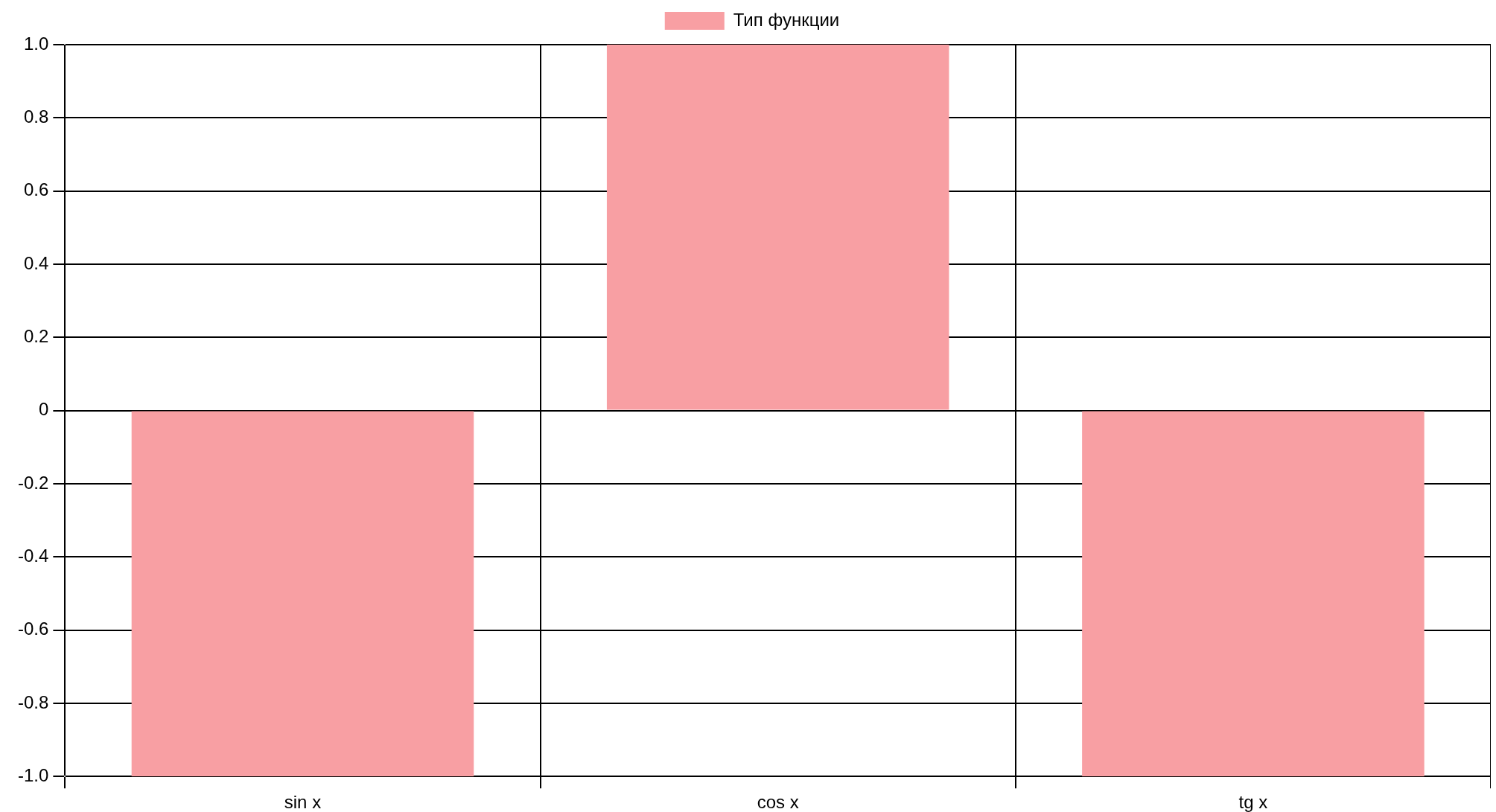
Волны и колебания

На графиках волн и колебаний часто видна центральная симметрия. Это помогает быстро заметить, как одна часть кривой связана с другой, и понять, где значение повторяется, а где меняет знак.

Симметрия тригонометрических функций

Для тригонометрических функций важна проверка подстановкой $-x$: именно она показывает, какая из них сохраняет значение, а какая меняет знак.

Косинус ведёт себя как чётная функция, а синус и тангенс — как нечётные; это удобно запоминать по виду их симметрии.



Школьные тождества: $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$, $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$.

Особые случаи: область определения и значение в нуле

Ноль для нечётной функции

Если 0 входит в область определения, то для нечётной функции обязательно $f(0)=0$. Это следует из равенства $f(0)=-f(0)$, которое возможно только при нулевом значении.

Чётная функция и точка 0

У чётной функции значение в нуле не обязано быть нулём. Главное условие — чтобы сама точка 0 была допустима и область определения оставалась симметричной относительно нуля.

Несимметричная область

Если среди допустимых x нет пары вида x и $-x$, функция не может быть чётной или нечётной. Поэтому перед проверкой всегда смотрят не только на формулу, но и на область определения.

Пример $1/x$

Функция $y=1/x$ не определена при $x=0$, зато на своей области она нечётная: при замене x на $-x$ знак результата меняется. Это хороший пример работы правила на неполной области.



Ошибка	Почему неверно	Как проверяют
Не подставляют -x	Нет проверки симметрии	Считают $f(-x)$
Путают знак и степень	Меняется смысл выражения	Упрощают внимательно
Смотрят один пример	Этого недостаточно	Проверяют формулу
Не смотрят ОДЗ	Может быть нессимметрична	Анализируют область
Судят по виду	Внешний вид обманчив	Сравнивают результаты

Типичные ошибки при определении чётности и нечётности

Сравнение частых ошибок показывает, что правильная проверка всегда требует подстановки $-x$, упрощения выражения и проверки всей области определения.

Ошибки возникают, когда проверяют только внешний вид или один числовой пример; надёжный вывод дают только подстановка, упрощение и сравнение.

Как запомнить разницу между двумя типами функций



Чётная — как зеркало

Чётная функция не меняется при замене x на $-x$, поэтому её график можно представить как отражение. Левые и правые точки совпадают относительно оси Oy .



Нечётная — как поворот

Нечётная функция при смене знака аргумента меняет знак результата. Её график удобно мысленно поворачивать на пол-оборота вокруг начала координат.



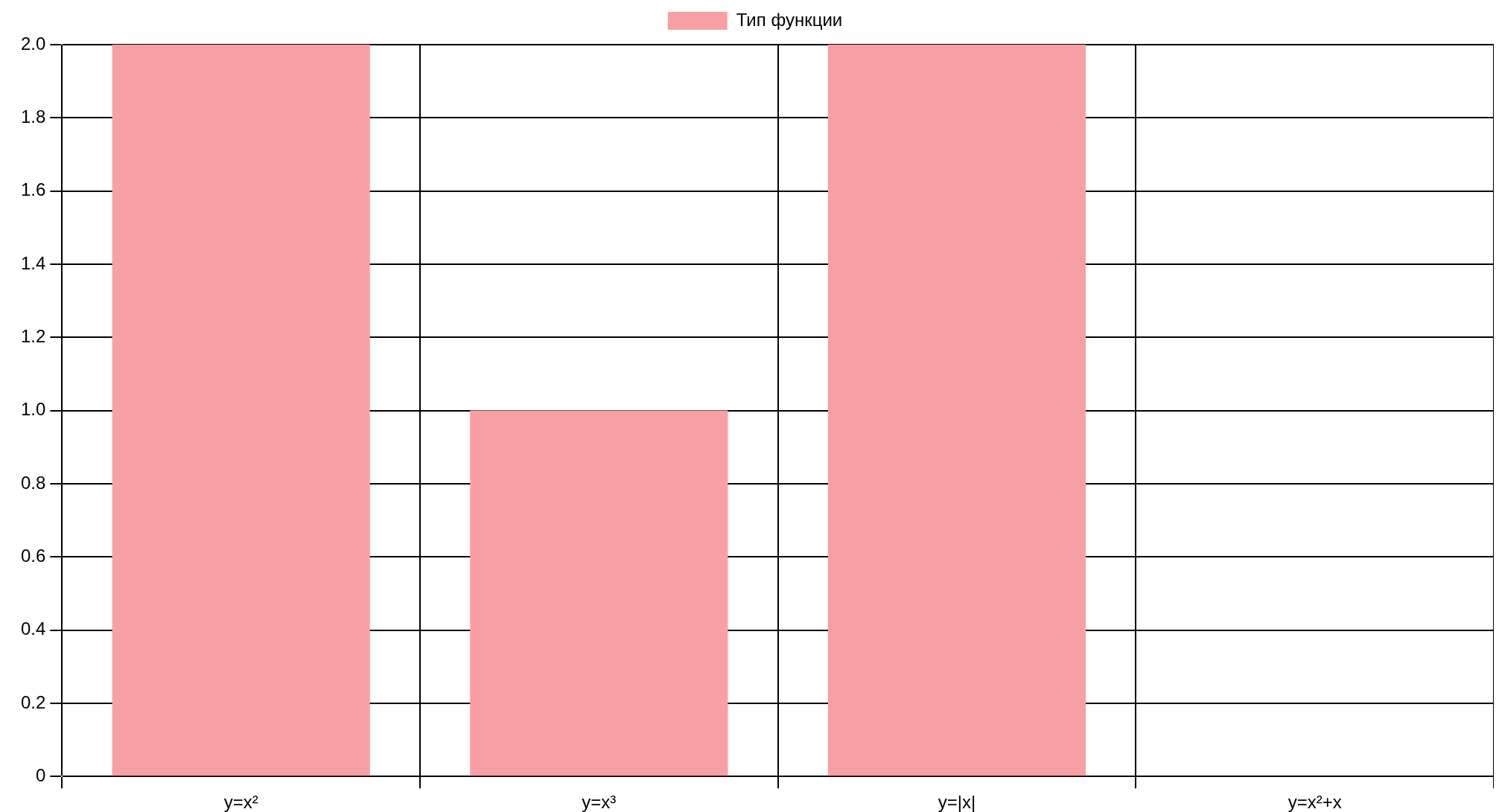
Короткая подсказка

Запомнить просто: чётная — отражение, нечётная — поворот. Эти два образа помогают быстро узнать тип функции и по формуле, и по рисунку.

Мини-проверка по четырём формулам

Даже в коротком списке видно, что чётные степени и модуль чаще дают чётность, а добавление слагаемого x меняет результат проверки.

Формула может быть чётной, нечётной или не подходить ни под один тип; решающими становятся структура выражения и наличие смешанных слагаемых.



Школьные примеры функций: $y=x^2$, $y=x^3$, $y=|x|$, $y=x^2+x$.

Чётность и нечётность — это ключ к симметрии

Если помнить две формулы $f(-x)=f(x)$ и $f(-x)=-f(x)$, становится легче узнавать симметрию графика, быстрее проверять ответы и увереннее решать задания по алгебре.