

Свойства последовательностей: монотонность и ограниченность

Поймём, как ведут себя числовые
последовательности.

Последовательности вокруг нас



Последовательности встречаются в процентах, росте, температуре и начислениях. В алгебре важно уметь видеть их правило и быстро определять, как они изменяются и ограничены ли они.

Что такое последовательность

Упорядоченный ряд

Последовательность — это числа, расположенные в определённом порядке. Каждый член имеет свой номер, например a_1 , a_2 , a_3 . Именно порядок делает последовательность особым объектом.

Порядок важен

Если те же числа переставить местами, получится уже другая последовательность. Поэтому нельзя рассматривать только набор значений: нужно учитывать, какой член стоит первым, вторым и так далее.

Разные способы задания

Последовательность можно задать формулой, таблицей, словесным правилом или рекуррентно. От способа задания зависит, как удобнее находить её члены и исследовать свойства.

Зачем её изучают

Последовательности помогают замечать закономерности и описывать изменения чисел. Это нужно, чтобы сравнивать варианты, делать выводы о росте или убывании и решать школьные задачи.

Способы задания последовательности

01. Явная формула

Если известна формула вида $a_n = 2n + 1$, можно сразу найти любой член последовательности. Такой способ удобен, когда требуется быстро вычислять значения.

02. Рекуррентное правило

Иногда следующий член выражают через предыдущий, например $a_{n+1} = a_n + 3$. Тогда последовательность строят по шагам, начиная с первого известного значения.

03. Таблица значений

Последовательность можно представить в виде таблицы, где напротив каждого номера записан соответствующий член. Это помогает увидеть общий рисунок и сравнить соседние значения.

04. Словесное описание

Правило иногда формулируют словами: каждый следующий член увеличивается вдвое или уменьшается на единицу. Такой способ понятен, но требует аккуратного перевода в числа.

Понятие монотонности

Один характер изменения

Монотонной называют последовательность, которая всё время меняется в одном направлении. Она либо растёт, либо убывает, либо не изменяется, не переходя к случайным скачкам.

Возрастание

Если каждый следующий член больше предыдущего, последовательность возрастающая. Записывают это так: $a_{n+1} > a_n$. Это значит, что значения идут вверх по порядку.

Убывание

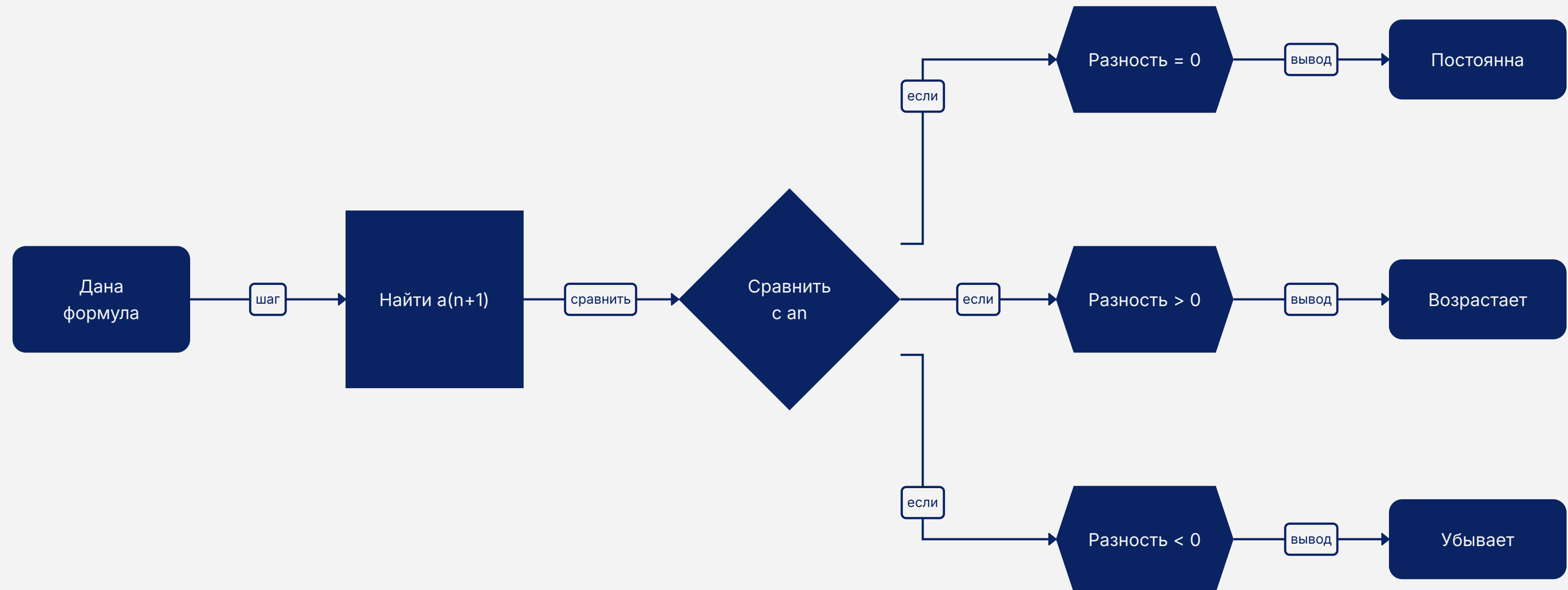
Если каждый следующий член меньше предыдущего, последовательность убывающая. Для неё выполняется неравенство $a_{n+1} < a_n$. Значения в таком случае постепенно уменьшаются.

Постоянство

Если соседние члены равны, последовательность остаётся постоянной. Её можно считать и неубывающей, и невозрастающей одновременно, потому что значения не меняются.

Как проверить монотонность по формуле

Схема показывает последовательность рассуждений при сравнении соседних членов.



Примеры возрастающих последовательностей

■ Простая последовательность

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... образуют возрастающую последовательность. Каждый следующий член больше предыдущего на 1, поэтому направление изменения легко заметить сразу.

■ Формула с постоянным шагом

Последовательность $a_n = 2n$ тоже возрастает. Здесь каждый новый член увеличивается на одинаковую величину, поэтому рост идёт равномерно и предсказуемо.

■ Более быстрый рост

Последовательность 2, 4, 8, 16, ... возрастает значительно быстрее. Каждый следующий член вдвое больше предыдущего, поэтому значения увеличиваются очень заметно.

■ Разные скорости роста

Возрастание не всегда выглядит одинаково. Иногда члены растут медленно, иногда резко увеличиваются, но направление изменения остаётся одним и тем же.

Примеры убывающих последовательностей

Уменьшение на одно и то же число

Последовательность 10, 8, 6, 4, 2, ... убывает, потому что каждый следующий член меньше предыдущего на 2. Значения постепенно снижаются, сохраняя одинаковый шаг.

Положительные, но убывающие

Последовательность 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... тоже убывает, хотя все её члены положительные. Это показывает, что убывание не связано обязательно с отрицательными числами.

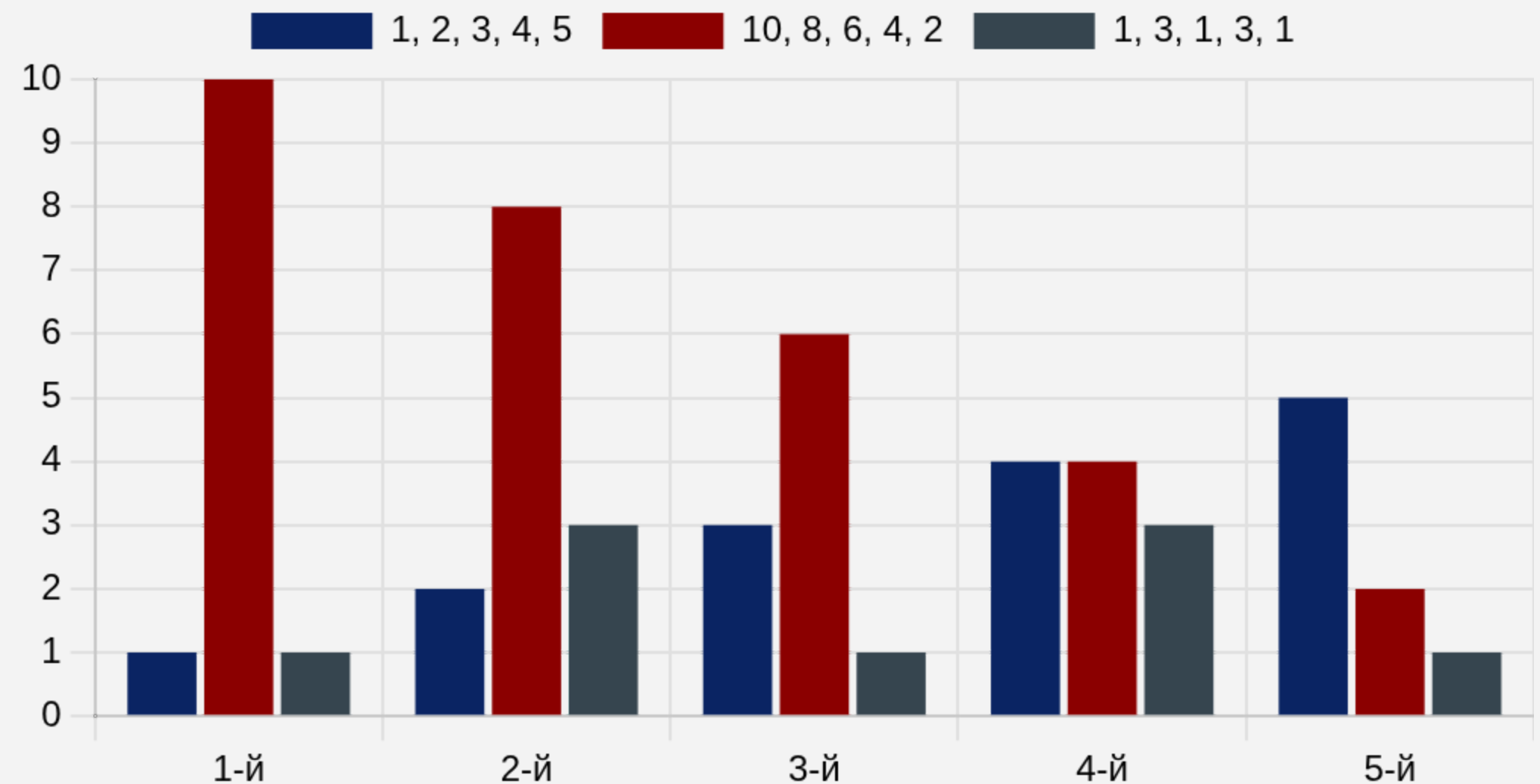
Смена знака не обязательна

Убывающая последовательность может оставаться выше нуля или, наоборот, уменьшаться в отрицательной области. Главное — чтобы каждый следующий член был меньше предыдущего.

Сравнение последовательностей

Три примера показывают, что одинаковое число членов может описывать совсем разное поведение: рост, спад или чередование значений.

По столбцам видно, что направление изменения помогает быстро отличить монотонную последовательность от немонотонной.



Учебные примеры по теме «Последовательности»

Что значит ограниченность

01. Ограничение сверху

Если все члены последовательности не превосходят числа M , говорят, что она ограничена сверху. Это значит, что выше заданной границы значения не поднимаются.

02. Ограничение снизу

Если все члены больше или равны числу m , последовательность ограничена снизу. Тогда её значения не опускаются ниже выбранной границы.

03. Одна или две границы

Ограниченность может быть только сверху, только снизу или сразу с двух сторон. У последовательности может быть несколько подходящих границ, и это нормально.

04. Пример записи

Запись $0 \leq a_n \leq 5$ означает, что все члены лежат между 0 и 5 включительно. Такие числа называют нижней и верхней границами последовательности.

Верхняя и нижняя границы последовательности

Верхняя граница

Число M называют верхней границей, если каждый член последовательности не превосходит его: $a_n \leq M$. Такая граница показывает, что значения не поднимаются выше заданного уровня.

Нижняя граница

Число m называют нижней границей, если для всех n выполняется $a_n \geq m$. Это означает, что последовательность не опускается ниже указанного числа даже при большом номере.

Необязательная точность границ

Границы не обязаны быть наибольшими или наименьшими возможными. Достаточно, чтобы они подходили для всех членов последовательности и надёжно ограничивали её значения сверху или снизу.

Примеры последовательностей и их свойства

Последовательность	Свойства
1,2,3,4,...	возрастает; снизу
10,8,6,4,...	убывает; сверху
1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ...	убывает; с двух сторон
1,3,1,3,...	немонотонна; с двух сторон

В таблице показано, как по одному примеру можно увидеть направление изменения и наличие границ. Это помогает запомнить, что свойства рассматриваются отдельно.

Монотонность и ограниченность могут сочетаться по-разному: одно свойство не гарантирует другое.

Учебные примеры последовательностей для 9 класса

Связь монотонности и ограниченности

■ Монотонность сама по себе

Последовательность может всё время расти или всё время убывать, но при этом не иметь границы. Например, числа 1, 2, 3, 4, ... увеличиваются без ограничения.

■ Ограниченность без монотонности

Последовательность может оставаться в пределах двух чисел и при этом не двигаться в одном направлении. Пример 1, 3, 1, 3, ... показывает чередование без общего роста или убывания.

■ Оба свойства вместе

Есть последовательности, которые одновременно монотонны и ограничены. У ряда $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ члены убывают и не выходят за пределы от 0 до 1.

Почему эти свойства важны в алгебре

Быстрый вывод

Монотонность позволяет сразу понять, в каком направлении меняются члены последовательности, и предположить, что будет дальше, не выписывая десятки значений подряд.

Проверка границ

Ограниченность помогает увидеть, остаются ли все члены внутри допустимого промежутка. Это важно, когда нужно понять, может ли последовательность расти бесконечно.

Подготовка к пределам

В старших темах эти свойства связывают с понятием предела. Если последовательность ведёт себя предсказуемо, её легче исследовать и сравнивать с другими.

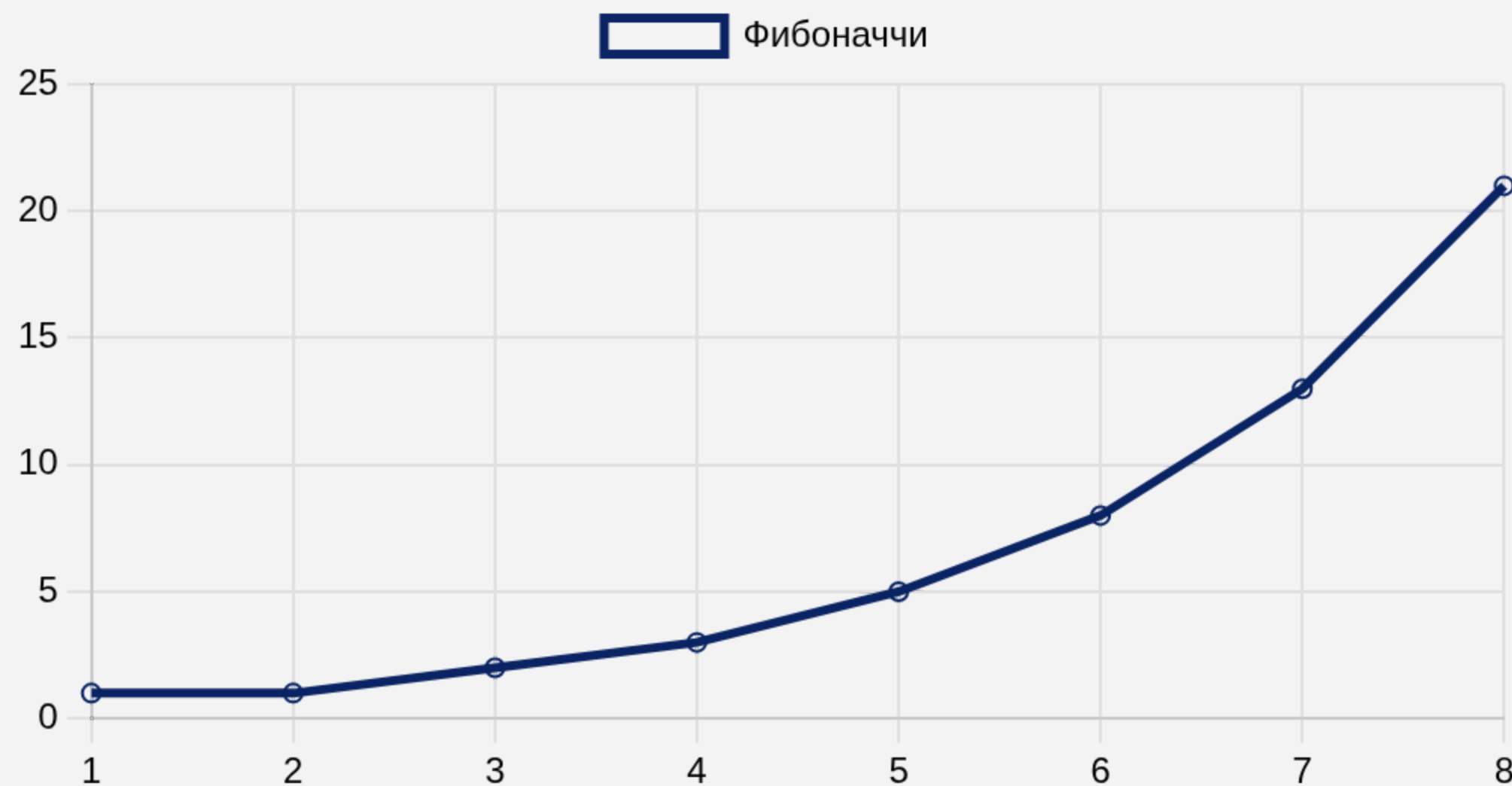
Экономия времени

В задачах 9 класса эти признаки позволяют сделать строгий вывод по формуле, таблице или нескольким членам, не выполняя лишних вычислений.

Последовательность Фибоначчи как пример роста

Первые члены растут неравномерно: некоторые шаги равны 1, затем прирост быстро увеличивается. Это показывает, что монотонность не требует одинаковой разности.

Последовательность становится возрастающей после первых членов и не имеет верхней границы, хотя её рост сначала кажется медленным.



Числа последовательности Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

Реальные ситуации, где возникают последовательности



Копилка, которая растёт по дням

Если каждый день добавлять в копилку одинаковую сумму, накопленные деньги будут увеличиваться по шагам. Так возникает возрастающая последовательность, где каждый следующий результат больше предыдущего. По ней удобно отслеживать, насколько быстро растёт сумма и когда будет достигнута цель.

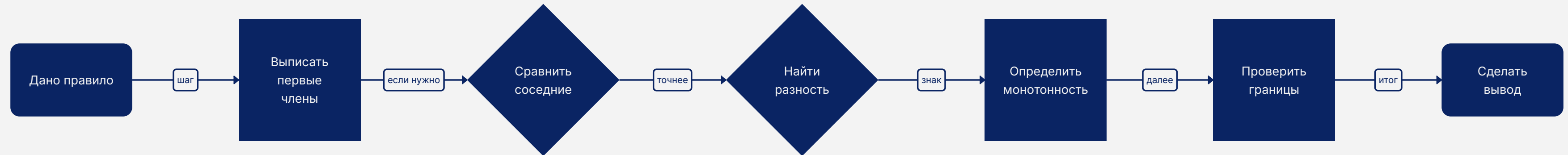


Батарея и расход воды

Когда заряд телефона или уровень воды уменьшается каждый день, значения образуют убывающую последовательность. Она может оставаться положительной, но всё равно постепенно снижаться. Такие ситуации хорошо показывают, что убывание связано не с отрицательными числами, а с направлением изменения.

Алгоритм исследования последовательности

Пошаговая проверка по формуле, таблице или графику



Проверка свойств на типичных примерах

Эти примеры показывают разные сочетания монотонности и ограниченности. По ним удобно проверять, как свойства проявляются у конкретной последовательности.

Одна и та же последовательность может быть монотонной, ограниченной, постоянной или ни тем, ни другим — это нужно проверять отдельно.

Пример	Вывод
$a_n = n$	возрастает; сверху нет
$a_n = 1/n$	убывает; 0 и 1
$a_n = (-1)^n$	немонотонна; ± 1
$a_n = 5$	постоянна; с двух сторон

Типовые последовательности из школьного курса алгебры

Типичные ошибки при определении свойств последовательностей



Слишком ранний вывод

Нельзя судить о всей последовательности только по двум или трём первым членам. Важно учитывать общее правило задания и проверять, сохраняется ли свойство для всех номеров n .



Путаница с границами

Ограниченность не означает, что числа должны быть маленькими. Последовательность может содержать большие значения и всё равно оставаться ограниченной сверху и снизу.



Неубывающая не значит возрастающая

Если соседние члены могут быть равны, последовательность называют неубывающей, а не обязательно возрастающей. Это разные понятия, и их нельзя смешивать при ответе.



Проверка для всех n

Правильный вывод строится только тогда, когда условие выполняется для каждого номера. Один случай или один промежуток значений не дают полного ответа о свойствах последовательности.

Монотонность и ограниченность: главное, что нужно запомнить

Монотонность показывает направление изменения последовательности, а ограниченность — наличие границ. Если уметь проверять эти свойства, можно быстрее понимать поведение чисел и уверенно решать задачи.