

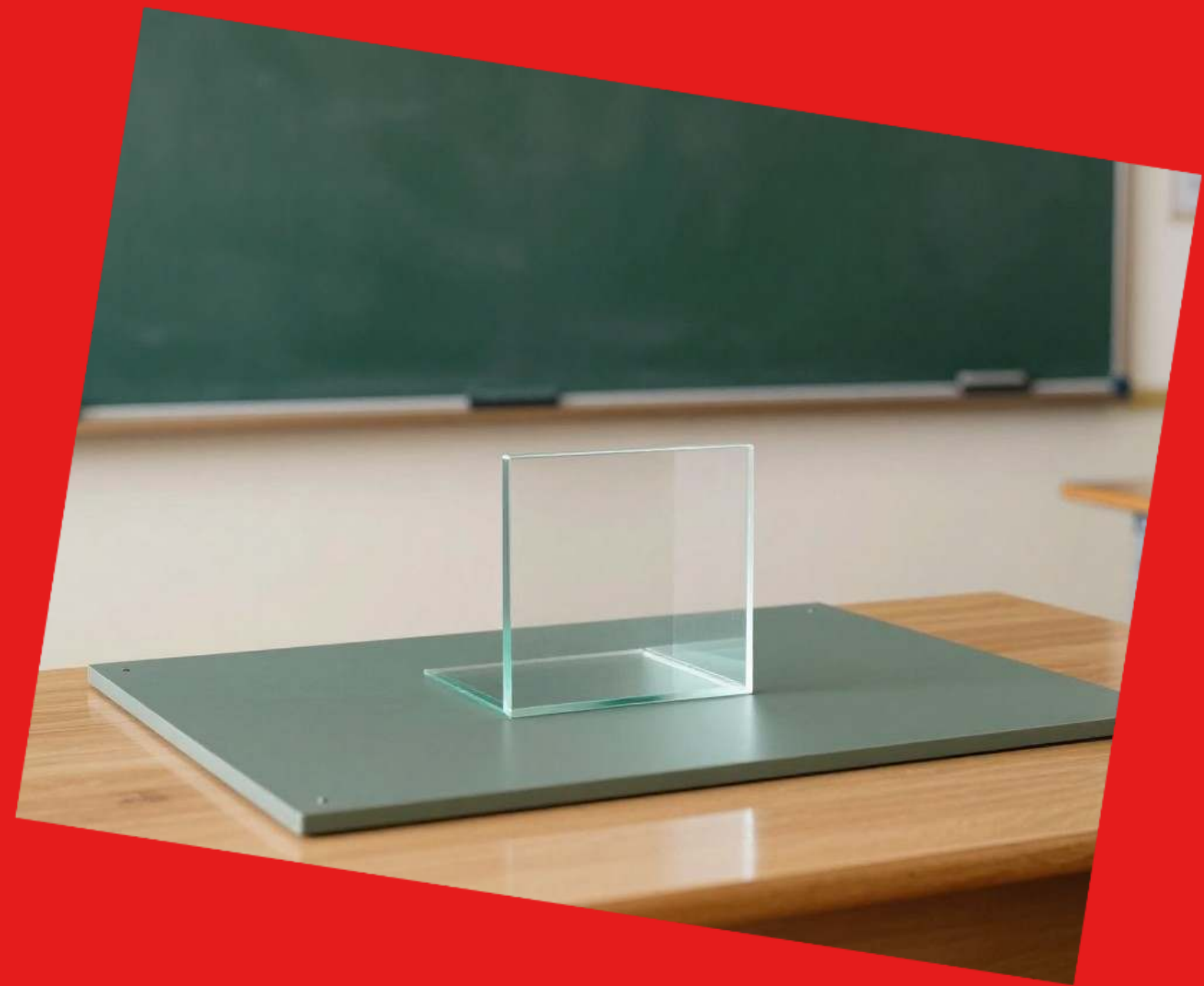
Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Признак перпендикулярности в стереометрии: как проверять «вертикальность» прямой к плоскости.



Зачем изучать признак в 11 классе

Теорема нужна, чтобы быстро доказывать и строить перпендикуляры в пространственных задачах: в призмах, пирамидных конструкциях и координатных моделях. Она связывает свойства фигур на плоскости с построениями в объёме.



Определение перпендикулярности прямой и плоскости

1

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна каждой прямой, лежащей в плоскости и проходящей через точку пересечения.

2

По определению нужно было бы контролировать перпендикулярность ко многим прямым в плоскости, но в задачах это неудобно. Поэтому вводят практический подход: проверяют только ключевые направления.

3

Достаточно рассмотреть две пересекающиеся прямые в плоскости: они задают два независимых направления. Тогда вывод о перпендикулярности плоскости становится строгим и проверяемым.

Формулировка теоремы и её смысл

Суть: перпендикулярность к двум пересекающимся направлениям в плоскости уже гарантирует перпендикулярность ко всей плоскости.

Плоскость можно «зафиксировать» двумя пересекающимися прямыми; если прямая перпендикулярна этим двум направлениям, то она перпендикулярна плоскости в целом.

Условие	Что известно	Вывод
1	Прямая $a \perp b$ и $a \perp c$	$a \perp \alpha$
2	b и c — две пересекающиеся прямые в одной плоскости α	Они задают направление плоскости
3	Перпендикулярность к «двум независимым направлениям» достаточна	Перпендикулярность распространяется на всю плоскость

Школьный курс стереометрии (опорная формулировка признака перпендикулярности).

Дано и что требуется доказать в типовой задаче

Дано: прямая a и плоскость α . В плоскости α лежат две пересекающиеся прямые b и c . Часто уже известно, что a перпендикулярна каждой из них: $a \perp b$ и $a \perp c$.

Требуется доказать, что a перпендикулярна плоскости α , то есть $a \perp \alpha$. Это означает, что прямая «задаёт» нормальное направление относительно плоскости.

Главное в записи условия — указать общую точку: где именно a пересекает плоскость α , и через какую точку проходят прямые b и c . Без этого применение теоремы становится некорректным.

Как логически доказать признак перпендикулярности

Последовательность действий при проверке условий теоремы



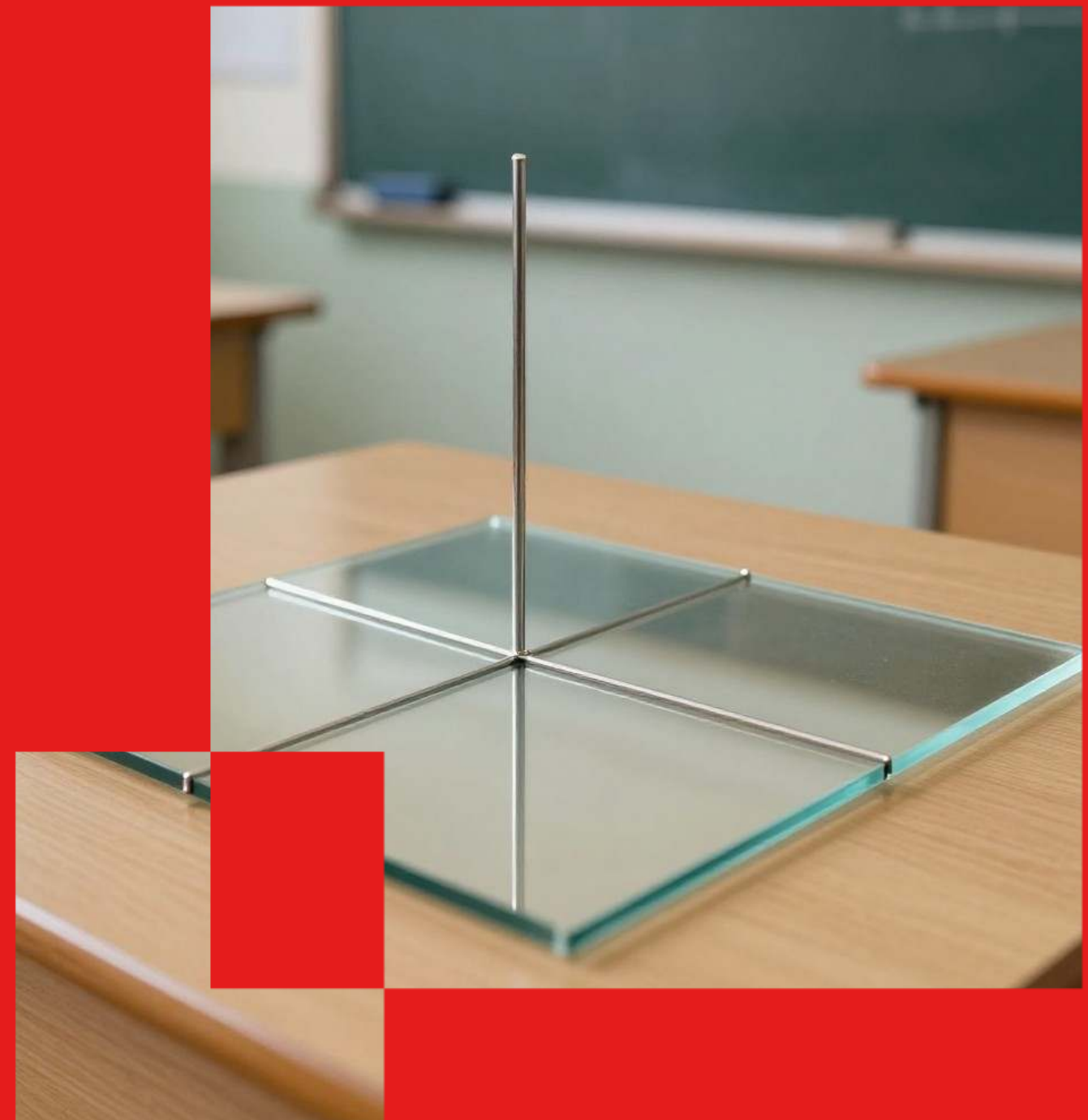
Геометрический смысл нормали к плоскости

Перпендикуляр задаёт нормальное направление

Перпендикуляр к плоскости задаёт её нормальное направление: он «смотрит» строго перпендикулярно плоскости. В точке O прямая, перпендикулярная плоскости, образует прямой угол с любыми прямыми плоскости, проходящими через O .

Угол 90° и связь с любыми прямыми плоскости

Именно поэтому на рисунке важно видеть одну точку пересечения и несколько «разных» направлений внутри плоскости: две пересекающиеся прямые помогают визуально проверить, что перпендикуляр согласован со всей плоскостью, а не с одной линией.

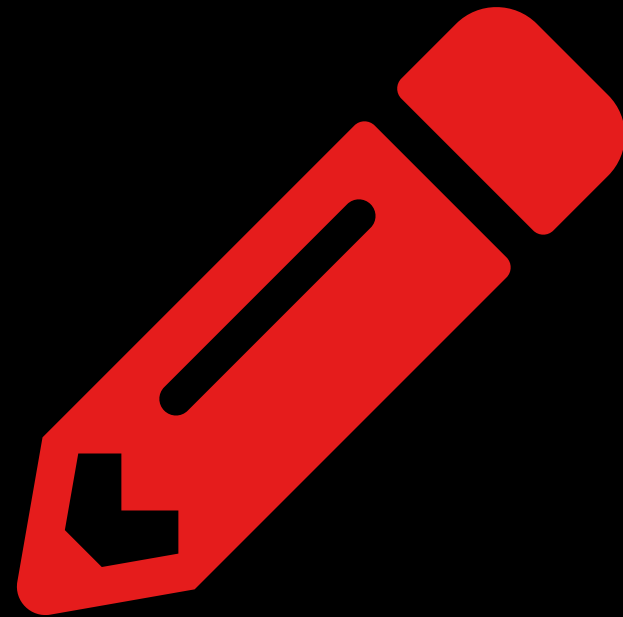


Следствия теоремы



Перпендикулярность всем линиям плоскости

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения. Следовательно, угол в точке всегда 90° .



Удобство для доказательств в многогранниках

Это свойство напрямую помогает доказывать перпендикулярность рёбер: достаточно показать, что ребро перпендикулярно основанию как плоскости. Далее перпендикулярность распространяется на нужные направления в основании.



Анализ высот и расстояний

Когда ищут высоту в пространственных фигурах, высота по смыслу является перпендикуляром к плоскости основания. Следствие теоремы поддерживает строгие построения и обоснования в таких задачах.

1

**через эту точку можно провести лишь
одну прямую, перпендикулярную
плоскости.**

Единственность перпендикуляра
делает вычисление расстояния от
точки до плоскости однозначным и
строго определённым.

Свойство единственности перпендикуляра к
плоскости в школьной стереометрии.

Перпендикулярность и параллельные прямые

Если две прямые параллельны и одна из них перпендикулярна плоскости, то вторая тоже перпендикулярна этой плоскости. Причина в том, что параллельные прямые имеют одинаковое направление.

Для проверки удобно мыслить так: направление перпендикуляра — это «нормальное» направление к плоскости. Если первая прямая задаёт нормаль, то параллельная ей прямая задаёт то же направление и остаётся перпендикуляром.

Свойство особенно эффективно в призмах и параллелепипедах: боковые рёбра там попарно параллельны. Тогда перпендикулярность одного ребра основанию помогает распространить вывод на другие рёбра.

Три ситуации: прямая в плоскости, наклонная, перпендикуляр

Сравните три возможных положения прямой относительно плоскости по величине угла между ними и по смыслу: лежит ли прямая в плоскости или задаёт нормаль.

Классификация зависит от значения угла: 0° соответствует плоскости, 90° — нормали; промежуточные значения дают наклонные прямые.

Ситуация	Угол с плоскостью	Геометрический смысл
Прямая в плоскости	0°	Прямая целиком лежит в плоскости
Наклонная прямая	$0^\circ - 90^\circ$	Пересекает плоскость, не образуя нормаль
Перпендикуляр	90°	Прямая совпадает с направлением нормали

Сводка по определению угла между прямой и плоскостью в школьной стереометрии

Типичные ошибки при применении признака

1

Путают проверку: пытаются установить перпендикулярность, опираясь только на одну прямую в плоскости. Признак требует двух пересекающихся прямых, чтобы надёжно «собрать» два независимых направления.

2

Смешивают перпендикуляр с наклонной прямой. Прямая может пересекать плоскость и при этом не быть нормалью: важно различать угол 90° и более «малые» углы.

3

Игнорируют общую точку пересечения. Если прямая a и выбранные прямые b, c не пересекаются в одной точке, то конструкция признака разрушается и вывод о перпендикулярности становится недоказанным.

4

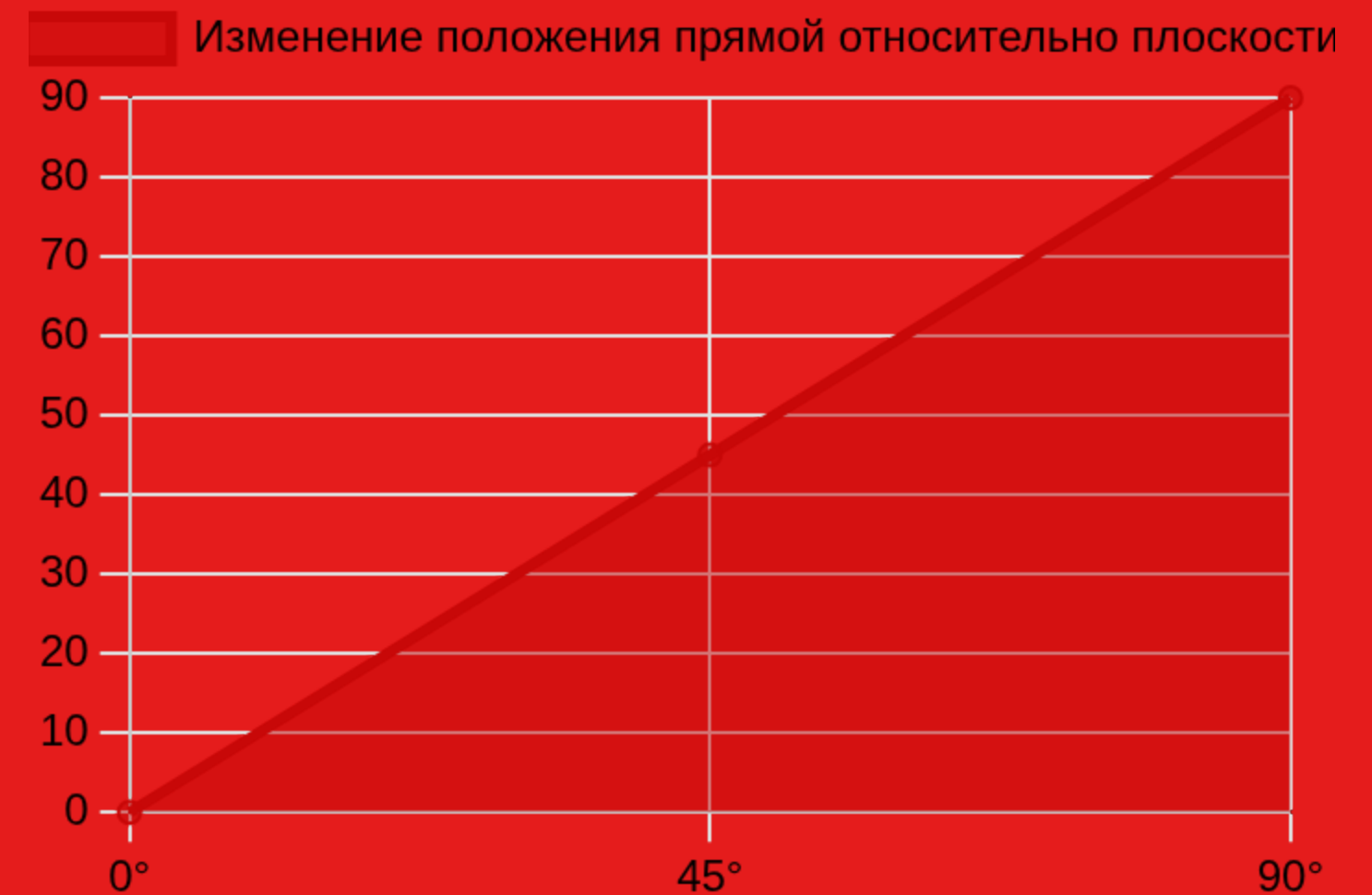
Стремятся «доказать перпендикулярность плоскости», не уточнив пару прямых, которые лежат в плоскости и должны образовать необходимую проверку. Сравнивают не то и не с тем.

Угол между прямой и плоскостью

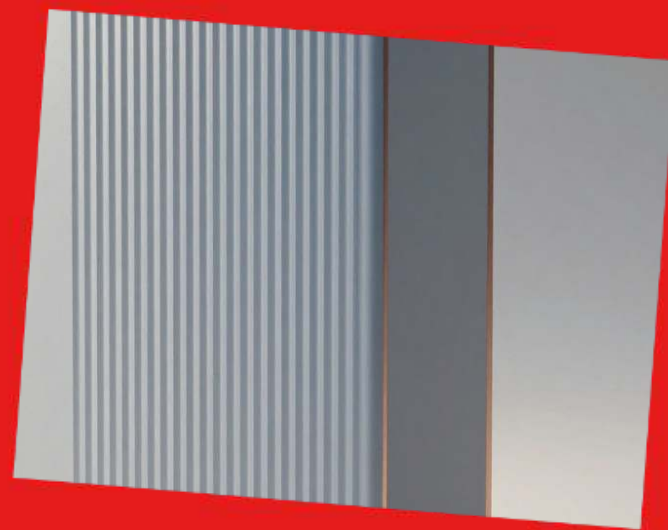
Если угол обозначает меру отклонения прямой от положения «лежит в плоскости», то при приближении к 90° направление стремится стать нормалью.

Линейный переход показывает: только при угле 90° прямая получает статус перпендикуляра, а при 0° она уже принадлежит плоскости.

Школьная геометрия: определение угла между прямой и плоскостью (интерпретация по значениям 0° , 45° , 90°).



Пример: прямоугольный параллелепипед



Вертикальное ребро как нормаль к основанию

В прямоугольном параллелепипеде боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания. Это объясняется тем, что вертикальное ребро перпендикулярно двум пересекающимся рёбрам основания, задающим две независимые линии в этой плоскости.



Как «две пересекающиеся прямые» дают основание для вывода

На схеме удобно выделить нижнее основание и верхнее основание, а также одно вертикальное ребро. Две пересекающиеся линии на основании выступают аналогом пары прямых b и c , по которым проверяется перпендикулярность бокового ребра плоскости основания.

Связь с расстоянием от точки до плоскости

1

Кратчайшее расстояние от точки до плоскости строится вдоль перпендикуляра. Именно по перпендикуляру от точки опускают отрезок на плоскость, и его длина становится искомым расстоянием.

2

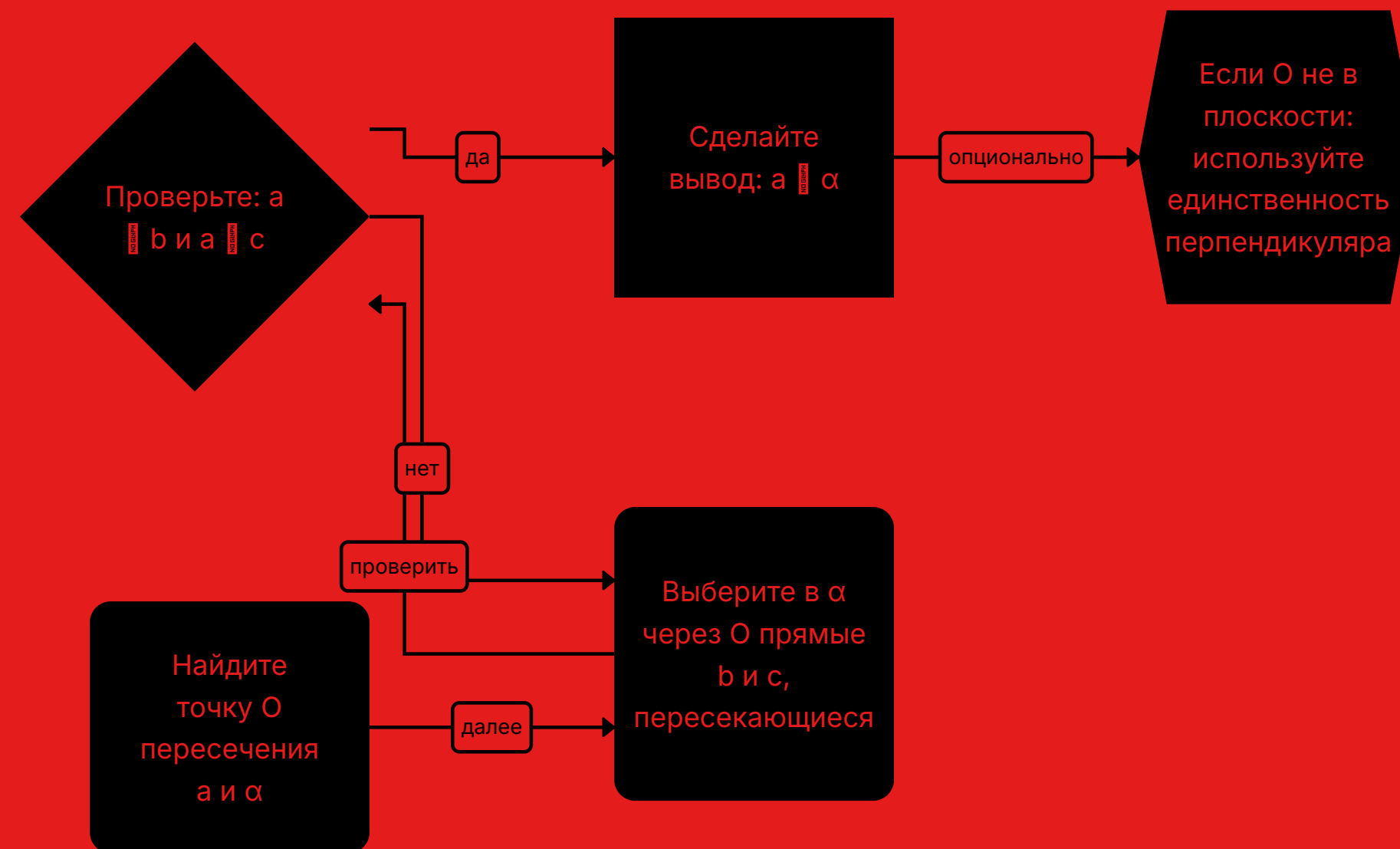
Отрезок от точки до её основания на плоскости образует прямой угол с плоскостью, поэтому задача расстояния в пространстве сводится к работе с одним «правильным» отрезком.

3

В вычислениях этот приём помогает находить высоты в пирамидах и расстояния в многогранниках, а также использовать ортогональные проекции при решении геометрических задач.

Алгоритм распознавания перпендикулярности к плоскости

Структура применения признака (через две пересекающиеся прямые в плоскости и общую точку).



Координатная запись плоскости и направление перпендикуляра

В декартовой системе координат плоскость задают уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Коэффициенты при x, y, z образуют вектор $n = (A, B, C)$.

Вектор n является нормальным к плоскости: он показывает направление всех прямых, которые перпендикулярны данной плоскости. Поэтому нормаль связывает геометрию и алгебру.

Если у прямой есть направляющий вектор, пропорциональный (A, B, C) , то она параллельна нормали и значит перпендикулярна плоскости. Так признак получает аналитическое подтверждение.

Что даёт теорема в задачах стереометрии

Теорема о перпендикулярной прямой к плоскости выступает универсальным «мостом» между доказательством, построением и вычислением в пространственных задачах.

Одна и та же логика (две пересекающиеся прямые) поддерживает несколько типов задач: доказательные, конструктивные и расчётные.

Сфера применения	Что делаем	Как помогает теорема
Доказательства	Уточняем вертикальность рёбер	Достаточно проверить перпендикуляр к двум пересекающимся прямым в основании
Построения	Находим высоту пирамиды	Высота рассматривается как перпендикуляр к плоскости основания
Вычисления	Считаем расстояния и проекции	Направление определяется перпендикуляром; длина — по нему

Формулы и формулировки, которые важно запомнить

1

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой плоскости, проходящей через точку пересечения. В доказательствах достаточно опираться не на всё множество прямых, а на проверяемую пару.

2

Для проверки перпендикулярности достаточно установить, что прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым данной плоскости через общую точку. Эти линии задают разные направления в плоскости.

3

Через точку, не лежащую в плоскости, можно провести только одну прямую, перпендикулярную этой плоскости. Поэтому перпендикуляр к плоскости там однозначен и удобен для расчётов расстояний.

4

Три формулировки складываются в «набор инструмента»: признак через две прямые, единственность перпендикуляра и связь с измерением расстояния. Именно их применяют при типовых стереометрических заданиях.

Итог: роль теоремы в стереометрии 11 класса

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости, сокращает сложную проверку до анализа двух пересекающихся прямых в плоскости. Она помогает доказывать перпендикулярность рёбер, строить высоты, работать с расстояниями и использовать координатные модели.