

Линейные операции над векторами

Векторы складывают и масштабируют, чтобы вычислять направления и перемещения в координатах.



Зачем изучать векторные операции в 10 классе

Векторы описывают перемещение, скорость, силу и другие величины с направлением. Координатный метод позволяет считать быстрее и точнее по данным точек. Тема опирается на координаты точек, длину отрезка и параллельность прямых и готовит к уравнению прямой.



Что такое вектор и как он задаётся

Вектор обозначают направленным отрезком: у него есть начало и конец, а также длина и направление. Именно направление отличает вектор от обычной величины, заданной только числом.

Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление, даже если расположены в разных местах чертежа. Поэтому важна не «точка приложения», а геометрический «пучок» свойств.

В декартовой системе координат вектор задаётся координатами: на плоскости это пара чисел, в пространстве — тройка. Модуль вектора в плоскости находят как длину отрезка по теореме Пифагора.

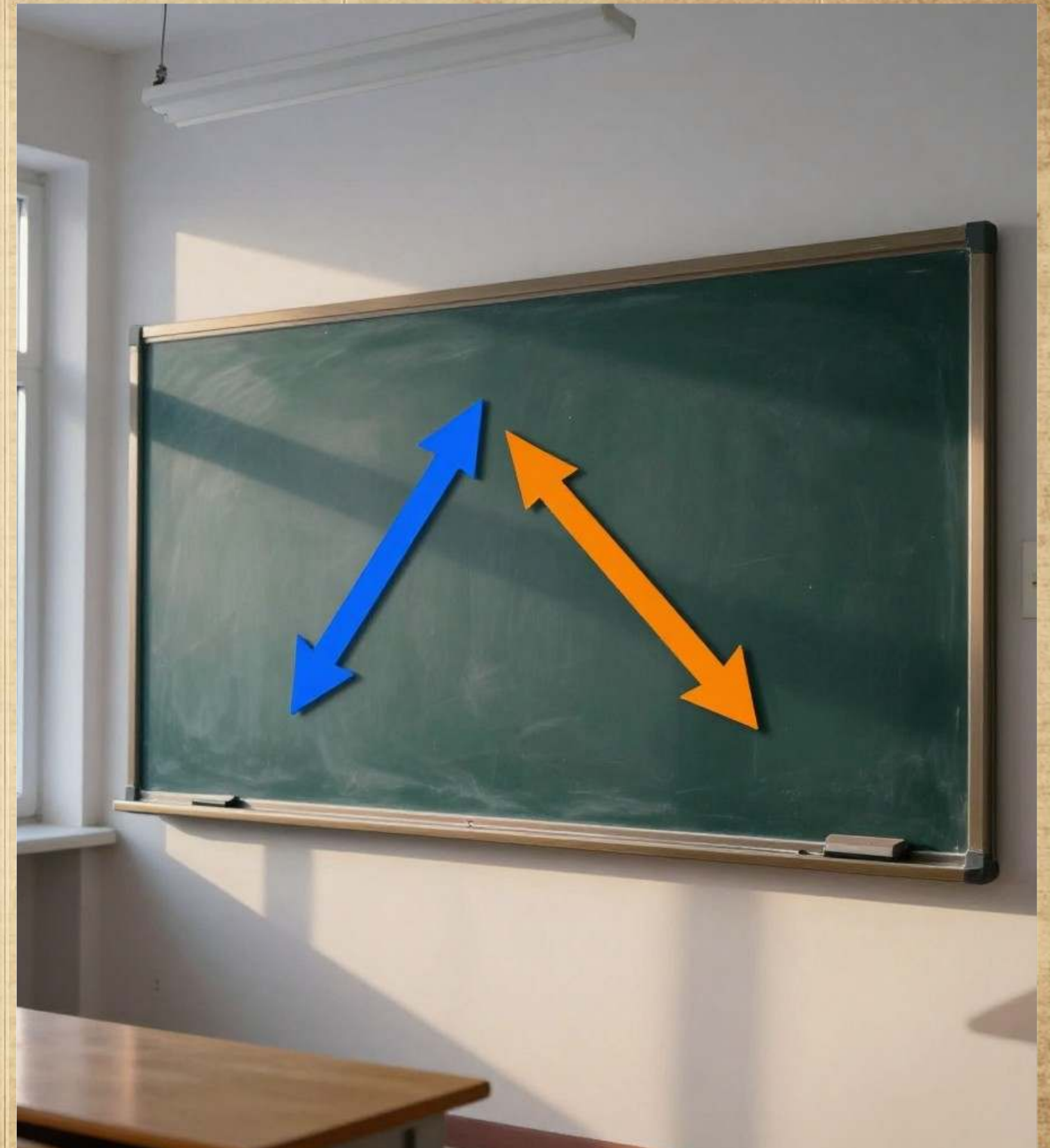
Сложение векторов: правило треугольника и параллелограмма

Правило треугольника

Сумма двух векторов получается, когда один вектор последовательно откладывают от конца другого. Тогда вектор от начала первого к концу второго и будет вектором суммы.

Параллелограмм в координатах

Альтернативная геометрическая постройка даёт тот же результат: диагональ параллелограмма, построенного на данных векторах. В координатах соответствующие компоненты складываются независимо: $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.



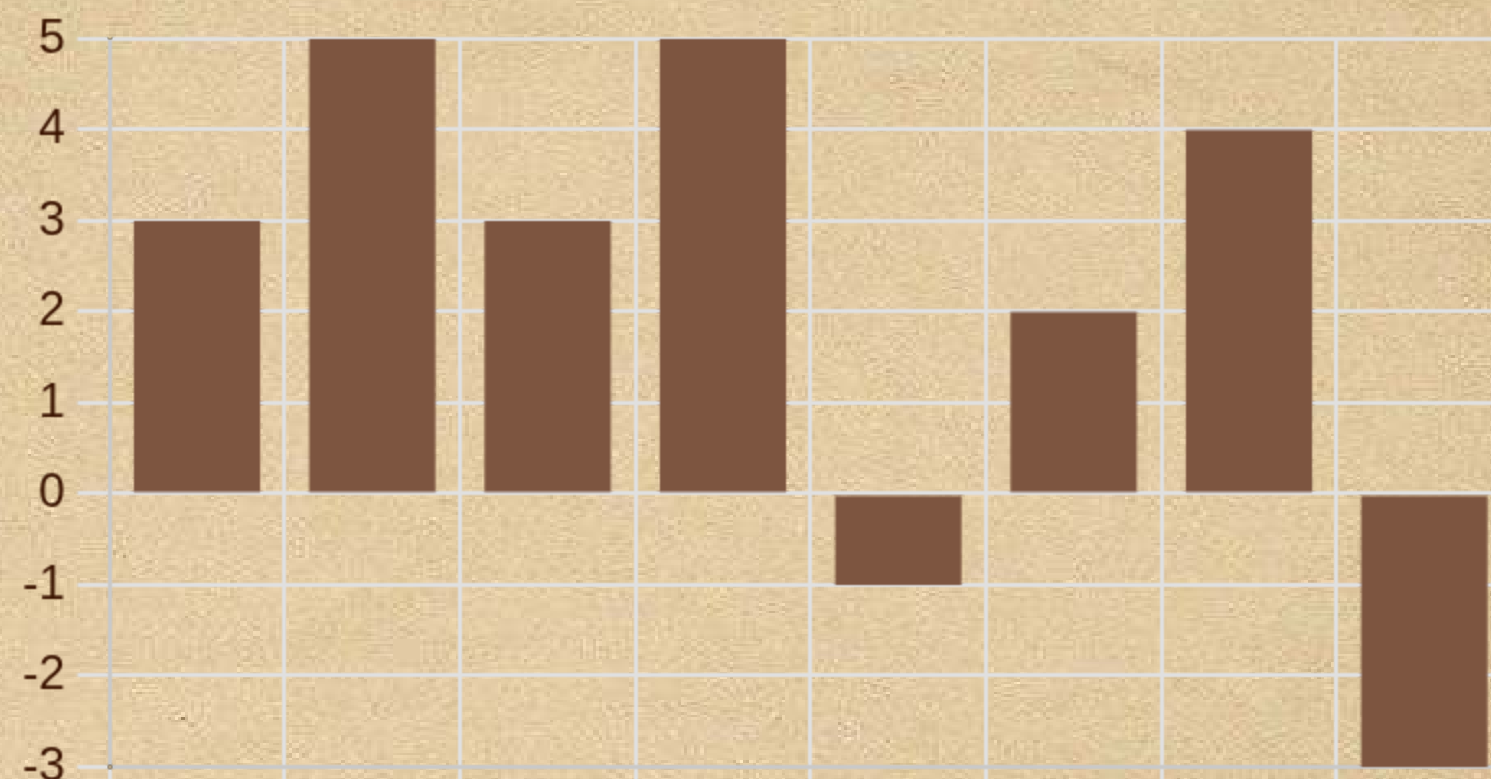
Как складываются координаты векторов

По каждому примеру сравнивают сумму координат x и y : получаются одинаковые числа для построения «на рисунке» и вычисления «по формулам».

Диаграмма показывает независимость осей: изменение координаты по x никак не влияет на координату по y , поэтому сложение работает по компонентам.

Сборка примеров на основе координатной формулы (школьный курс), типовые задания на сложение векторов.

Координаты при сложении векторов



Свойства сложения векторов

Переместительное свойство утверждает: $a + b = b + a$. Геометрически это означает, что диагональ при построении по треугольнику или параллелограмму не зависит от порядка «первого» вектора.

Сочетательное свойство задаёт порядок скобок: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Оно позволяет группировать вычисления, не меняя итогового вектора суммы.

Нулевой вектор обозначают как вектор с нулевой длиной. Он не меняет результат: $a + o = a$, потому что «добавление» ничего не смещает по направлению.

Противоположные векторы имеют одинаковую длину и противоположные направления. Их сумма равна нулевому вектору, а значит, в координатах компоненты взаимно уничтожаются: $u + (-u) = o$.

Вычитание векторов

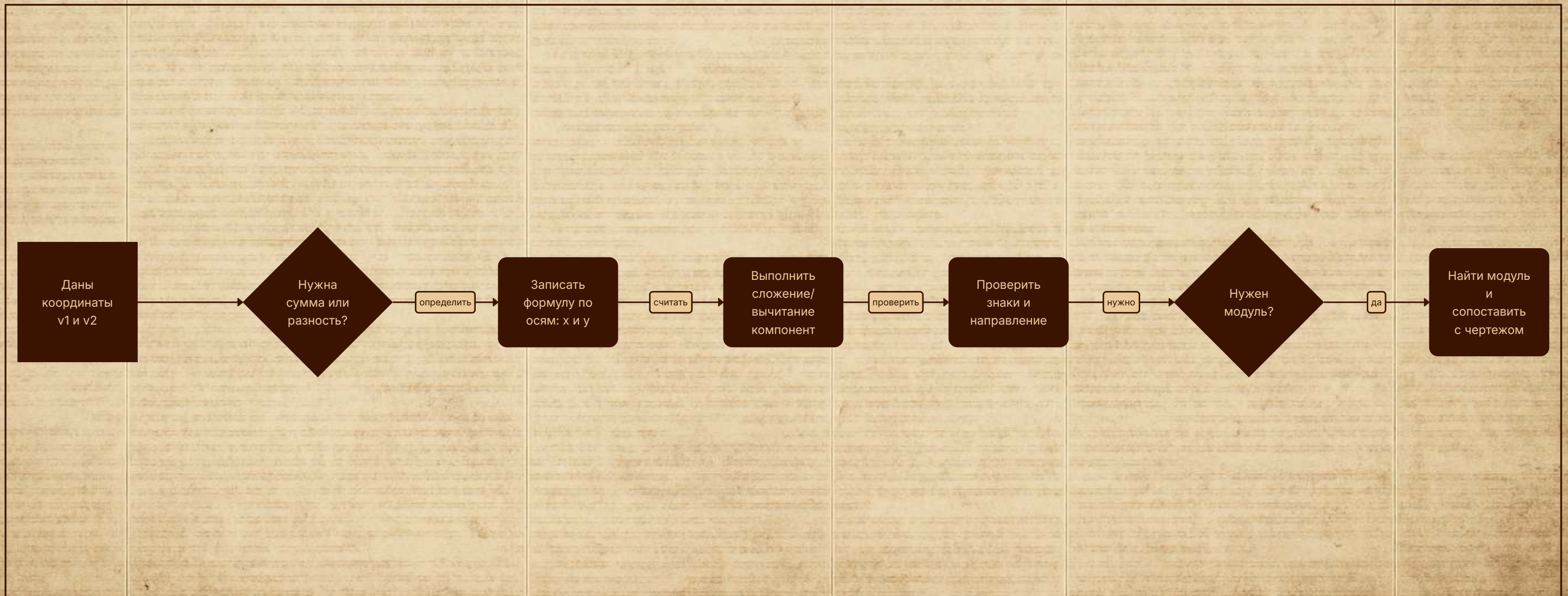
Разность $a - b$ понимают как сумму вектора a и вектора, противоположного b : $a - b = a + (-b)$. Поэтому вычитание всегда сводится к сложению после смены направления второго вектора.

Противоположный вектор сохраняет длину, но разворачивается на 180° . На чертеже это наглядно: разность «отражает» смещение относительно b и показывает, сколько нужно пройти, чтобы перейти от b к a .

В координатах вычитание выполняется по компонентам: $(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. Такая формула помогает находить разность перемещений и вектора от одной точки к другой без лишних построений.

Алгоритм вычисления суммы и разности векторов

Нужно сравнить векторы по координатам и связать результат с геометрическим смыслом на рисунке.



Основные формулы линейных операций

Сводим геометрический смысл операций к координатным формулам: сложение, вычитание и умножение на число. Это упрощает расчёты и проверку ответов.

Все операции сохраняют «векторную природу»: результат снова является вектором, а изменения длины и направления полностью описываются координатами.

Операция	Координатная запись	Геометрический смысл
Сложение	$(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$	объединение направлений
Вычитание	$(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$	добавление противоположного
Умножение на k	$(kx; ky)$	изменение длины и ориентации
При $k < 0$	$(kx; ky)$	смена направления

Учебные формулы курса «Векторы на плоскости и в пространстве» (10 класс).

Announcement

Office

Office of the Secretary of the State of New York
Albany, New York
The following is a list of the names of the members of the State of New York who have been elected to the office of the Secretary of the State of New York for the year 1911.

laking Ace

The following is a list of the names of the members of the State of New York who have been elected to the office of the Secretary of the State of New York for the year 1911.

Making A

The following is a list of the names of the members of the State of New York who have been elected to the office of the Secretary of the State of New York for the year 1911.

О
При таком
коэффициенте
результатом
становится нулевой
вектор.

Определение умножения вектора на
число в школьном курсе геометрии.

При умножении вектора на k
каждая координата
умножается на k . Это
управляет длиной, а знак
коэффициента меняет
ориентацию; при $k=0$
получается нулевой вектор.

Bus

Trade Rev

They

The following is a list of the names of the members of the State of New York who have been elected to the office of the Secretary of the State of New York for the year 1911.

Issue

THE PLAN

Как коэффициент влияет на длину и направление

Если исходный вектор имеет модуль 1, то после умножения на k его длина становится $|k|$. При $k < 0$ длина та же, но направление меняется на противоположное.

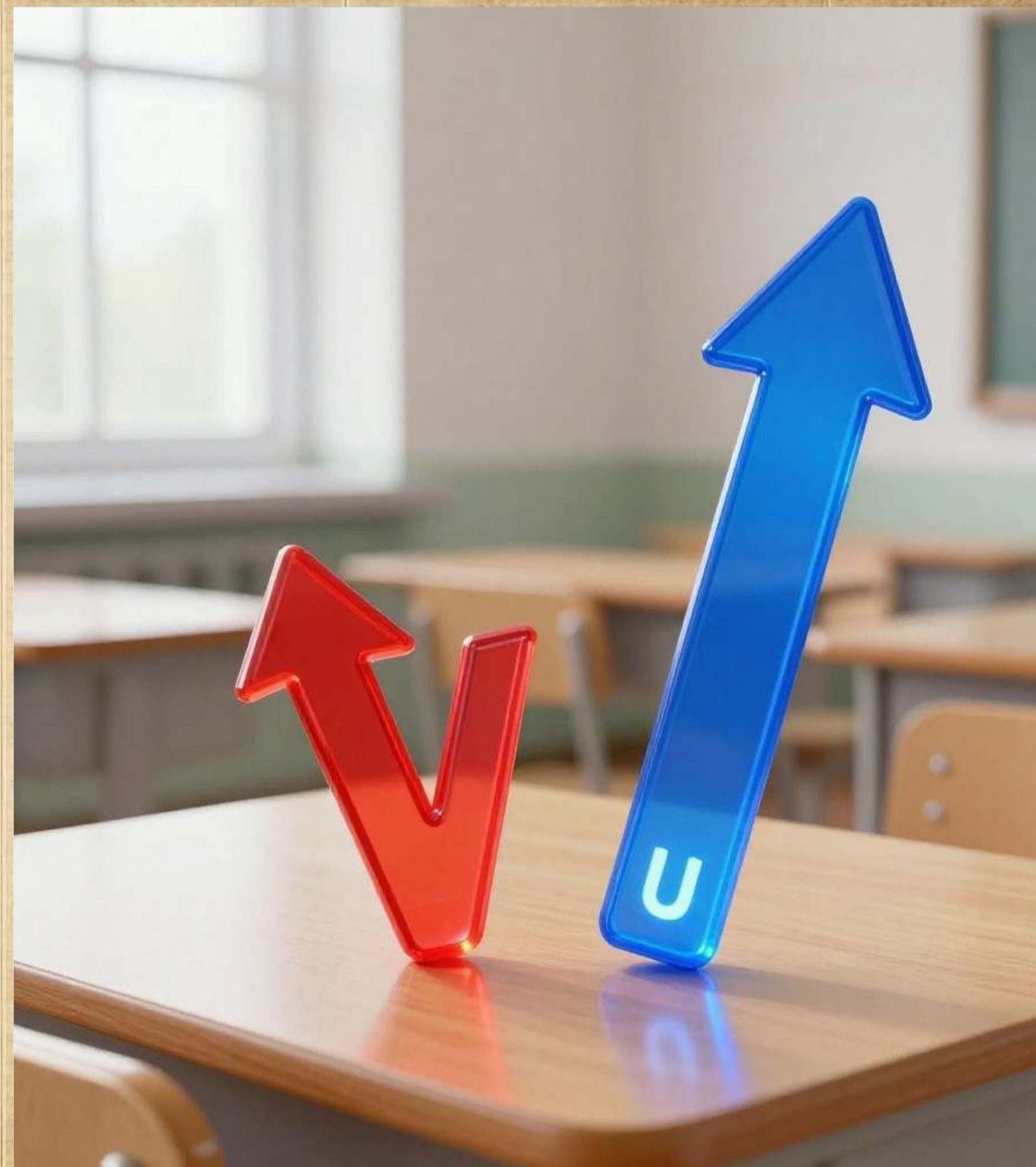
График показывает симметрию относительно $k=0$: длина зависит от модуля коэффициента. Смена ориентации связана не с величиной $|k|$, а только со знаком k .

Собственные вычисления (допущение $|u|=1$), 2026-05-14



Геометрический смысл линейной комбинации векторов

- Линейная комбинация $a \cdot u + b \cdot v$ означает: берётся вектор u , затем он масштабируется коэффициентом a , после чего к полученному вектору прибавляется масштабированный v с коэффициентом b .
- Если $a=0$, вклад направления u исчезает и итог определяется только $b \cdot v$. При разных знаках коэффициентов вектора могут складываться или частично компенсировать друг друга, меняя итоговую ориентацию.



Вектор между двумя точками в координатной плоскости



Координаты при переходе

Если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор AB имеет координаты $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Это прямой «рецепт» перемещения без сложного построения.



Проверка параллельности

Сравнивая координаты, можно быстро понять, параллельны ли векторы. Если их координаты пропорциональны, направления совпадают или противоположны, и чертёж получается только как визуализация.



Средняя точка и движение

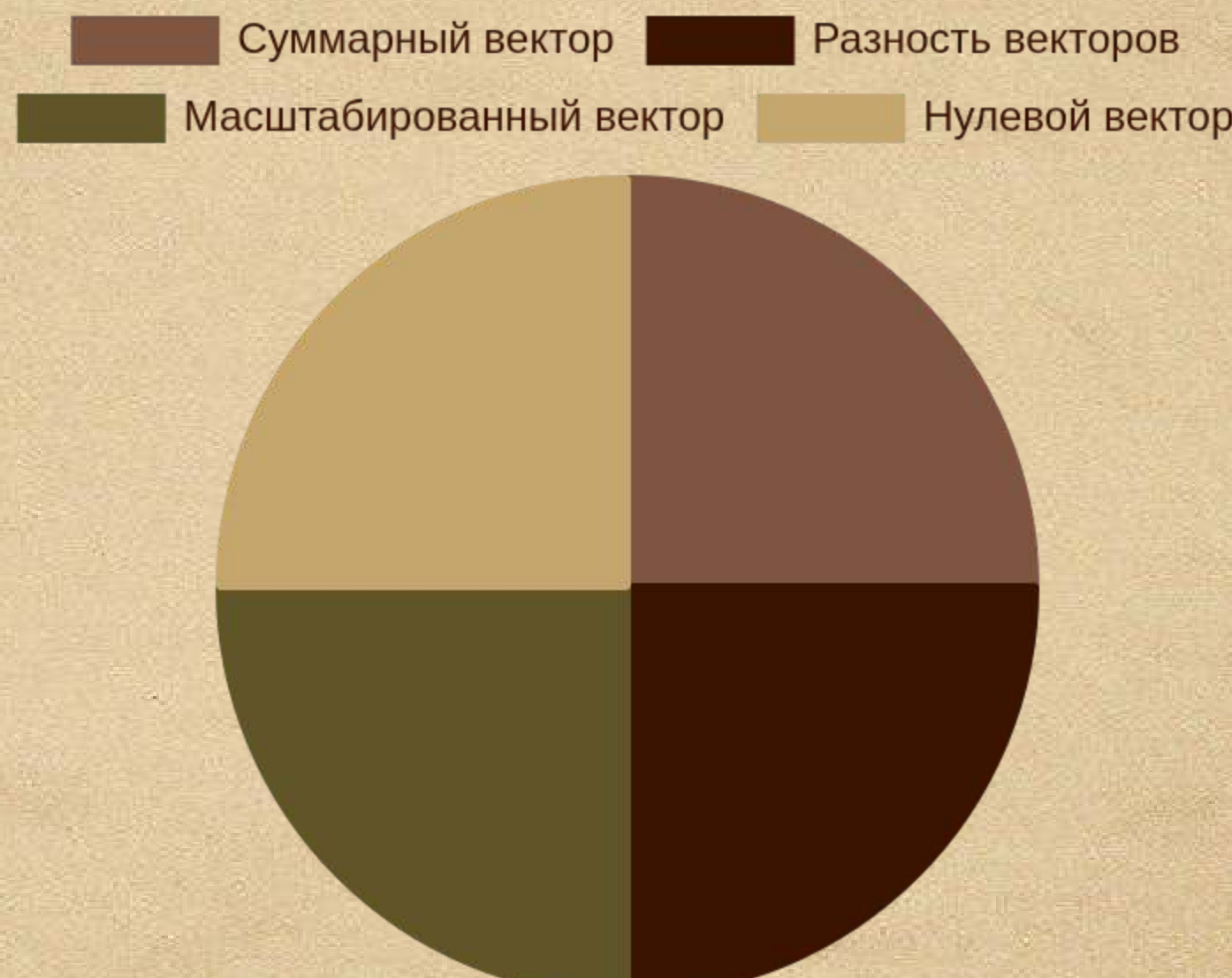
Формула для AB помогает искать середину отрезка и решать задачи на смещение: достаточно аккуратно работать с разностями координат и затем переводить результат в геометрический смысл.

Типы результатов при работе с векторами

Диаграмма показывает структуру возможных итогов при типовых заданиях на координатные операции: сумма, разность, масштабирование и случаи, когда результат обращается в ноль.

Даже при разных исходных данных ответ часто сводится к одному из четырёх «типов». Это удобно для самопроверки: куда направлен результат и какие компоненты должны получиться.

Условное демонстрационное распределение по видам итогов (не статистика конкретного сборника), 2026-05-14



Типичные ошибки при выполнении операций над векторами

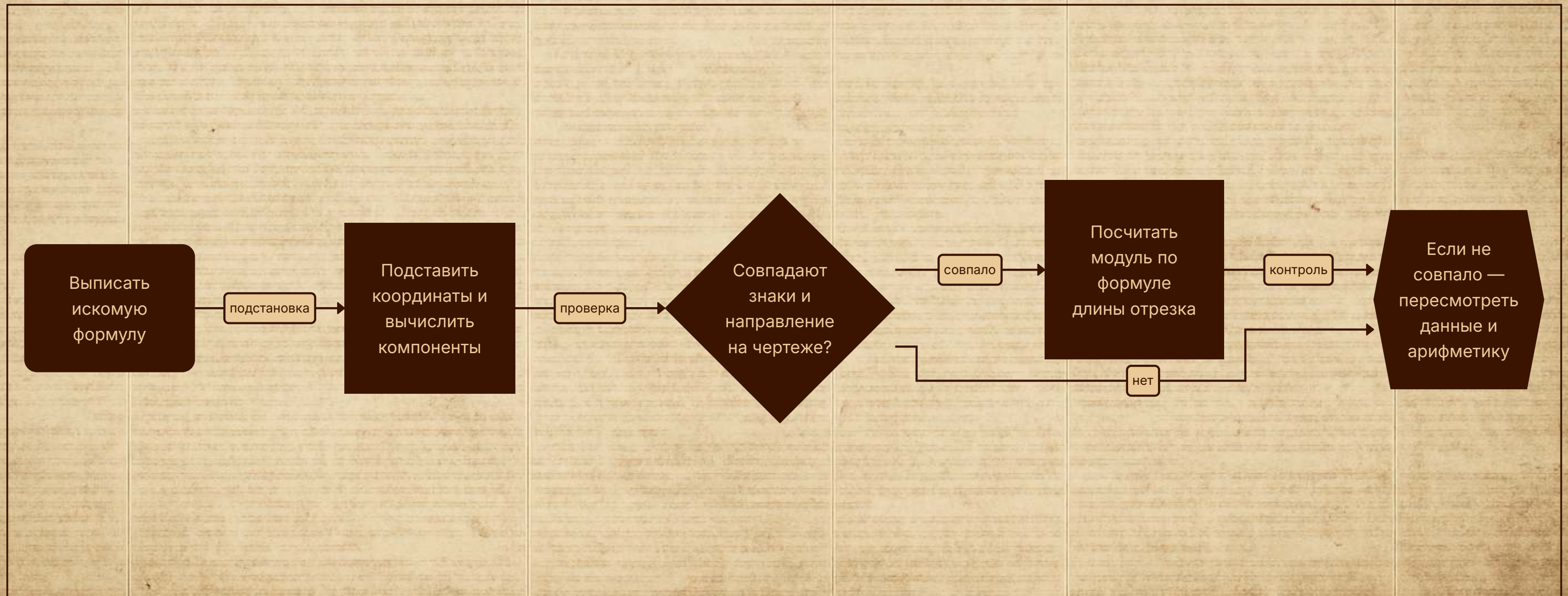
Ошибка	Правильное правило	Короткий пример
Складывают длины	Складывают соответствующие координаты: $(x_1+x_2; y_1+y_2)$	$ a + b \neq a+b $
Путают сумму и разность	Разность: $a-b = (x_1-x_2; y_1-y_2)$	Если b добавляют вместо вычитания, знак меняется
Забывают смену направления	При $k<0$ вектор становится противоположным: $(kx; ky)$	$(-2)x$ даёт противоположное направление
Складывают модули как числа	Модуль — отдельная характеристика, координаты вычисляются отдельно	$ a + b $ не даёт координаты результата

Ошибки чаще всего возникают, когда теряют различие между модулем и координатами, а также путают знаки при переходе от суммы к разности.

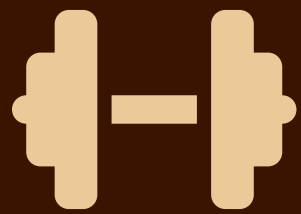
Чаще всего исправление сводится к одной проверке: действительно ли вы работали с координатами по осям и не потеряли знак и направление.

Проверка правильности ответа в векторной задаче

Пошаговая проверка по координатам, знакам и геометрическому смыслу уменьшает число ошибок.



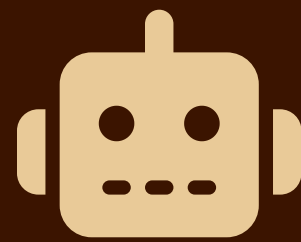
Примеры применения векторов в реальных задачах



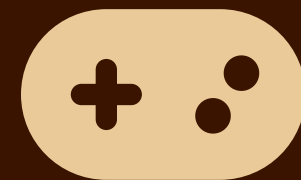
Физика и силы
При нахождении равнодействующей сил используют сложение векторов: каждая сила задаётся направлением и модулем, а итоговая сила получается как векторная сумма, удобная для расчёта траекторий.



Навигация и маршрут
В навигации векторы описывают перемещение: смена координат точки соответствует вектору движения. Это помогает сравнивать маршруты и оценивать смещение относительно исходной позиции.



Робототехника и движение
В робототехнике по координатам формируют команды перемещения: умножение на число задаёт масштаб шага, а сумма векторов объединяет действия в единое перемещение с нужной ориентацией.



Компьютерная графика
В графике координатные операции с векторами применяют для перемещения объектов, расчёта направления и корректного масштабирования. Вычитание точек позволяет получать «вектор взгляда» или направление между позициями.

Где чаще всего применяются линейные операции над векторами

Во многих прикладных задачах итоговое действие — это линейная комбинация направлений: сумма даёт результирующее перемещение, вычитание — смещение относительно заданного ориентира.

Независимо от области, математика сводится к вычислению компонент и проверке знаков. Чем понятнее этот алгоритм, тем быстрее анализируется задача.

ти применения линейных операций над векторами (условная сравните



Условная шкала по областям применения (для наглядности), 2026-05-14

Итоговые правила по теме

Сложение векторов выполняется по координатам: $(x_1+x_2; y_1+y_2)$.
Геометрически это объединение направлений, когда один вектор «приставляют» к концу другого.

Вычитание сводится к сложению с противоположным вектором: $a-b = a+(-b)$, а в координатах получается $(x_1-x_2; y_1-y_2)$. Такой подход сразу контролирует знаки.

Умножение на число k изменяет длину в $|k|$ раз, а при $k < 0$ меняет направление на противоположное: $(kx; ky)$. При $k=0$ получается нулевой вектор.

Нулевой и противоположные векторы играют роль «маячков» при самопроверке: если результат должен стать нулём или направить в обратную сторону, это видно и по координатам, и по рисунку.

Единая связь геометрии и алгебры

Линейные операции над векторами образуют систему правил, которая связывает рисунок и вычисления. Она помогает находить перемещения, сравнивать направления и уверенно решать задачи в координатах.

Announcement

Office



Making A

THE PLAN

Bus

Trade Rev

They

Issue