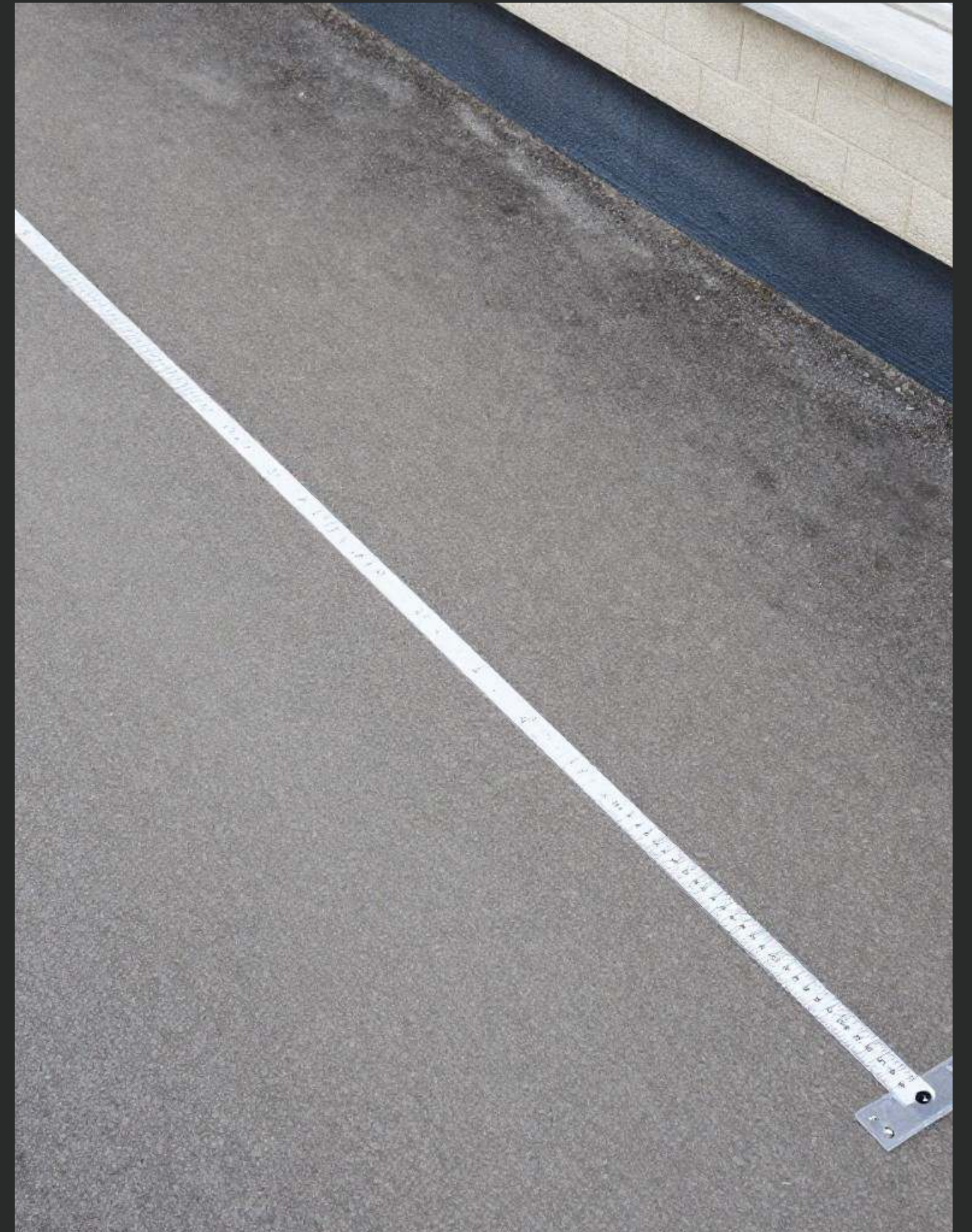


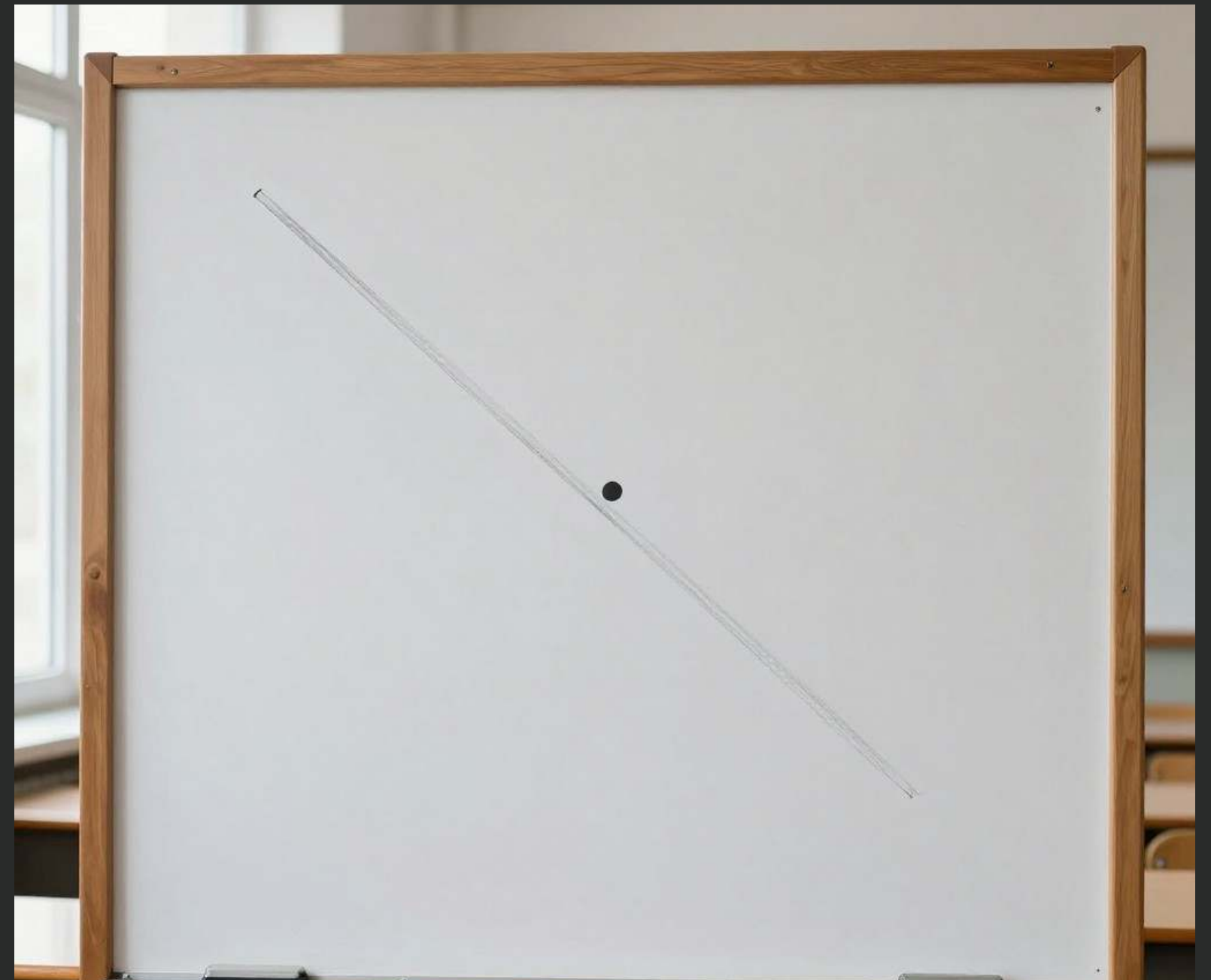
Расстояние в геометрии: точка, прямая, параллельные прямые

Кратчайший путь в геометрии всегда
задаёт перпендикуляр.



О чём пойдёт речь и зачем это нужно

Разберём, как геометрия находит кратчайшее расстояние между объектами, почему важен перпендикуляр и как эти идеи работают в координатах и на чертежах.



Идея кратчайшего расстояния

Минимальная длина

Расстояние в геометрии — это наименьшая длина отрезка между объектами. Если выбрать любой другой путь, он окажется длиннее и не будет считаться расстоянием.

1

Прямой угол

Для точки и прямой кратчайший отрезок всегда образует прямой угол с прямой. Именно поэтому ищут не случайный отрезок, а перпендикуляр.

2

Общая высота

У параллельных прямых расстояние одинаково в любой точке. Его показывает общий перпендикуляр, который соединяет прямые без наклона.

3

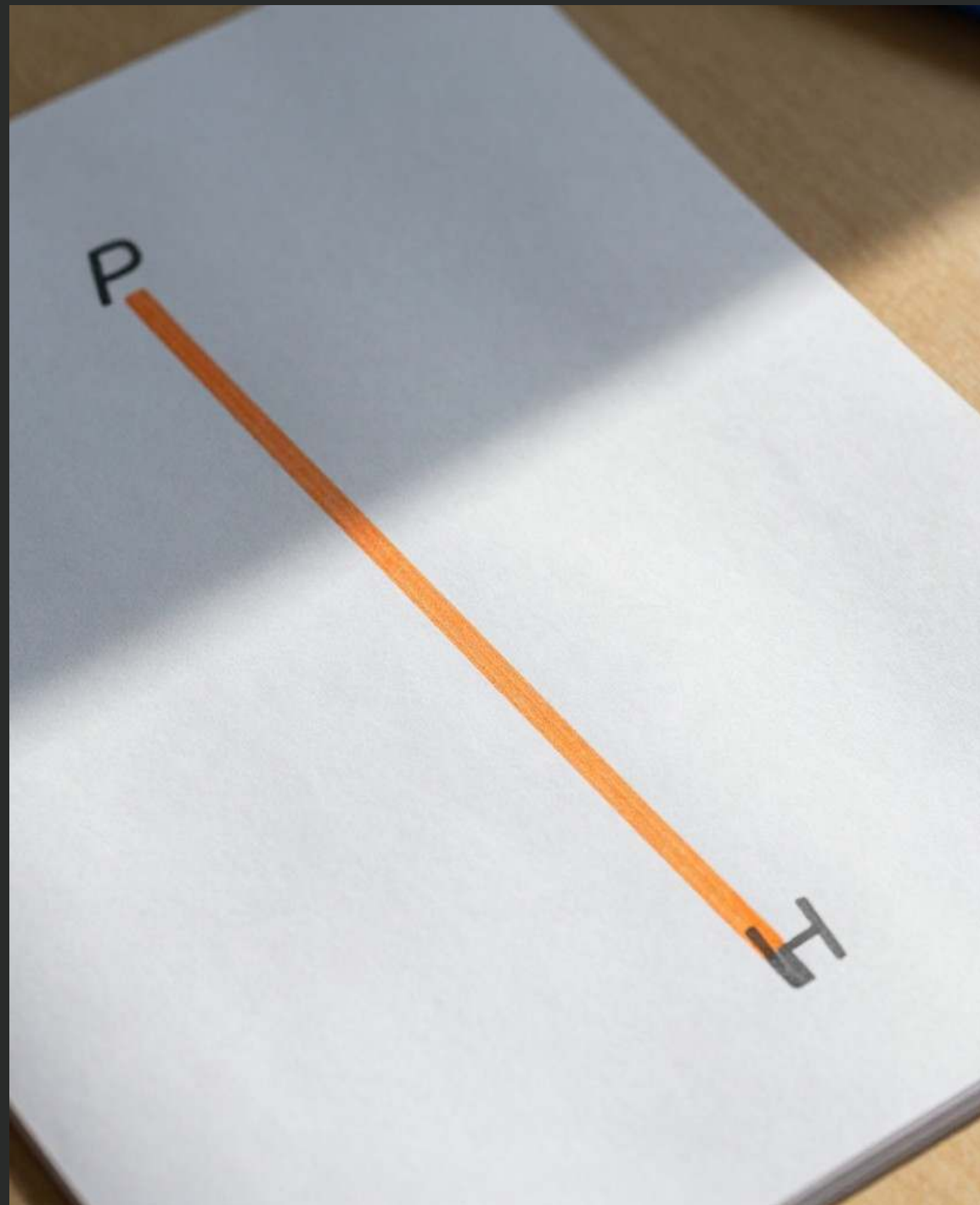
Расстояние от точки до прямой

Построение

Пусть дана точка P и прямая a . Из точки P опускают перпендикуляр на прямую, чтобы получить ближайшее соединение с ней.

Единицы

Длина этого отрезка измеряется в тех же единицах, что и чертёж: в сантиметрах, метрах или в клетках тетради.



Обозначение

Точку пересечения перпендикуляра с прямой обозначают H . Отрезок PH становится искомым расстоянием от точки до прямой.

Что важно помнить

Если точка задана на рисунке, важно аккуратно провести именно перпендикуляр, а не любой отрезок до прямой.

Почему именно перпендикуляр

01 Точка на прямой

Когда точка лежит на прямой, она уже находится на расстоянии 0 от этой прямой. В этом случае никакой дополнительный отрезок не нужен.

02 Единственная ближайшая точка

Если точка находится вне прямой, у неё есть единственная ближайшая точка на прямой. Это основание перпендикуляра, а не произвольная точка на линии.

03 Почему наклон длиннее

Наклонный отрезок всегда длиннее перпендикуляра. Это видно из свойств прямоугольного треугольника: гипотенуза больше любого катета.

04 Главный вывод

Поэтому именно перпендикуляр даёт наименьшее расстояние. Другой отрезок может соединять те же объекты, но он уже не будет кратчайшим.

$$2S / a$$

даёт высоту треугольника и часто используется как расстояние до основания.

Формула $h = 2S / a$ помогает находить высоту, а значит и расстояние, когда известны площадь фигуры и основание.

Формула в координатах

Уравнение прямой

Прямая на плоскости часто задаётся уравнением $ax + by + c = 0$. Оно удобно тем, что сразу описывает всю линию без построения на клетках.

1

Формула расстояния

Для точки с координатами x_0 и y_0 подставляют значения в формулу $d = |ax_0 + by_0 + c| / \sqrt{a^2 + b^2}$. Модуль не позволяет получить отрицательное расстояние.

2

Как не ошибиться

Ошибки обычно появляются из-за знаков и невнимательной подстановки координат. Поэтому полезно сначала выписать данные, а затем считать по шагам.

3

Проверка на простом примере

Проверка точки A

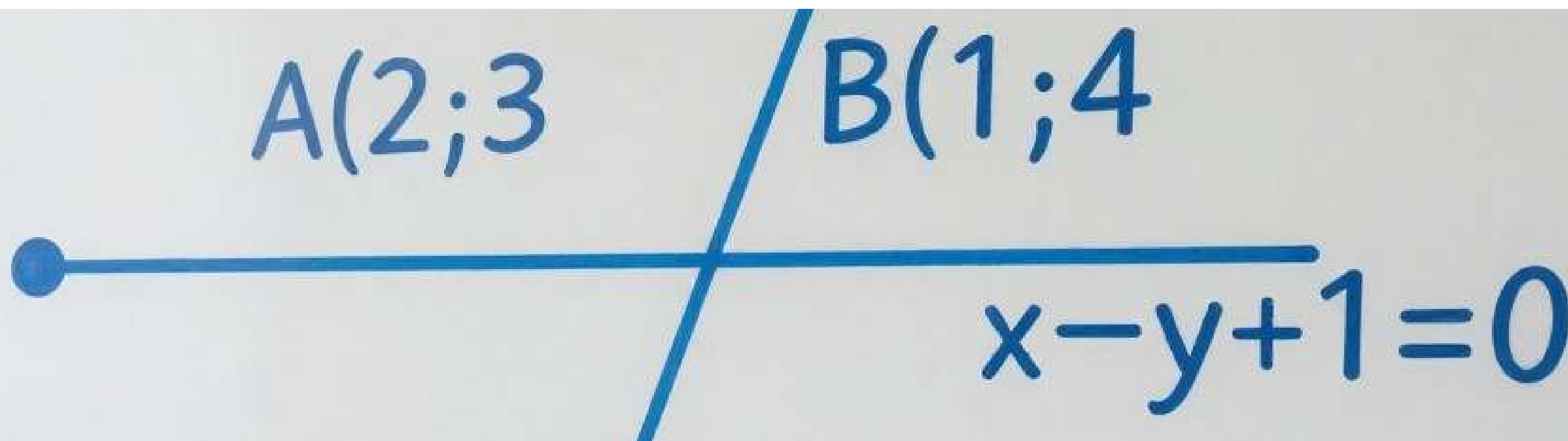
Для точки $A(2; 3)$ и прямой $x - y + 1 = 0$ подстановка даёт $d = |2 - 3 + 1| / \sqrt{2} = 0$. Значит, точка лежит на прямой.

Что означает ноль

Если расстояние равно нулю, это не ошибка вычислений, а признак того, что точка принадлежит прямой. В геометрии ноль означает совпадение с линией.

Попробуйте сами

Мини-упражнение: проверьте точку $B(1; 4)$ для той же прямой. Подставьте координаты в уравнение и решите, лежит ли точка на линии.



Типичные ошибки при нахождении расстояния

01 Неверный объект

Первая ошибка — искать расстояние до ближайшей вершины рисунка. Но нужно измерять именно до прямой, даже если другая точка кажется ближе на глаз.

02 Не тот отрезок

Вторая ошибка — брать наклонный отрезок вместо перпендикуляра. Такой отрезок соединяет точки, но не показывает кратчайшее расстояние.

03 Ошибка знака

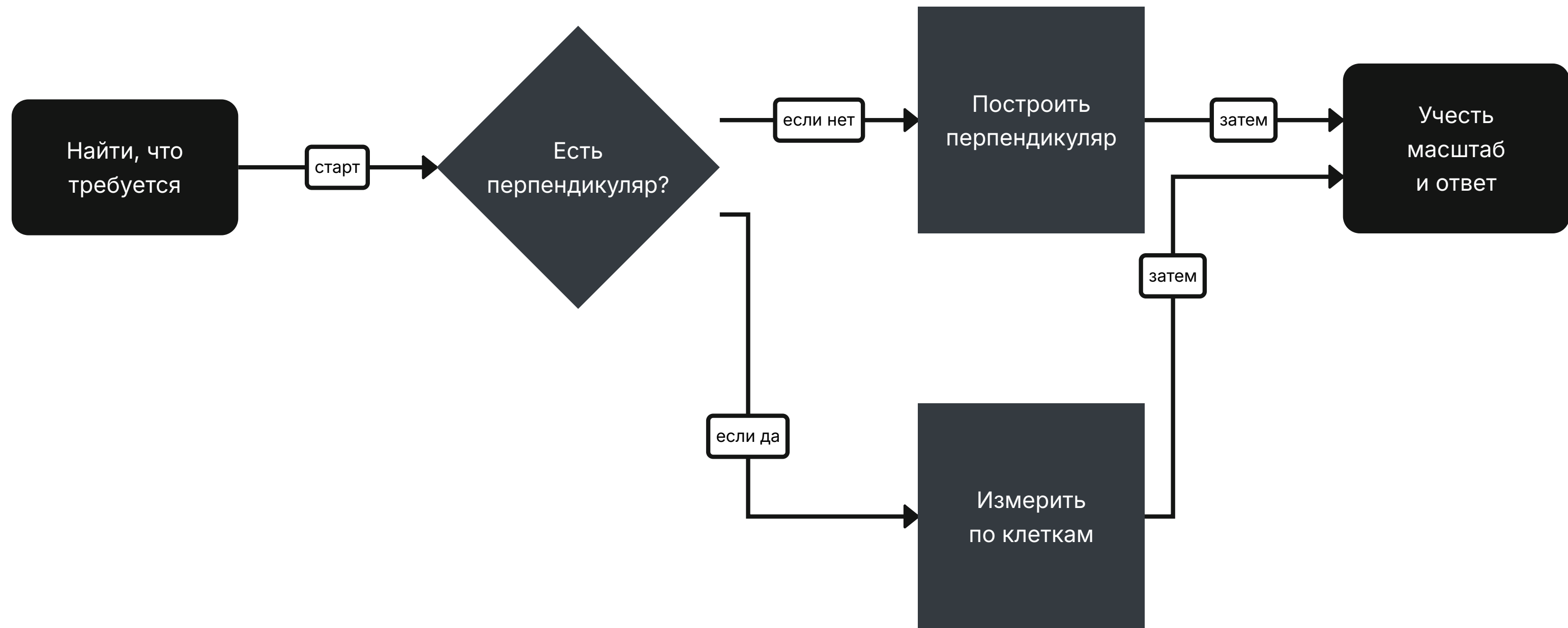
Третья ошибка — забывать модуль в формуле. Тогда ответ может получиться отрицательным, хотя расстояние в геометрии не бывает меньше нуля.

04 Проверка условия

Четвёртая ошибка — не проверять, что прямая и точка действительно заданы правильно. Перед вычислением полезно ещё раз переписать данные и знаки.

Как решать по рисунку

Пошаговая схема решения задач по рисунку и клетчатой бумаге.



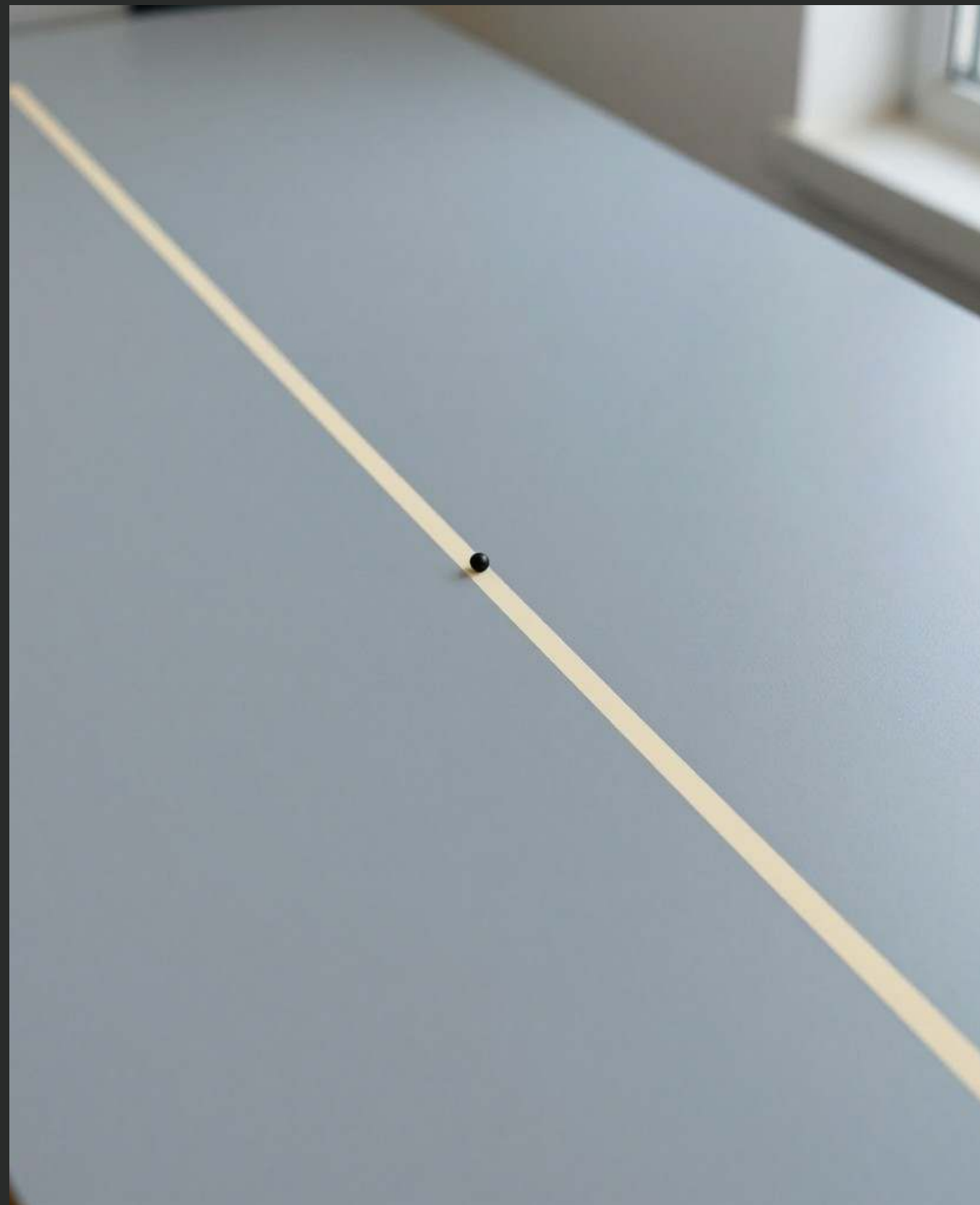
Расстояние между параллельными прямыми

Постоянная ширина

У параллельных прямых нет точки пересечения, поэтому расстояние между ними не зависит от выбора места на рисунке. Его измеряют по одному и тому же кратчайшему пути — общей перпендикулярной.

Почему это минимум

Любой наклонный отрезок между параллельными прямыми длиннее перпендикуляра. Поэтому именно перпендикуляр даёт минимальную длину, а значит, и искомое расстояние.



Как измеряют

Если взять точку на одной прямой и опустить из неё перпендикуляр на другую, полученный отрезок покажет расстояние между прямыми. Такой способ удобен и в чертеже, и в координатах.

Чтение рисунка

На схемах расстояние между параллельными прямыми часто изображают как отрезок с прямым углом у основания. Это помогает сразу увидеть, что измеряется именно кратчайший путь.

Почему достаточно одной общей перпендикулярной



Шаг 1

Сначала выбирают любую точку на одной из параллельных прямых и опускают из неё перпендикуляр на другую. Полученная высота показывает расстояние между линиями.

1

Шаг 2

Затем замечают, что все такие перпендикуляры равны. Параллельные прямые сохраняют одинаковую «ширину» на всём протяжении, поэтому результат не зависит от выбранной точки.

2

Шаг 3

Значит, достаточно измерить один общий перпендикуляр. Это самый короткий отрезок между прямыми, и именно его длина отвечает на вопрос задачи.

3

12

Параллельные прямые в координатах

01 Параллельность на плоскости

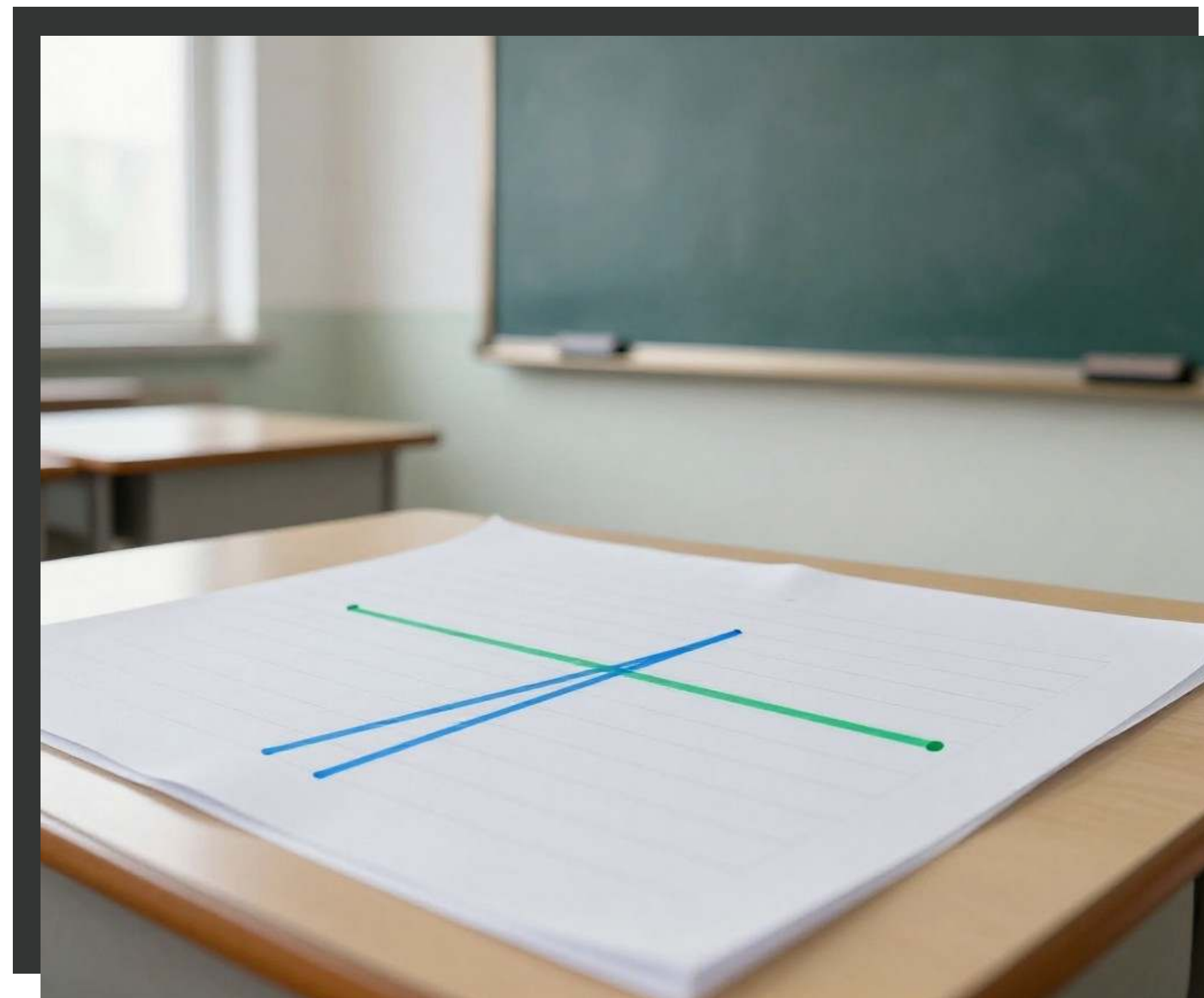
Прямые $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 3$ параллельны, потому что у них одинаковый коэффициент при x . Одинаковый наклон означает одно и то же направление.

02 Удобный способ

Чтобы найти расстояние, удобно взять любую точку с одной прямой и применить формулу расстояния от точки до другой прямой. Так ответ получается без лишних построений.

03 Запись в общем виде

Если обе прямые заданы в общем виде, можно сразу использовать их коэффициенты. Тогда вычисление сводится к подстановке чисел и аккуратной работе со знаком.

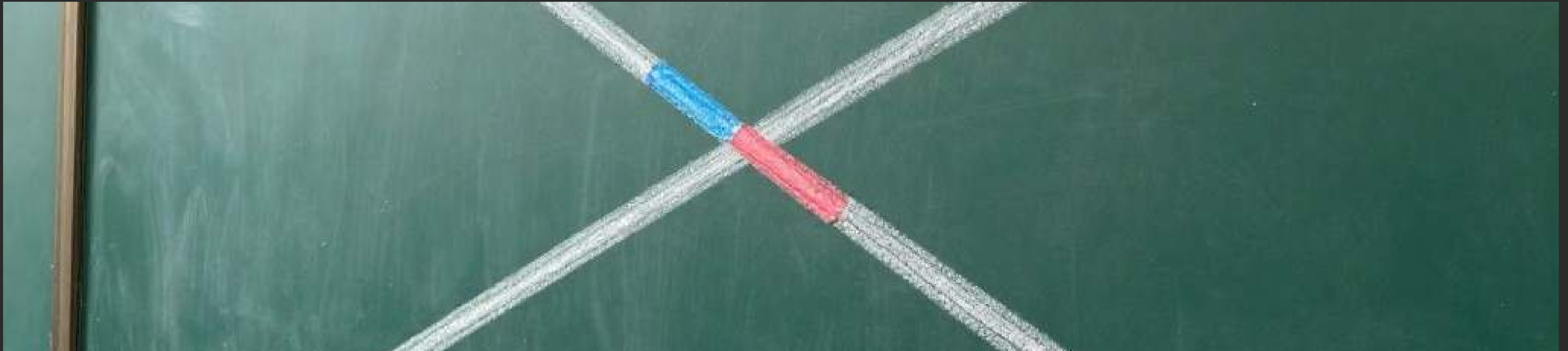


1 формула

объединяет проверку параллельности
и вычисление расстояния в одном шаге.

Формула расстояния между
параллельными прямыми
позволяет быстро получить
ответ без чертежа и подходит
для многих школьных задач.

Задача на нахождение параметра



1. Узнаём тип

Сначала сравнивают уравнения $x - y + k = 0$ и $x - y - 5 = 0$. Одинаковые коэффициенты при x и y показывают, что прямые параллельны.

1

2. Записываем уравнение

Далее подставляют в формулу расстояния: $|k + 5| / \sqrt{2} = 6/\sqrt{2}$. Здесь важно не потерять модуль и не перепутать знаки свободных членов.

2

3. Решаем модуль

После сокращения получаем $|k + 5| = 6$. Значит, возможны два ответа: $k = 1$ или $k = -11$, и оба нужно проверить в условии.

3

4. Проверяем ответ

Проверка показывает, что оба значения подходят, потому что меняют только положение прямой, а не её направление. В ответе записывают оба решения.

4
15

Сравнение расстояний в одной модели

Объекты	Коэффициенты	Расстояние
$2x - y + 4 = 0$	2, -1	
$2x - y - 8 = 0$	2, -1	$12/\sqrt{5}$
Параллельные прямые	одинаковые a, b	постоянно

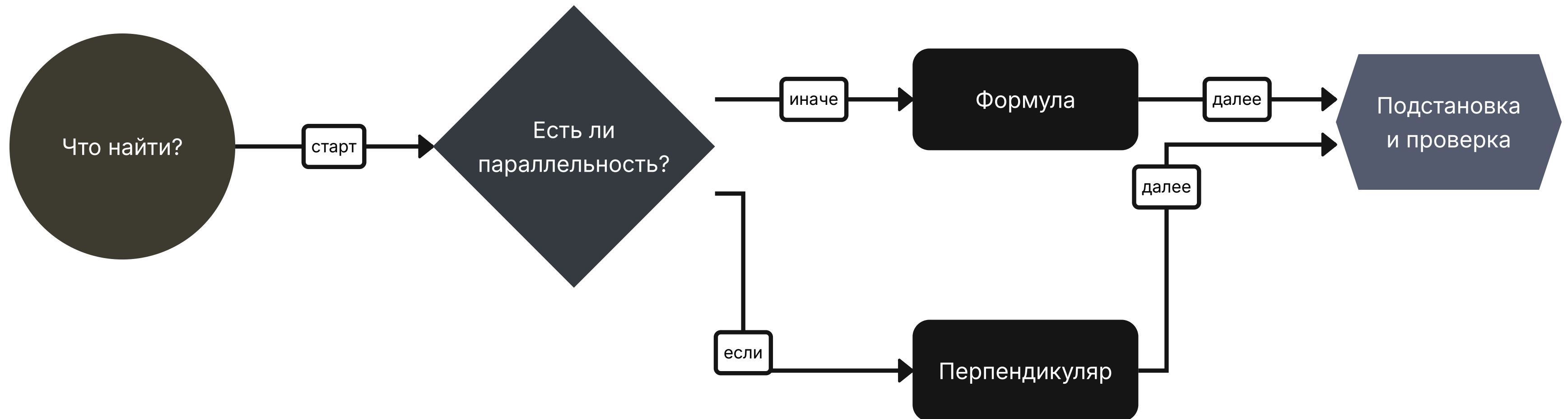
Школьная геометрия, формула расстояния между параллельными прямыми

Сравним один и тот же способ на двух параллельных прямых. Таблица показывает, как одинаковые коэффициенты и разные свободные члены влияют на расстояние.

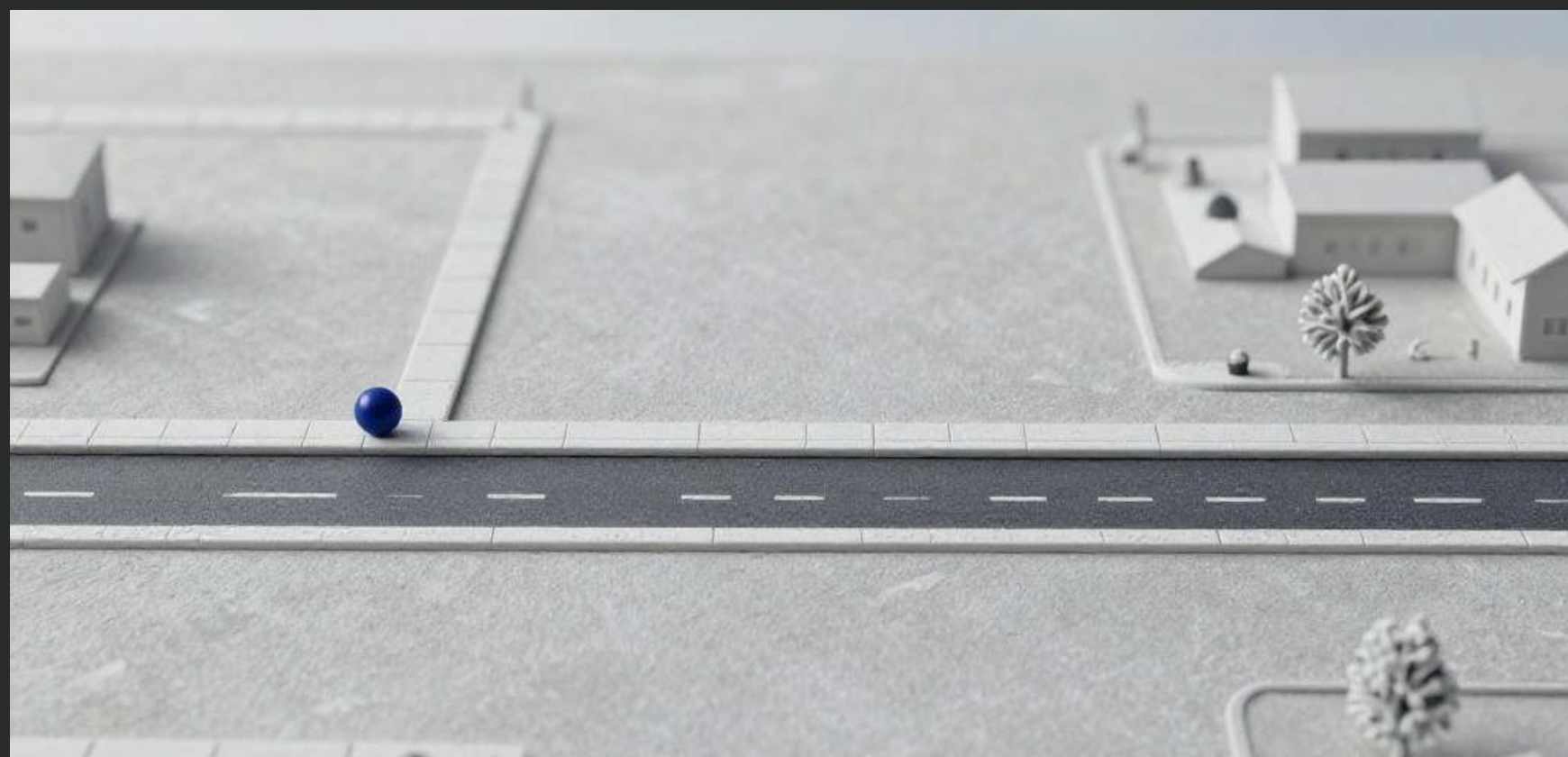
Одинаковые коэффициенты при x и y подтверждают параллельность, а разность свободных членов определяет расстояние между прямыми.

Алгоритм решения задач

Схема показывает общий порядок: сначала распознаём условие, затем выбираем способ и обязательно проверяем ответ.



Практическая задача на ширину полосы



Дорога на плане

На карте изображена дорога с двумя параллельными краями. Точка стоит на одной границе, и нужно узнать ширину полосы до другой стороны. Для этого достаточно провести общий перпендикуляр и измерить его длину.



Тротуар и проход

В чертеже участка границы тротуара тоже могут быть параллельными. Если известна одна кромка и точка на ней, то расстояние до второй кромки сразу показывает ширину прохода. Такой приём часто используют на схемах и планах.

Прогрессия задач от простого к сложному

Шаг 1. Точка и прямая

Сначала находят расстояние от точки C до прямой по рисунку или по формуле. Это самый простой случай, где видно, что кратчайший путь всегда перпендикулярен.

Шаг 2. Параллельные прямые

Затем переходят к двум параллельным прямым. Здесь нужно заметить одинаковое направление и измерить одну общую перпендикулярную, чтобы получить постоянное расстояние между ними.

Шаг 3. Параметр

После этого решают задачу с параметром: подбирают значение, при котором расстояние остаётся заданным. На этом этапе особенно важны модуль, проверка и аккуратные вычисления.

Главное, что нужно запомнить

Мы увидели, что расстояние до прямой задаётся перпендикуляром, а между параллельными прямыми остаётся одинаковым везде. Главное — правильно выбрать способ, внимательно подставить данные и проверить ответ.