

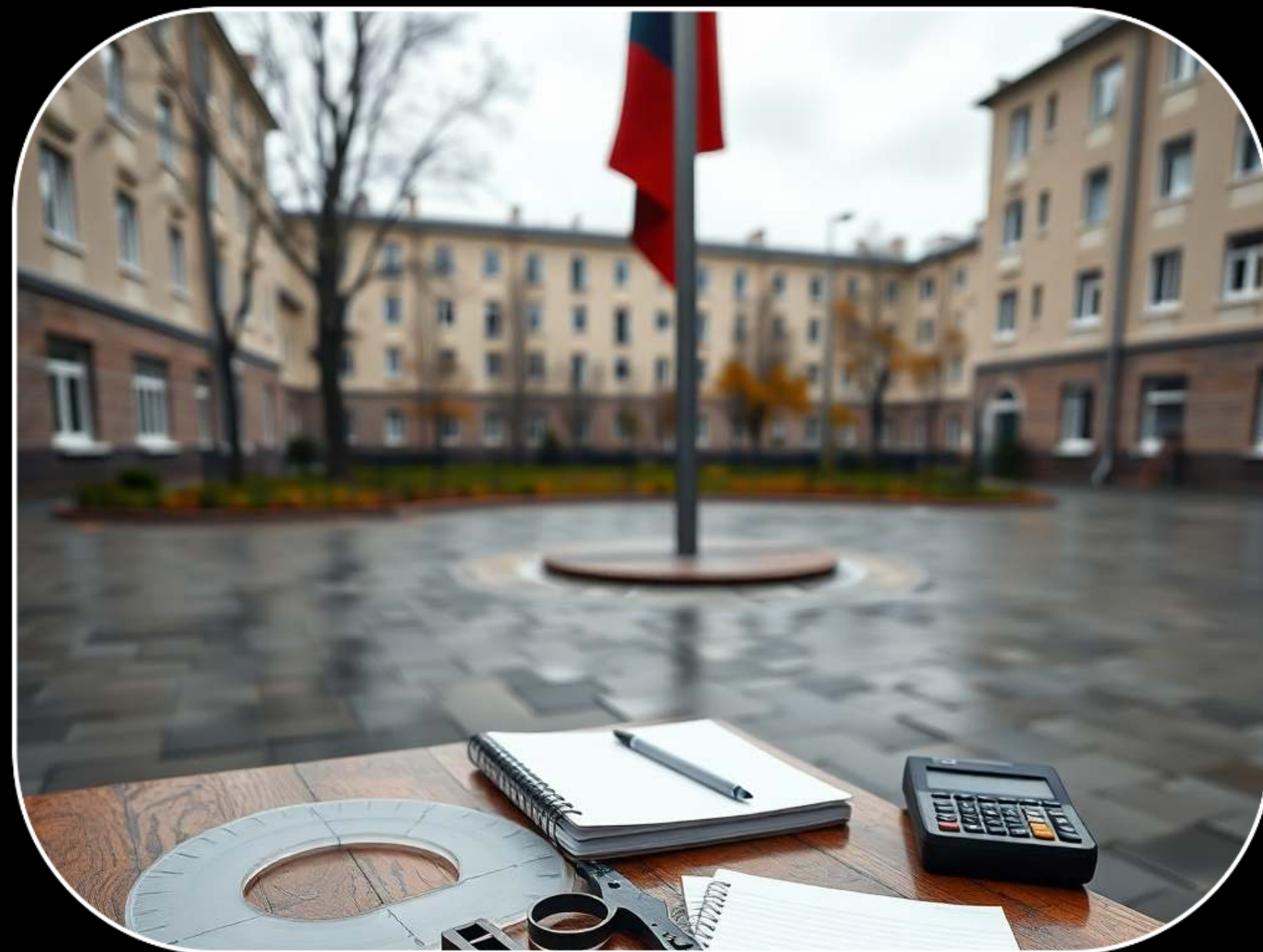
# Синус, косинус и тангенс угла

Как угол превращается в числа:  
синус, косинус и тангенс.



# Зачем нужна тригонометрия в 10 классе?

Она соединяет геометрию, координаты и функции, помогает решать треугольники, преобразовывать выражения и описывать периодические процессы в алгебре и начале анализа.



# Прямоугольный треугольник как основа определений

## Выбираем угол

- 1 Все определения строятся относительно одного острого угла. Именно от него зависит, какой катет окажется противолежащим, а какой — прилежащим в конкретной задаче.

## Роль гипотенузы

- 2 Гипотенуза — самая длинная сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла. Она служит общим ориентиром для синуса и косинуса.

## Два катета

- 3 Противолежащий катет расположен напротив выбранного угла, а прилежащий образует его сторону. Эти названия всегда задаются не рисунком, а именно выбранным углом.

## Почему отношения постоянны

- 4 Если треугольники подобны и угол одинаков, то соответствующие стороны пропорциональны. Поэтому отношения сторон совпадают, а значит, значение функции не меняется.

# Три основные тригонометрические функции

| Функция                    | Формула | Смысл              |
|----------------------------|---------|--------------------|
| $\sin \alpha$              | $a / c$ | катет / гипотенуза |
| $\cos \alpha$              | $b / c$ | катет / гипотенуза |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | $a / b$ | катет / катет      |

Таблица показывает, как каждая функция связывает выбранный угол с отношением сторон прямоугольного треугольника.

Синус и косинус сравнивают катет с гипотенузой, а тангенс — два катета между собой.

Определения тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике

# Синус угла: отношение противолежащего катета к гипотенузе



## Определение

Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе:  $\sin \alpha = a / c$ . Это одно из самых первых тригонометрических отношений.

## Диапазон значений

Для острых углов синус всегда положителен и не превышает единицу, потому что противолежащий катет не может быть длиннее гипотенузы в прямоугольном треугольнике.

## Точные значения

В специальных треугольниках получаются удобные значения:  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Их часто используют без калькулятора.

## Что показывает

Синус отражает, какую часть гипотенузы составляет противоположная выбранному углу сторона. Поэтому он напрямую связан с «высотой» треугольника относительно основания.

# 3

**точных значения удобно  
запомнить для основных углов:  
 $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$**

Косинус описывает, насколько «близок» угол к горизонтали: для острых углов он лежит между 0 и 1 и дополняет синус в одном тождестве.

Точные значения  $\cos 30^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$  и  $\cos 60^\circ$  в школьной тригонометрии

# Тангенс угла: отношение двух катетов

1

## Определение

Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему:  $\operatorname{tg} \alpha = a / b$ . В отличие от синуса и косинуса, здесь сравниваются два катета.

2

## Поведение значения

Тангенс не ограничен промежутком от 0 до 1: при увеличении угла он может стать больше единицы и заметно возрастает по мере приближения к  $90^\circ$ .

3

## Основные углы

Для опорных значений получаем:  $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$ ,  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ ,  $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ . Эти результаты помогают быстро решать типовые задачи.

4

## Смысл отношения

Тангенс показывает, насколько быстро «растёт» противолежащая сторона по сравнению с прилежащей. Поэтому он особенно полезен при анализе наклона и угловой крутизны.

# Значения $\sin$ , $\cos$ и $\operatorname{tg}$ для углов $30^\circ$ , $45^\circ$ и $60^\circ$

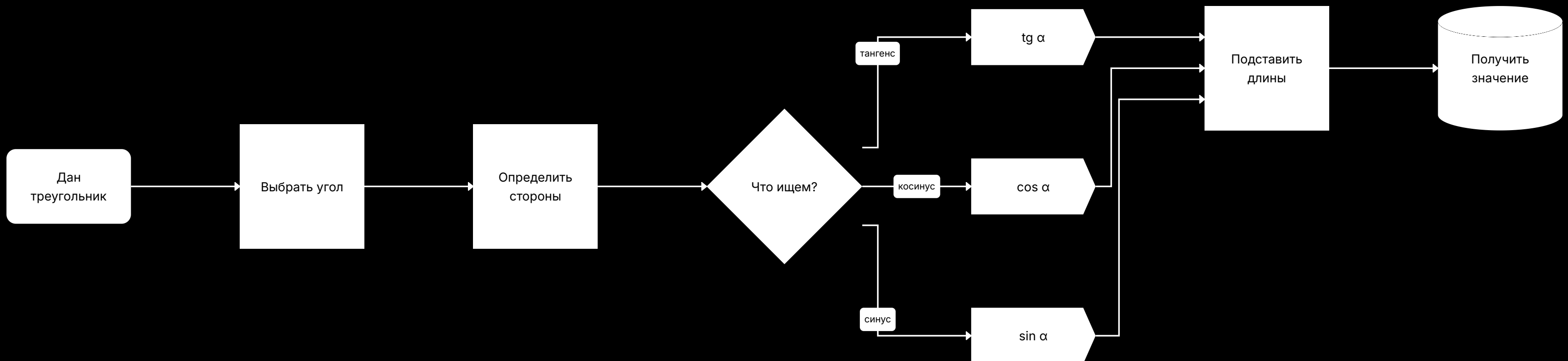
Диаграмма удобно сравнивает три функции в одних и тех же углах без лишних вычислений.

При  $45^\circ$  синус и косинус совпадают, а тангенс растёт быстрее остальных функций по мере увеличения угла.

Точные значения для углов  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$

# Как найти тригонометрическую функцию по треугольнику

Пошаговый выбор отношения сторон в прямоугольном треугольнике



# Почему значения зависят только от угла

## Подобие треугольников

Прямоугольные треугольники с одинаковым острым углом подобны. Значит, их соответствующие стороны пропорциональны, а все отношения, входящие в определения, совпадают.

## Функция, а не фигура

Синус, косинус и тангенс описывают сам угол, а не конкретный чертёж. Поэтому можно менять размеры треугольника, не меняя значение функции.

## Практический вывод

Для вычислений достаточно знать угол и одну сторону. Остальные длины находятся через постоянные отношения, которые одинаковы для всех подобных фигур.

# Единичная окружность и координатное определение



## Координаты точки

На единичной окружности каждой величине угла соответствует точка с координатами  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Поэтому косинус задаёт абсциссу, а синус — ординату, что удобно для координатного метода.

## Преимущество подхода

Такое определение не ограничивается острыми углами. Оно работает для тупых, развернутых и отрицательных углов, позволяя описывать направление поворота и положение точки на окружности.

## Связь с осями

Если радиус-вектор образует угол  $\alpha$  с положительным направлением оси  $Ox$ , то проекции на оси прямо дают значения функций. Это связывает тригонометрию с графиками и аналитической геометрией.

# Связь между синусом, косинусом и тангенсом

## Основное тождество

- 1 На единичной окружности координаты точки удовлетворяют уравнению  $x^2 + y^2 = 1$ . Подставляя  $x = \cos \alpha$  и  $y = \sin \alpha$ , получаем соотношение  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

## Формула тангенса

- 2 Если  $\cos \alpha \neq 0$ , то тангенс можно выразить через синус и косинус:  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Эта запись особенно полезна при преобразовании выражений и вычислениях.

## Проверка результата

- 3 Связи между функциями позволяют контролировать вычисления: зная две величины, легко найти третью и сверить ответ. Для задач это снижает риск ошибки и делает решение более надёжным.

# Таблица точных значений для основных углов

Точные значения для углов  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$  часто используют без калькулятора при решении задач и упрощении выражений.

При  $45^\circ$  синус и косинус равны; при  $30^\circ$  и  $60^\circ$  они меняются местами. Тангенс возрастает с увеличением угла от  $30^\circ$  к  $60^\circ$ .

| Угол       | <b>sin</b>           | <b>cos</b>           | <b>tg</b>            |
|------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $30^\circ$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $45^\circ$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    |
| $60^\circ$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$           |

Школьные точные значения для углов  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$

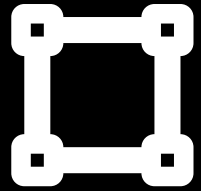
# Изменение значений функций при увеличении угла от $0^\circ$ до $90^\circ$

График показывает разные типы поведения на одном промежутке: плавный рост синуса, симметричное убывание косинуса и быстрое увеличение тангенса возле  $90^\circ$ .

Синус и косинус меняются постепенно и взаимно дополняют друг друга, тогда как тангенс резко возрастает и не имеет конечного значения при  $90^\circ$ .

Табличные значения функций для углов от  $0^\circ$  до  $90^\circ$

# Типичные ошибки при работе с определениями



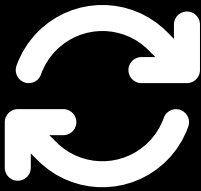
## Путаница катетов

Часто ученик выбирает не тот катет относительно угла: противолежащий и прилежащий легко перепутать. Помогает простая привычка — сначала отмечать угол, затем подписывать стороны.



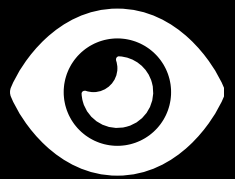
## Неверная формула

Иногда вместо отношения к гипотенузе берут отношение катетов или наоборот. Чтобы избежать ошибки, полезно каждый раз сверяться с определением, а не полагаться на память.



## Обратное отношение

Для тангенса нередко пишут обратную дробь, забывая, что он равен противолежащему катету, делённому на прилежащий. Направление отношения полностью зависит от выбранного угла.



## Проверка смысла

Даже после вычисления ответ стоит оценить качественно: гипотенуза должна быть наибольшей стороной, а величины катетов — соответствовать величине угла и типу треугольника.

# Практические применения тригонометрии



## Высота, которую нельзя измерить напрямую

Наблюдатель стоит на известном расстоянии от здания и измеряет угол подъёма к его вершине. По этому углу и одной стороне треугольника можно вычислить высоту, не приближаясь к объекту.



## Незримая ширина реки

Когда перейти реку невозможно, на берегу выбирают удобные точки измерения и используют углы между ними. Тригонометрия позволяет найти ширину по доступным расстояниям, сохраняя точность и безопасность.

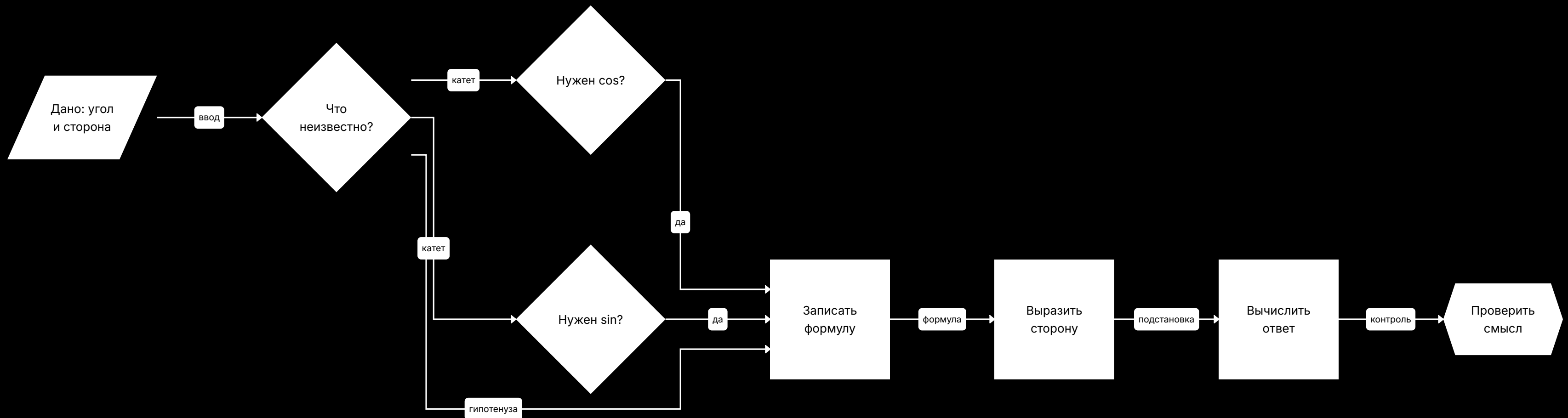


## Наклон в быту и технике

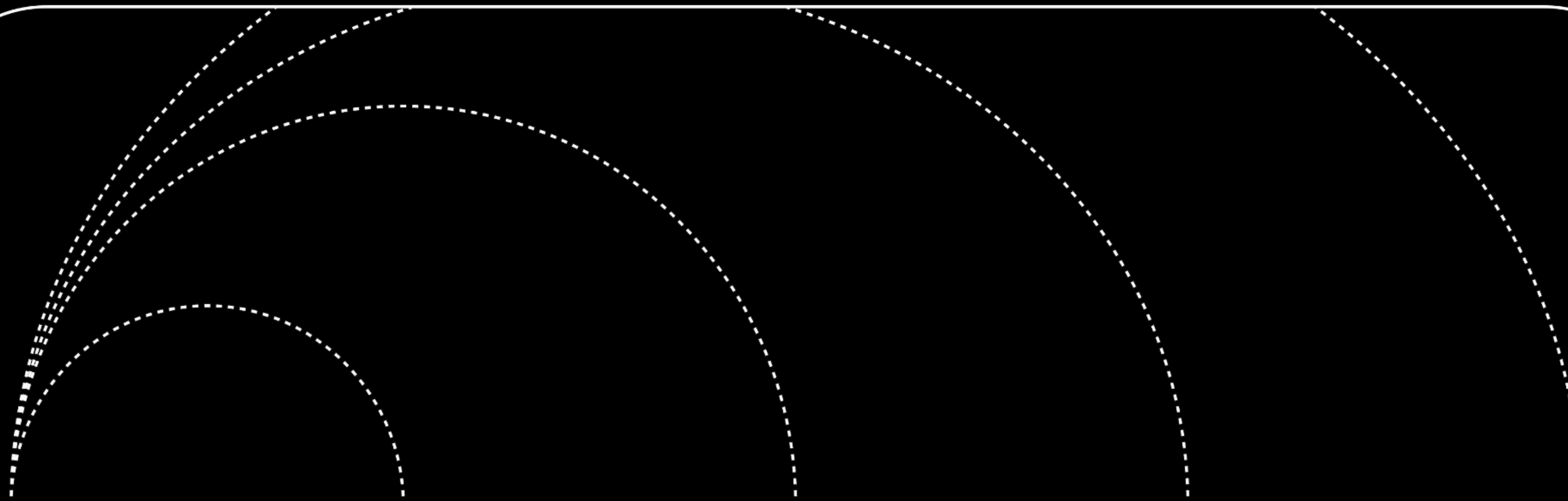
Крыши, лестницы, ramпы и эскалаторы имеют заданный угол наклона, который удобно описывать через синус, косинус и тангенс. Эти функции помогают согласовать безопасность, удобство и конструктивные ограничения.

# Алгоритм решения задач на нахождение стороны треугольника

Последовательность действий при использовании синуса, косинуса и тангенса в прямоугольном треугольнике.



# Историческое происхождение и место в школьной математике



## Древняя астрономия

Первые тригонометрические идеи возникли из потребности вычислять углы и расстояния при наблюдении небесных тел, когда прямое измерение было невозможно.

## Геодезия и навигация

Позднее методы стали важны для картографии, мореплавания и землемерия: нужно было находить недоступные расстояния, ориентироваться по направлениям и строить точные планы местности.

## Школьный курс

В алгебре тригонометрия объединяет геометрию, функции и координатный метод, поэтому служит мостом к графикам, преобразованиям выражений и уравнениям.

## Дальнейшее изучение

Эта тема подготавливает к более сложным вопросам: свойствам тригонометрических функций, их графикам, периодичности и аналитическим методам решения задач.

# Основные области применения тригонометрических функций

Тригонометрия особенно полезна там, где нужно работать с углами, наклонами и недоступными расстояниями, поэтому она естественно входит в инженерные и научные расчёты.

Наибольшая практическая нагрузка приходится на геометрию, физику и строительство, но функции остаются востребованными и в цифровых технологиях.

Обобщение типичных школьных и прикладных областей применения тригонометрии

# Тригонометрия начинается с одного угла

Синус, косинус и тангенс превращают геометрию угла в точные числа. Понимание их определений, связей и значений для ключевых углов открывает путь к уверенной работе с задачами.