



Одинаковая форма при разных размерах: подобие и гомотетия.



Подобие и гомотетия в геометрии 9 класса

Зачем изучать подобие и гомотетию



Эти понятия помогают сравнивать фигуры, находить неизвестные элементы треугольников и понимать масштаб на картах, чертежах и моделях. В геометрии они связывают вычисления с реальными задачами.

Определение подобных фигур

Одинаковая форма

Две фигуры считают подобными, если они имеют одинаковый вид: все углы в них совпадают, а различие касается только размеров и масштаба изображения.

Пропорциональные стороны

Соответствующие стороны подобных фигур относятся как одно и то же число. Это позволяет сравнивать треугольники, даже если один из них заметно больше другого.

Обозначение подобия

Для записи подобия используют знак $\sim$. Он показывает, что фигуры сохраняют форму, но могут быть увеличены или уменьшены в одинаковое число раз.

Признаки подобия треугольников

Признак	Что сравнивают	Условие
По двум углам	2 угла	Они равны
По 2 сторонам и углу	Стороны и угол	Пропорция и равный угол
По трём сторонам	3 стороны	Все пропорциональны

Три признака позволяют доказать подобие треугольников без дополнительных построений.

Если выполнен хотя бы один признак, треугольники можно считать подобными и использовать их пропорции.

Школьный курс геометрии, тема
«Подобие треугольников»

Соответствующие элементы подобных фигур

Пары элементов

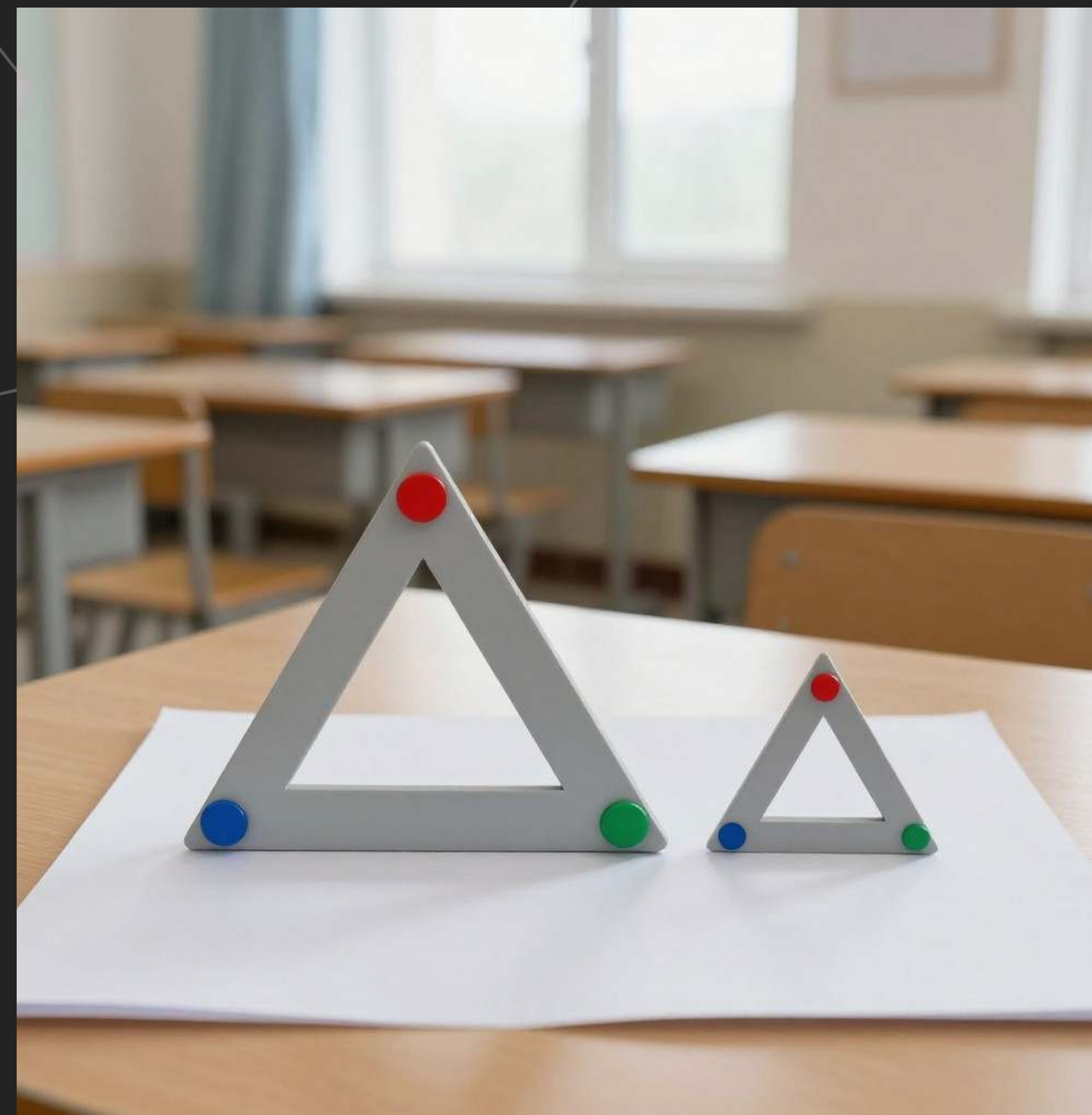
У подобных треугольников важно правильно сопоставить вершины, углы и стороны. Если порядок выбран верно, равные углы и пропорциональные стороны легко записать в задаче.

Одинаковый порядок

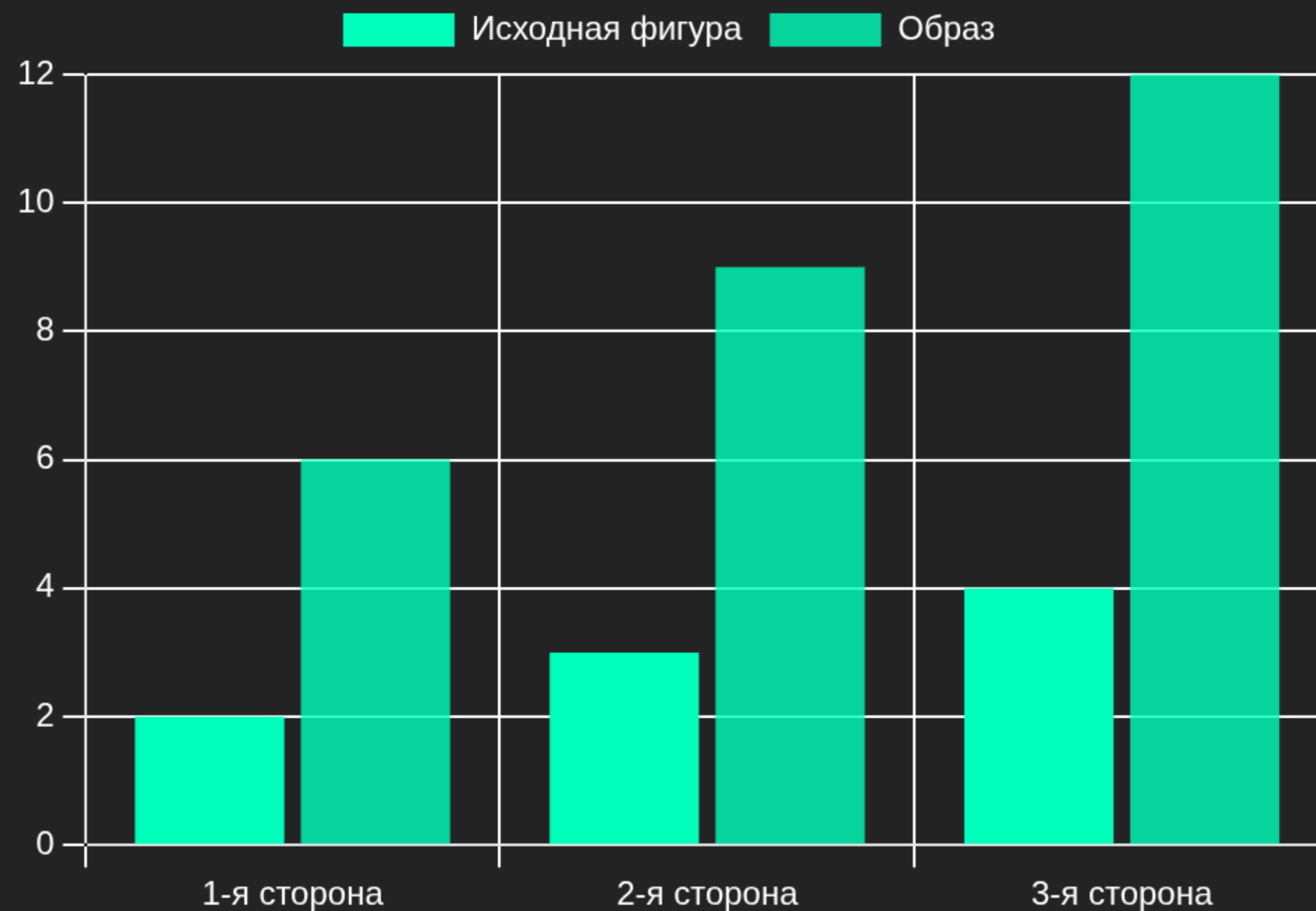
Соответствие должно идти в одном и том же порядке: каждая вершина одной фигуры связана только с одной вершиной другой. Иначе пропорции будут записаны неверно.

Основа решения

Именно по соответствующим элементам находят отношения сторон и делают вывод о подобии. Без этого шага невозможно уверенно доказать, что фигуры действительно связаны.



Коэффициент подобия как отношение длин



На диаграмме видно, что все соответствующие стороны увеличились одинаково, поэтому можно быстро проверить правильность вычислений.

Отношение каждой пары сторон равно 3, значит коэффициент подобия $k = 3$.

Учебный пример по теме подобия фигур



Как находят неизвестную сторону в подобных фигурах

01. Найти пары сторон

Сначала определяют, какие стороны являются соответствующими. Это главный шаг: именно он задаёт правильный порядок отношений и помогает избежать ошибок при составлении пропорции.

02. Составить пропорцию

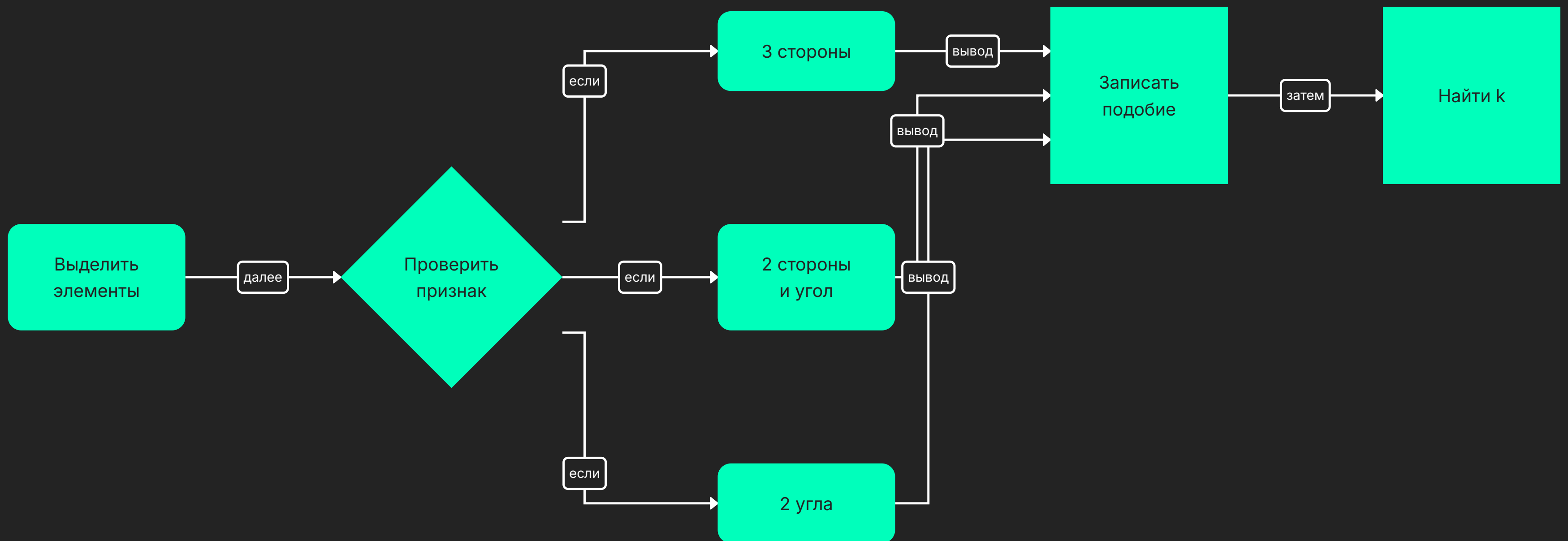
Затем записывают отношение известных сторон и приравнивают его отношению с неизвестной величиной. Если фигура увеличена в 2 раза, все соответствующие стороны умножаются на 2.

03. Проверить ответ

После вычисления важно убедиться, что найденная сторона согласуется с коэффициентом подобия и условием задачи. При уменьшении фигуры коэффициент меньше 1, но пропорции сохраняются.

Алгоритм доказательства подобия треугольников

Последовательность проверки признака и нахождения коэффициента подобия



Гомотетия: определение и центр преобразования

01

Центр гомотетии

Преобразование задаётся точкой O , которую называют центром гомотетии. Все точки фигуры после преобразования связаны с этим центром и лежат на соответствующих лучах.

02

Коэффициент k

Число k показывает, во сколько раз изменяются расстояния от центра. Если k больше 1, фигура становится больше; если $0 < k < 1$, она уменьшается.

03

Сохранение направления

При положительном коэффициенте точка образа остаётся на том же луче, что и исходная точка. Это помогает легко построить новую фигуру по заданному центру.

04

Отрицательный коэффициент

Если k отрицателен, образ точки оказывается по другую сторону от центра. Такое расположение меняет направление, но сохраняет связь между фигурами.

Как изображается гомотетия на чертеже

Луч от центра

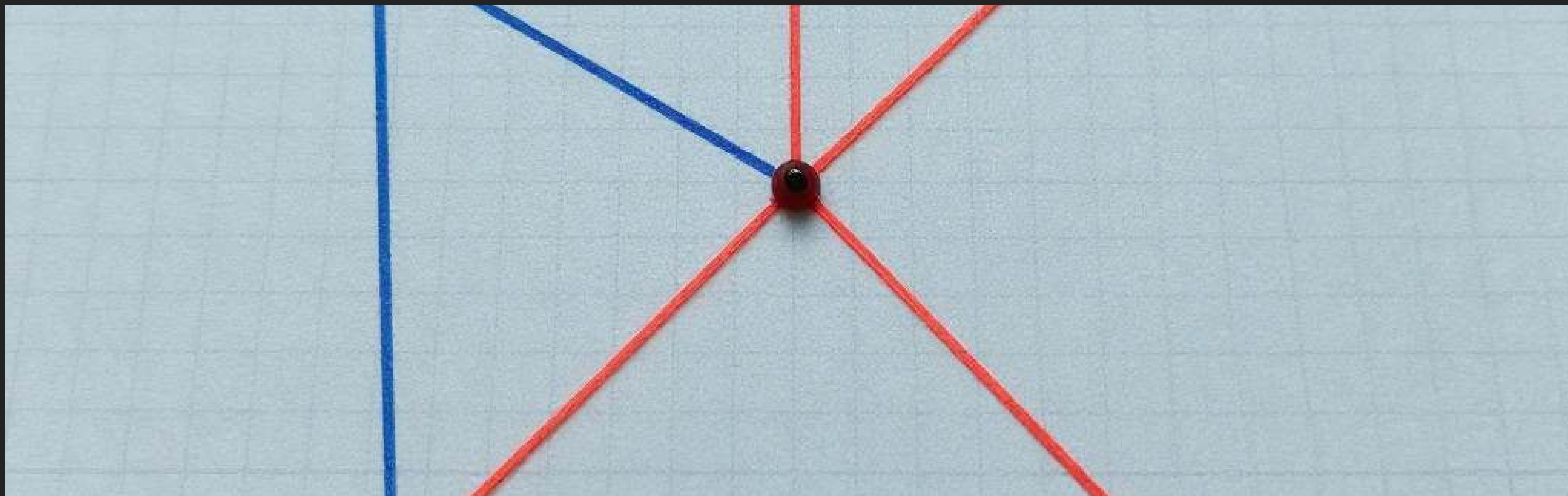
Сначала проводят лучи от центра гомотетии к вершинам исходной фигуры. На этих же лучах отмечают точки образа, чтобы сохранить точное направление преобразования.

Новая фигура

Затем соединяют полученные точки в том же порядке, что и в исходной фигуре. Так на чертеже появляется образ, который имеет ту же форму, но другой размер.

Что видно на рисунке

Такое изображение показывает, что все расстояния от центра изменяются одинаково. Поэтому гомотетия наглядно подтверждает связь между преобразованием и подобием фигур.



Положительный и отрицательный коэффициент гомотетии

■ Положительный коэффициент ■ Отрицательный коэффициент



Знак коэффициента показывает, по какую сторону от центра окажется образ фигуры. Модуль коэффициента определяет, во сколько раз изменятся расстояния.

При положительном коэффициенте сохраняется ориентация фигуры, при отрицательном — образ переходит на противоположную сторону от центра.

Схема по определению гомотетии, 9 класс

Свойства гомотетии



Сохраняет прямые

Любая прямая после преобразования остаётся прямой, а параллельные прямые сохраняют параллельность. Это делает построения на чертеже удобными и наглядными.



Сохраняет углы

Гомотетия не изменяет величины углов, поэтому у исходной фигуры и её образа совпадает форма. Именно это позволяет говорить о подобии полученных фигур.



Меняет размеры одинаково

Все соответствующие расстояния от центра изменяются в одно и то же число раз. Поэтому каждая сторона образа связана с исходной стороной одной и той же пропорцией.

Подобие и гомотетия: сравнение

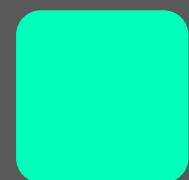
Таблица показывает, что подобие описывает связь фигур, а гомотетия — способ получить такую фигуру.

Понятие	Суть	Результат
Подобие	Равные углы	Пропорц. стороны
Гомотетия	Центр и k	Подобная фигура
Связь	Фигура	Преобразование

Подобие — это свойство фигур, а гомотетия — преобразование, которое его создаёт. Любая гомотетия даёт подобные фигуры.

Обобщение определений из курса геометрии

Подобие прямоугольных треугольников



Опорный прямой угол

У прямоугольных треугольников уже есть один общий угол — прямой. Это упрощает доказательство подобия и позволяет быстрее сравнивать фигуры в задачах.



Один острый угол

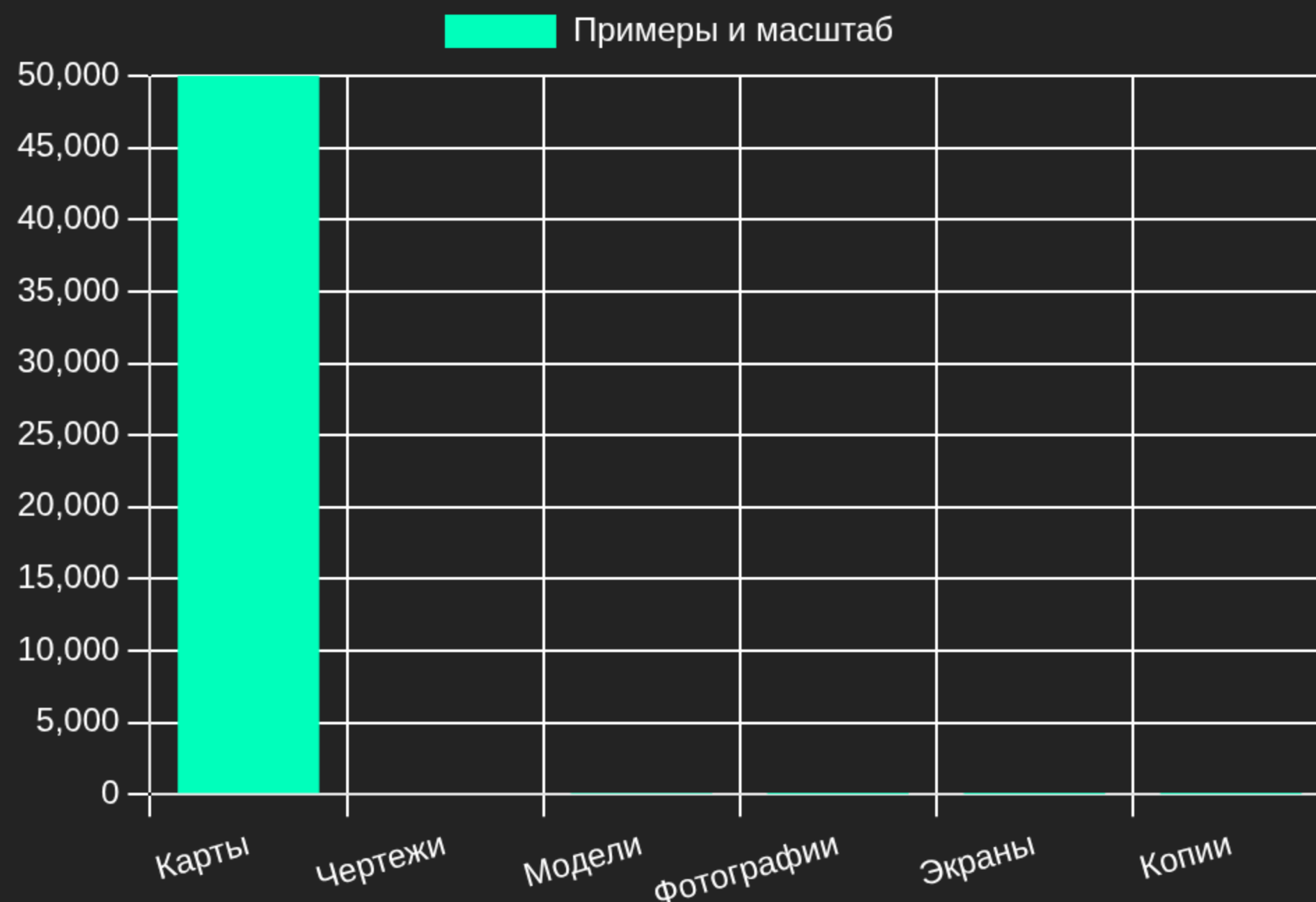
Если совпадает ещё один острый угол, то треугольники подобны по двум углам. Такой признак особенно удобен в задачах на высоту, тень и измерения на местности.



Практические применения

Подобные прямоугольные треугольники помогают находить недоступные расстояния, высоты зданий и размеры предметов без прямого измерения. Здесь важны пропорции и аккуратная запись отношений.

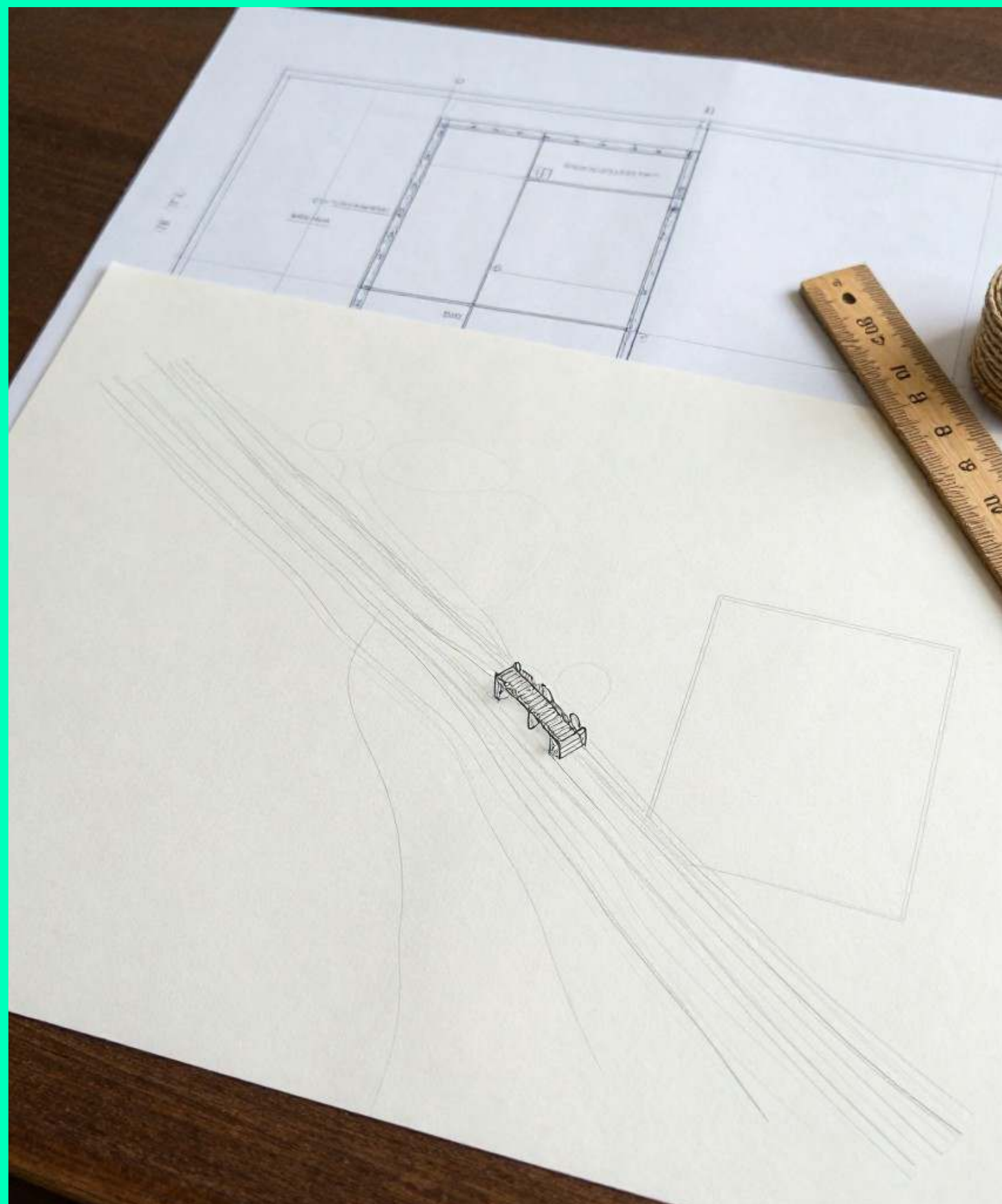
Где в жизни встречается подобие



В реальности масштаб помогает сохранять узнаваемость объектов даже при сильном уменьшении или увеличении. Это удобно для работы с изображениями и моделями.

Подобие делает возможным точное представление больших и маленьких объектов в одном формате: на бумаге, в макете и на экране.

Иллюстративная схема примеров применения подобия



Масштаб на плане и на карте

01. Читаем запись

Масштаб 1:100 показывает, что каждая единица на плане соответствует ста таким же единицам в реальности. Это позволяет быстро переводить сантиметры чертежа в реальные размеры.

02. Переходим к действительности

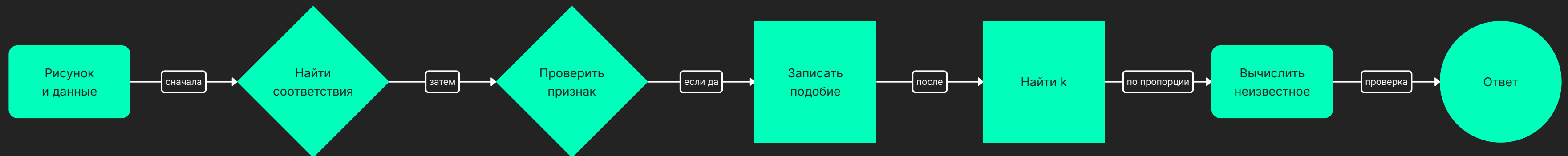
Если на карте указан масштаб 1:50 000, то 1 см на изображении означает 50 000 см на местности. Для удобства длину обычно переводят в метры или километры.

03. Используем подобие

Правильность измерений обеспечивается тем, что план и реальный объект подобны. Поэтому все расстояния изменяются в одинаковое число раз, а форма сохраняется.

Алгоритм решения задачи на подобие

Последовательность действий при работе с треугольниками и отношениями сторон



Типичные ошибки при изучении темы

01

Путают соответствие

Часто неверно сопоставляют вершины и стороны, из-за чего пропорции записываются в неправильном порядке. Перед вычислениями нужно проверить, какие элементы действительно соответствуют друг другу.

02

Смотрят только на рисунок

Нельзя делать вывод о подобии только по внешнему виду фигур. Нужно обязательно проверить равенство углов или пропорциональность сторон по одному из признаков.

03

Забывают о гомотетии

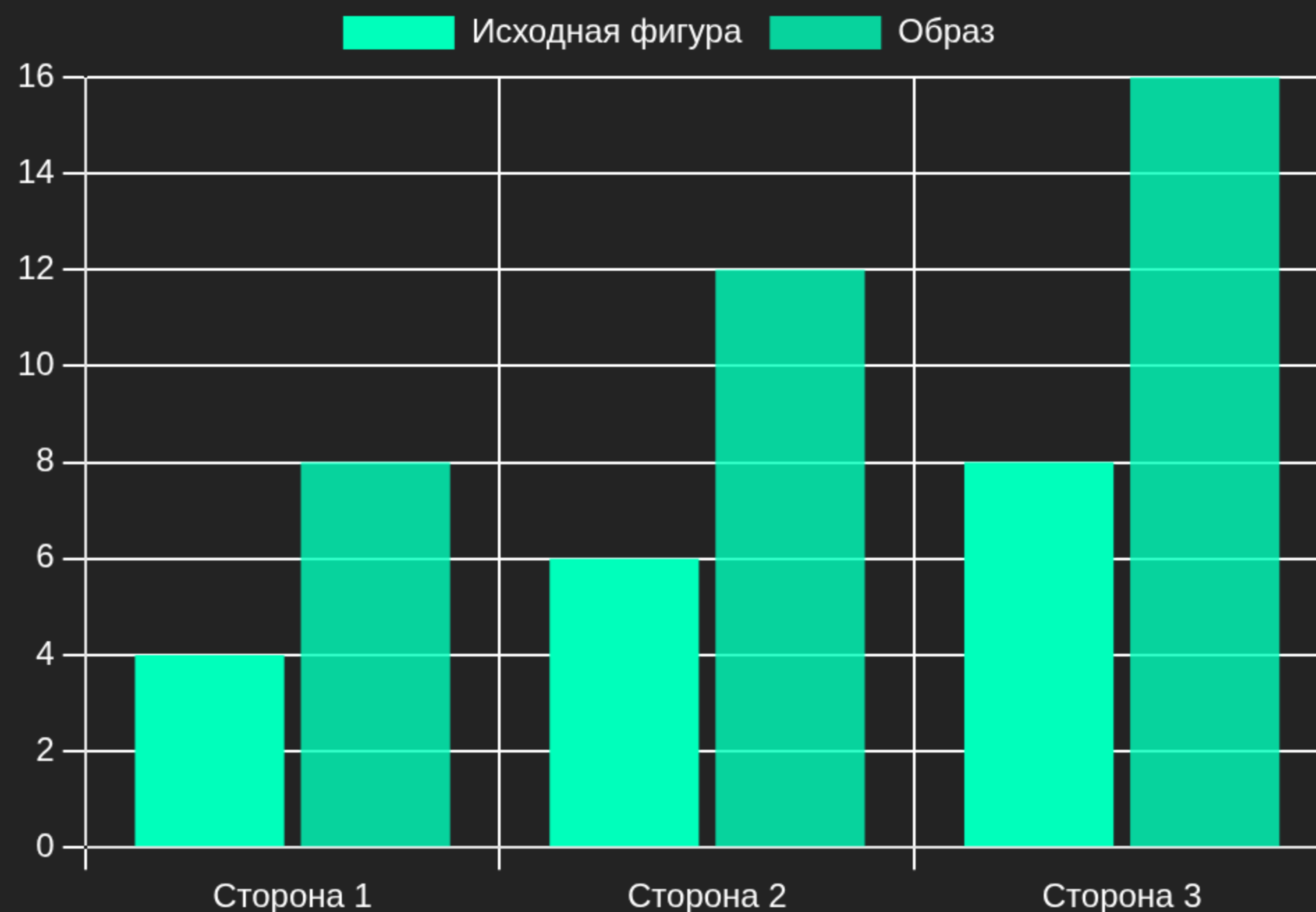
В задачах на гомотетию иногда не учитывают центр преобразования и знак коэффициента. Из-за этого образ строят в неверном месте относительно исходной фигуры.

04

Ошибаются в отношениях

Неверная запись дроби или перепутанный порядок деления приводит к неправильному ответу. Особенно важно сохранять один и тот же порядок сравнения во всех отношениях.

Главные связи темы в числах и формулах



Числовой пример показывает, что одна и та же пропорция действует для всех сторон. Это и есть главный признак подобия в измерениях.

Если каждая сторона увеличилась в два раза, то коэффициент подобия равен 2. Одинаковое отношение сохраняется для всей фигуры.

Иллюстративный пример по теме подобия и гомотетии

Итог: форма остаётся, размер меняется

Подобие помогает сравнивать фигуры разного размера, а гомотетия показывает, как именно получить такую фигуру. Умение работать с углами, пропорциями и масштабом полезно в задачах и в жизни.