



Свойства и графики функции: как читать зависимость

Функция показывает, как меняется одна величина через другую.



Зачем функции нужны в 10 классе

Функции описывают движение, температуру, цены и рост. В 10 классе графики помогают решать уравнения и неравенства, сравнивать величины и видеть поведение зависимости без расчёта каждой точки отдельно.





Смысл функции

Функция задаёт правило, по которому каждому допустимому значению x соответствует ровно одно значение y . Именно это делает зависимость однозначной и удобной для исследования.



Форма записи

Один и тот же закон можно записать формулой, таблицей, графиком или словами. Выбор способа зависит от задачи: вычислений, наглядности или описания реального процесса.



Школьные примеры

В курсе часто встречаются функции $y=2x+1$, $y=x^2$, $y=|x|$, $y=1/x$ и $y=\sqrt{x}$. Каждая из них имеет свой характер графика и область применения.



Одна идея — разные формы

Формула, таблица и график не противоречат друг другу, а дополняют. Умение переводить функцию из одной формы в другую помогает быстрее понимать её свойства и поведение.

Определение функции и способы её задания

Координатная плоскость и построение графика

Оси координат

График функции строят в декартовой системе координат. Ось Ox показывает значения аргумента x , а ось Oy — соответствующие значения функции y .

Точка графика

Каждая точка графика имеет вид $(x; y)$. Если значение x допустимо, ему соответствует единственное значение y , и именно эта пара наносится на плоскость.

Опорные значения

Для построения выбирают несколько удобных значений x , вычисляют соответствующие y и отмечают полученные точки. Затем их соединяют в соответствии с характером зависимости.

Вид линии

На рисунке функция может выглядеть как прямая, кривая или ломаная. Эта форма показывает общий тип зависимости между переменными и позволяет судить о её свойствах.



Основные свойства функции

- Таблица показывает, как обозначают и понимают ключевые свойства функции.
- Свойства помогают заранее представить график, определить его поведение и быстрее решать задачи без полного построения.

Свойство	Смысл	Пример
$D(f)$	допустимые x	$x \neq 2$
$E(f)$	все y	$y > 0$
нули	$y = 0$	$x = 0$
монотонность	растёт/убывает	$y = x^2$



Область определения и область значений

01

Допустимые аргументы

Область определения включает все значения x , при которых выражение имеет смысл. Для дроби знаменатель не должен равняться нулю, а для корня подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

03

Пример с разрывом

Для функции $y=1/(x-2)$ значение $x=2$ исключается из области определения. Поэтому график не проходит через эту точку и имеет разрыв в её окрестности.

02

Что принимает функция

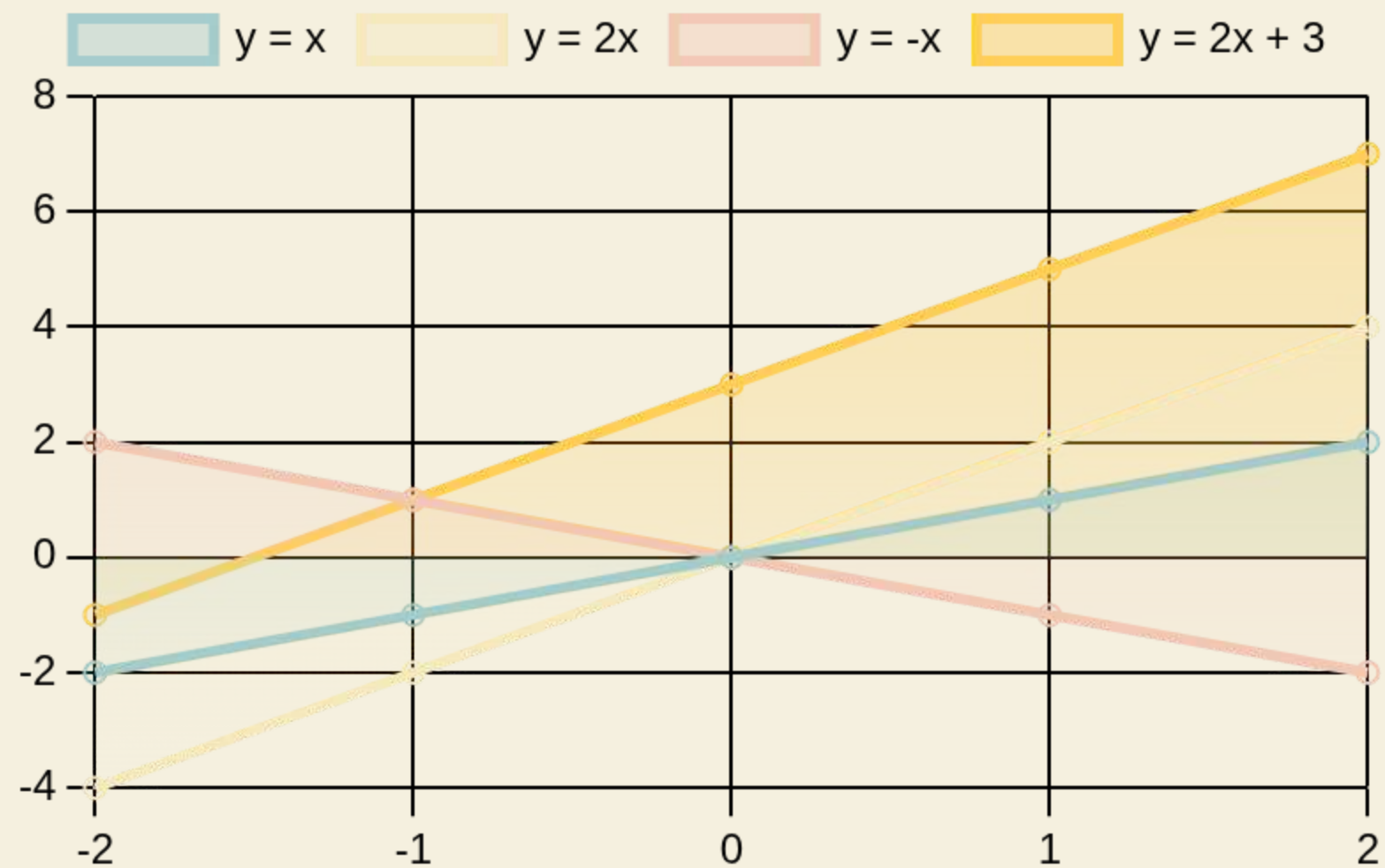
Область значений — это все возможные значения y , которые функция может принимать. Она зависит от формулы, ограничений на x и общего вида графика.

04

Почему это важно

Знание области определения и области значений помогает избежать ошибок при вычислениях, правильно читать график и заранее понимать, где функция существует и какие значения принимает.

Линейная функция и влияние коэффициентов



- Сравнение показывает, как меняются наклон и положение прямой при изменении коэффициентов.
- Коэффициент k задаёт крутизну и направление наклона, а b сдвигает график вверх или вниз.

Учебные примеры по теме «Линейная функция»

Парабола $y=x^2$ и её преобразования



Классическая парабола

График $y=x^2$ симметричен относительно оси Oy и имеет вершину в начале координат. Его форма наглядно показывает, как одинаково ведут себя значения при x и $-x$.



Сдвиг вершины

Если записать функцию как $y=(x-a)^2+b$, вершина параболы смещается в точку $(a; b)$. Так удобно описывать график без отдельного построения каждой точки.



Шире или уже

Коэффициент перед квадратом влияет на ширину параболы. При большем модуле ветви становятся уже, при меньшем — шире, а знак определяет направление ветвей вверх или вниз.

Нули функции и точки пересечения с осями

01 Нули функции

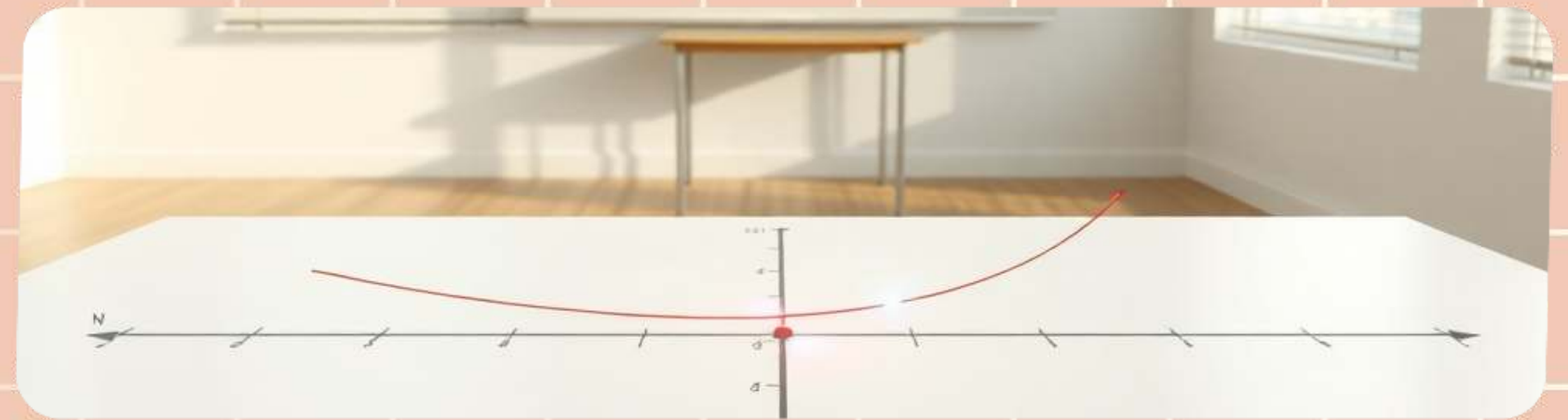
Нули функции — это такие значения x , при которых $y=0$. На графике они совпадают с точками пересечения кривой или прямой с осью Ox .

02 Пересечение с осью Oy

Точка на оси Oy находится при $x=0$, если это значение входит в область определения. Она показывает значение функции в начале отсчёта.

03 Графический смысл

По нулям удобно определять, где график переходит через нулевой уровень и меняет знак. Это особенно полезно при решении уравнений и неравенств.



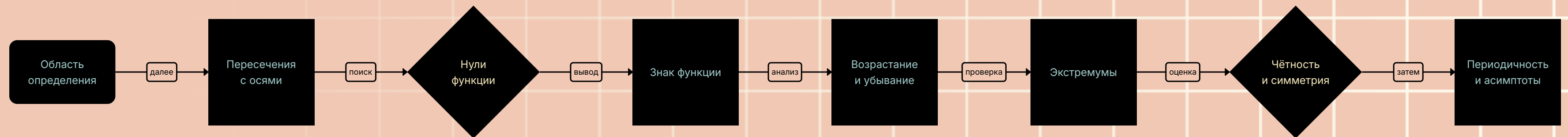
04 Практическая польза

Если график пересекает ось Ox в нескольких точках, можно быстро найти корни уравнения. Такой способ экономит время и даёт наглядный ответ.

Как исследовать функцию по графику



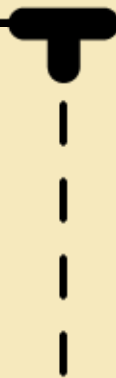
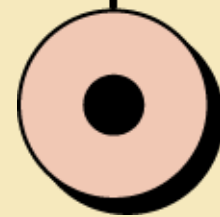
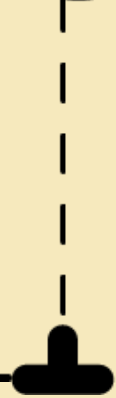
Последовательность шагов помогает связать формулу функции с её изображением на плоскости.



Логика монотонности на графике

При росте аргумента

Если при увеличении x значения функции тоже увеличиваются, график идёт вверх слева направо. Такую функцию называют возрастающей на данном промежутке.

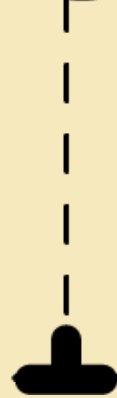
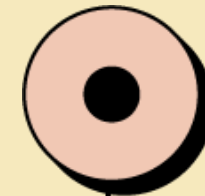


При росте аргумента

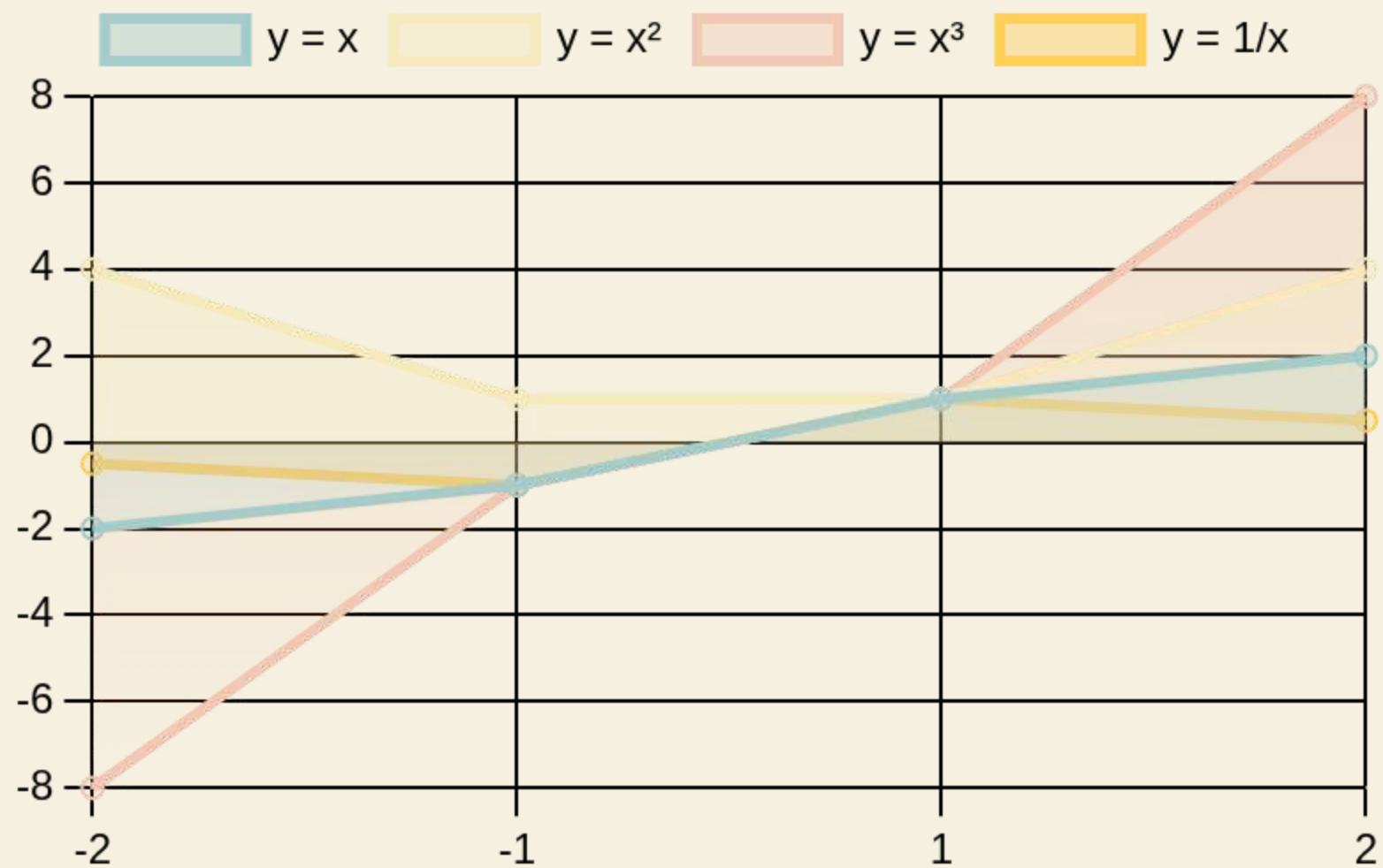
Если при увеличении x значения y уменьшаются, график идёт вниз слева направо. Это означает, что функция убывает на выбранном промежутке.

Пример: парабола

У функции $y=x^2$ слева от нуля график убывает, а справа возрастает. Точка $x=0$ — вершина, где изменение направления становится заметным.



Сравнение графиков основных функций



Одинаковые значения аргумента показывают, насколько по-разному ведут себя функции даже при близких числах. Это помогает быстро узнавать тип зависимости.

Форма графика сразу выдаёт класс функции: прямая, параболка, S-образная кривая или гипербола. Видимость закономерности ускоряет анализ.

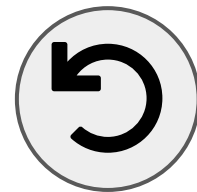
Учебный пример по алгебре, 10 класс

Главные признаки симметрии графика



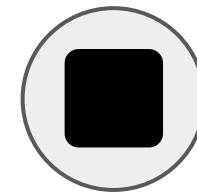
Чётная функция

Для чётной функции значения в точках x и $-x$ совпадают. График зеркально отражается относительно оси Oy , поэтому достаточно изучить правую половину.



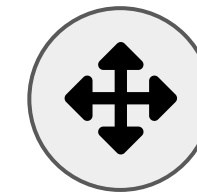
Нечётная функция

У нечётной функции значение в точке $-x$ равно противоположному значению в точке x . График обладает центральной симметрией относительно начала координат.



Типичный пример чётности

Функция $y=x^2$ — чётная: её парабола симметрична относительно оси Oy . Это удобно использовать при построении, так как вторая половина восстанавливается автоматически.



Зачем это проверять

Симметрия сокращает объём вычислений и помогает быстро отличать правильный график от ошибочного. Она особенно полезна при исследовании функций по формуле.

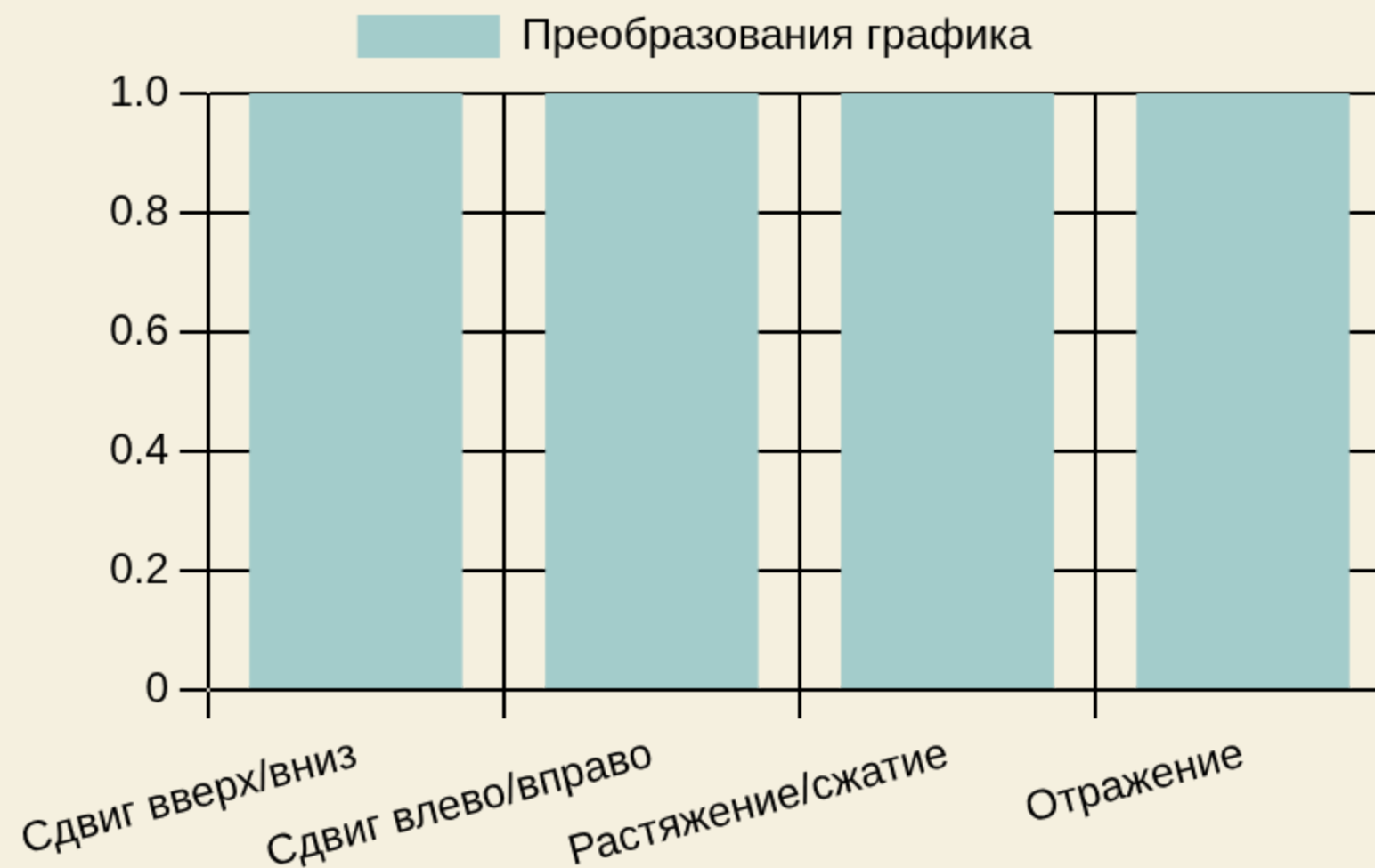
Один и тот же промежуток повторяет значения этих функций, поэтому их графики удобно продолжать на большие интервалы без пересчёта каждой точки.

2π

— это период функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$

Стандартные свойства тригонометрических функций

Как коэффициенты меняют график



- Параметры формулы действуют независимо: одни смещают график, другие меняют его масштаб и направление. Поэтому важно читать выражение целиком, а не по отдельным символам.
-

- Даже небольшое изменение коэффициента может существенно изменить положение и форму кривой. Зная тип преобразования, легче восстанавливать график по записи.
-

Учебный пример преобразований функции $y=a(x-h)^2+k$



Вертикальная асимптота

Она показывает, к какому значению x график не может приблизиться без разрыва. У функции $y=1/x$ такой прямой является $x=0$, где значение не определено.



Горизонтальная асимптота

Эта прямая описывает поведение функции при больших по модулю x . Если график приближается к $y=0$, значит значения функции стремятся к нулю на бесконечности.



Что видно по ветвям

По расположению ветвей можно заранее понять, с какой стороны график подходит к асимптоте. Это особенно удобно для дробных функций и рациональных выражений.



Практический смысл

Асимптоты дают общий рисунок функции ещё до точных вычислений. Они помогают избежать грубых ошибок при построении и быстро оценить поведение графика.



Ключевые ориентиры асимптот

Типовые функции и их основные признаки



Функция	График	Свойство
$y=x$	прямая	растёт
$y=x^2$	парабола	чётная
$y=1/x$	гипербола	разрыв

- Краткое сравнение показывает, как формула определяет форму графика, область определения и симметрию.
- У разных формул — разные характерные линии и симметрии. Это позволяет распознавать функцию по графику и быстрее прогнозировать её поведение.

Как читать график на практике

01

Считать значения

Сначала находят значения функции в заданных точках и сравнивают их между собой. Это помогает ответить, где зависимость больше, меньше или совпадает.

03

Найти характер изменения

После этого определяют участки возрастания и убывания. По направлению кривой видно, как меняется значение функции при движении слева направо.

02

Определить знаки

Затем смотрят, где график расположен выше или ниже оси Ox . Так находят промежутки, на которых функция положительна или отрицательна.

04

Оценить экстремумы

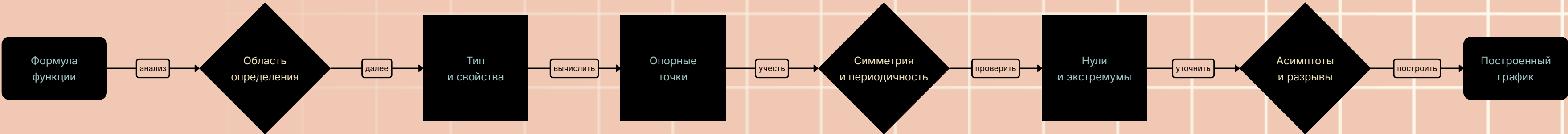
В конце выделяют наибольшее и наименьшее значения на отрезке и отмечают точки пересечения с осями. Это даёт целостную картину поведения функции.



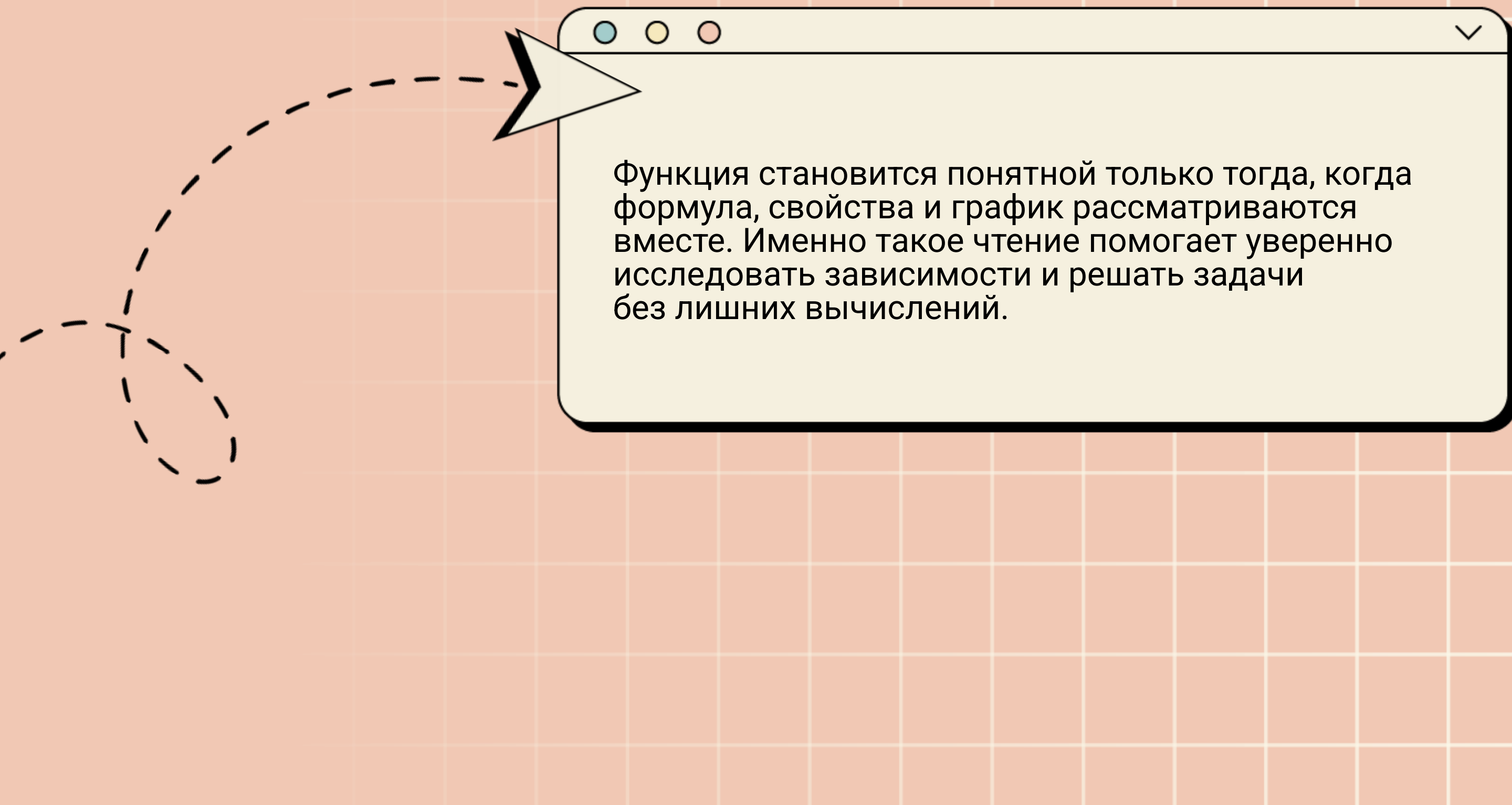
Как построить график по формуле



Последовательность анализа функции от записи к рисунку



Формула, свойства и график работают вместе



Функция становится понятной только тогда, когда формула, свойства и график рассматриваются вместе. Именно такое чтение помогает уверенно исследовать зависимости и решать задачи без лишних вычислений.