

Неравенства: сравнение чисел, выражений и промежутков решений

Неравенства показывают не одно число,
а целый диапазон возможных значений.

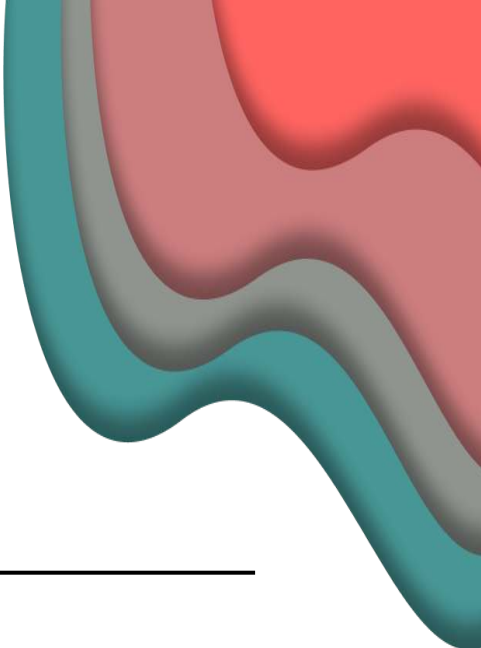


Почему неравенства нужны в 9 классе

Неравенства учат находить допустимые значения переменной, читать промежутки и решать задачи с ограничениями по времени, расстоянию, стоимости и другим условиям. Это важная основа для дальнейшей алгебры, включая линейные и квадратные неравенства.



Знаки неравенства и их математический смысл



Сравнение чисел

Знаки $>$ и $<$ помогают понять, какое число больше, а какое меньше. Например, запись $7 > 4$ показывает, что левое число превосходит правое по значению.

Числа и переменные

Неравенство можно использовать не только для готовых чисел, но и для неизвестной переменной. Тогда оно задаёт не точный ответ, а множество подходящих значений.

Нестрогие записи

Знаки $\geq$ и $\leq$ означают, что равенство тоже возможно. Если написано $x \leq 10$, переменная может быть равна 10 или принимать любые меньшие значения.

Граница решения

Важнее всего понять, входит ли крайнее значение в ответ. Именно от этого зависит, будет ли неравенство строгим или нестрогим и как его записывать на прямой.

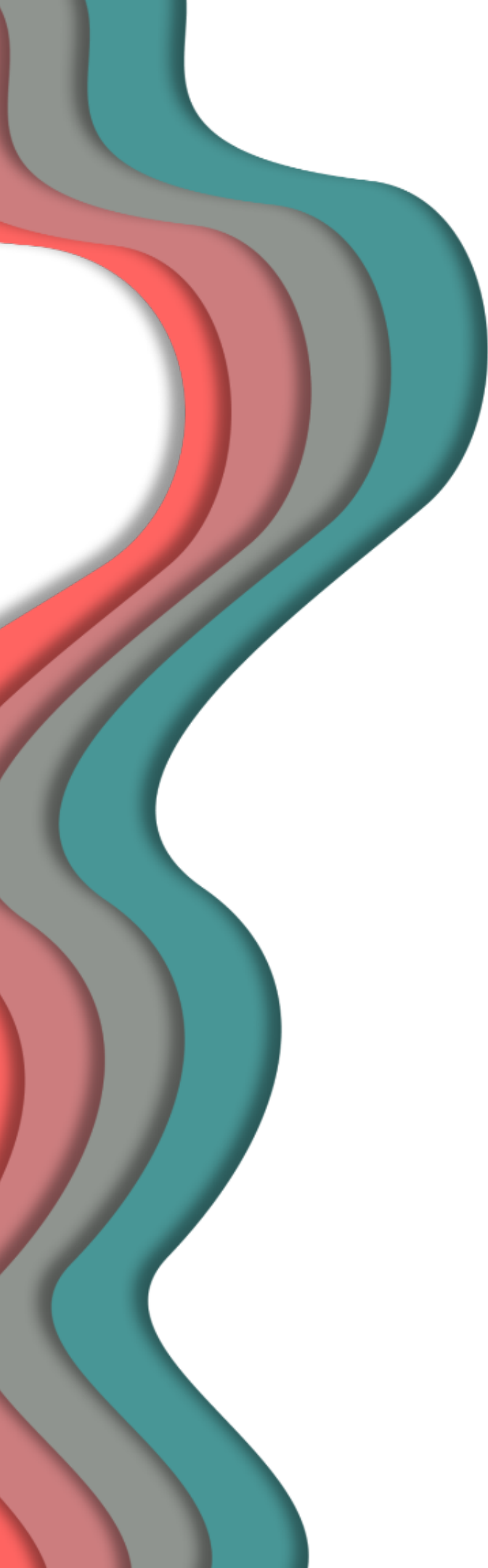
Как читать записи неравенств

Сравним запись, чтение и математический смысл на простых примерах.

Строгие знаки не включают границу, а цепочка условий задаёт сразу несколько ограничений для одной переменной.

Примеры для объяснения записи неравенств в школьной алгебре

Запись	Чтение	Смысл
$9 > 2$	девять больше двух	верно
$x < 5$	x меньше пяти	x до 5
$3a \geq 12$	три a не меньше 12	$a \geq 4$
$-1 \leq y < 4$	от -1 до 4	две границы



Основные свойства неравенств при преобразованиях

01

Прибавление и вычитание

Если к обеим частям неравенства прибавить или вычесть одно и то же число, знак не меняется. Это позволяет переносить числа, не нарушая равносильность записи.

03

Отрицательное число

Если умножить или разделить обе части на отрицательное число, знак нужно поменять на противоположный. Это правило особенно важно, иначе ответ получится неверным.

02

Умножение на положительное

При умножении или делении обеих частей на положительное число неравенство сохраняет направление. Такое преобразование удобно при работе с коэффициентами перед переменной.

04

Равносильность шагов

Каждый шаг решения должен сохранять все ответы и не добавлять лишних. Поэтому свойства неравенств применяют аккуратно, проверяя, что преобразование действительно равносильно.

Как расположение чисел на прямой связано со сравнением

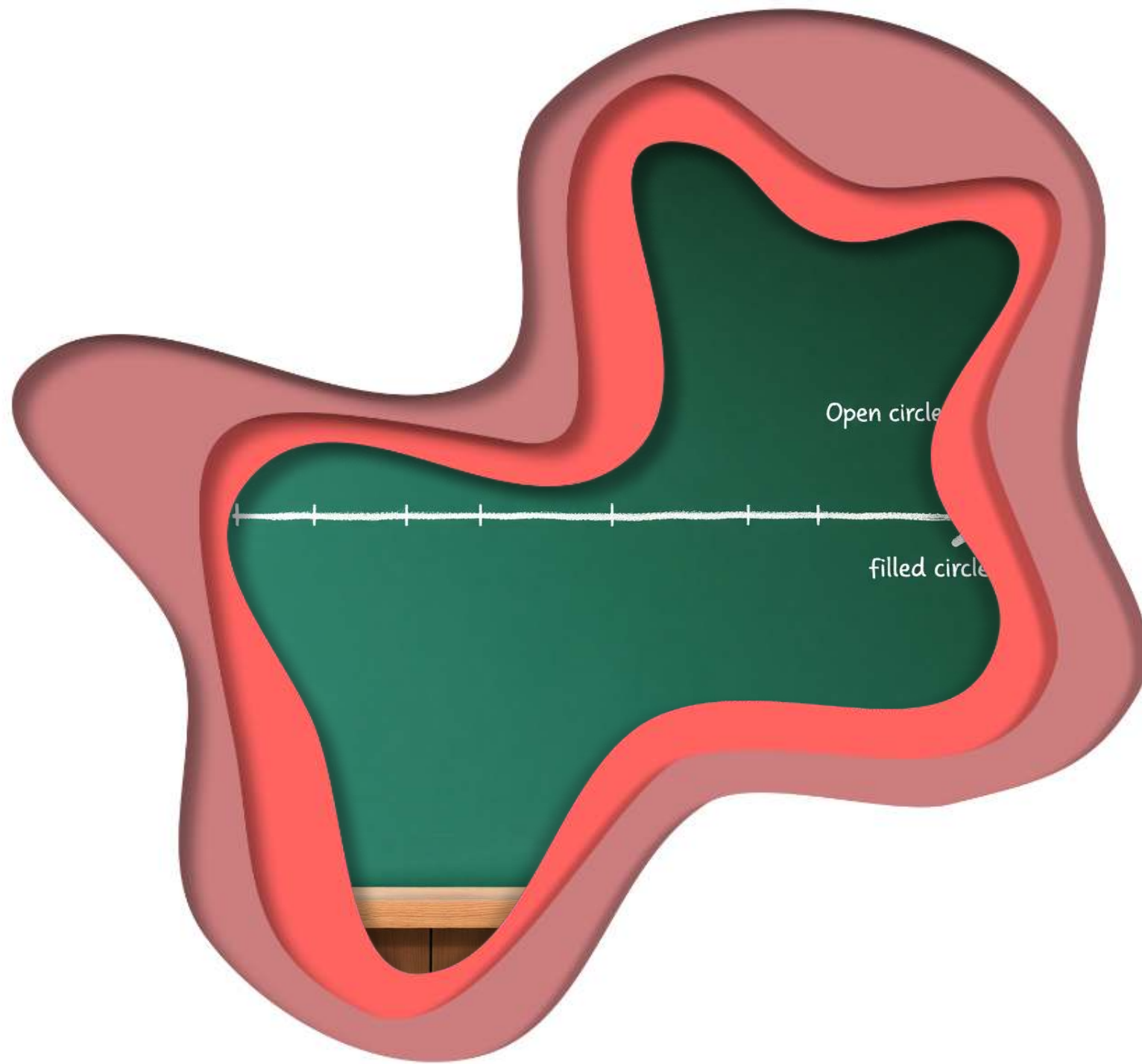
На числовой прямой удобно видеть, какие числа меньше, а какие больше. Чем правее точка, тем больше значение; чем левее, тем оно меньше.

Порядок на прямой полностью совпадает со знаками сравнения: правее означает больше, левее — меньше.

Учебная числовая прямая с отмеченными точками -5, -2, 0, 3 и 8



Границы решения на числовой прямой



- **Пустая точка**

Пустая точка показывает, что граница не входит в ответ. Так изображают строгие неравенства, где значение на самой границе не подходит.

- **Решение вправо**

Для $x > 4$ подходят все числа правее 4, но само число 4 не входит в ответ. На прямой это показывают стрелкой вправо и пустой точкой.

- **Закрашенная точка**

Закрашенная точка означает, что граница включена в решение. Такой знак используют для нестрогих неравенств, когда равенство тоже допустимо.

- **Решение влево**

Для $x \leq 4$ подходят 4 и все числа левее него. Здесь используется закрашенная точка, потому что граница включена в множество решений.

Алгоритм решения линейного неравенства

Последовательность шагов помогает получить равносильный ответ и правильно отметить его на числовой прямой.



Примеры решения линейных неравенств

01 Первый пример

В неравенстве $x + 5 > 12$ вычитаем 5 из обеих частей и получаем $x > 7$. Здесь используется обратное действие к сложению, знак не меняется.

03 Третий пример

Для $2x - 4 < 10$ сначала прибавляем 4, затем делим на 2. Итог: $x < 7$. Такой порядок шагов помогает не потерять исходный смысл.

02 Второй пример

В записи $3x \leq 18$ делим обе части на 3. Получаем $x \leq 6$, потому что деление выполняется на положительное число, и направление неравенства сохраняется.

04 Четвёртый пример

В неравенстве $-x \geq 3$ умножаем обе части на -1 и меняем знак на противоположный. Получаем $x \leq -3$, потому что деление или умножение на отрицательное число требует смены знака.

Сравнение преобразований неравенств с разными коэффициентами

Исходное	Преобразование	Ответ	Комментарий
$x - 3 \geq 9$	+3	$x \geq 12$	перенос
$4x > 20$	$\div 4$	$x > 5$	коэффициент
$-2x \leq 8$	$\div (-2)$	$x \geq -4$	знак меняется
$5 - x < 1$	-5	$-x < -4$	далее $\div (-1)$

Сопоставим исходные записи, действия и ответы на нескольких примерах.

Сложение и вычитание помогают переносить слагаемые, а при делении на отрицательное число знак неравенства обязательно меняется.

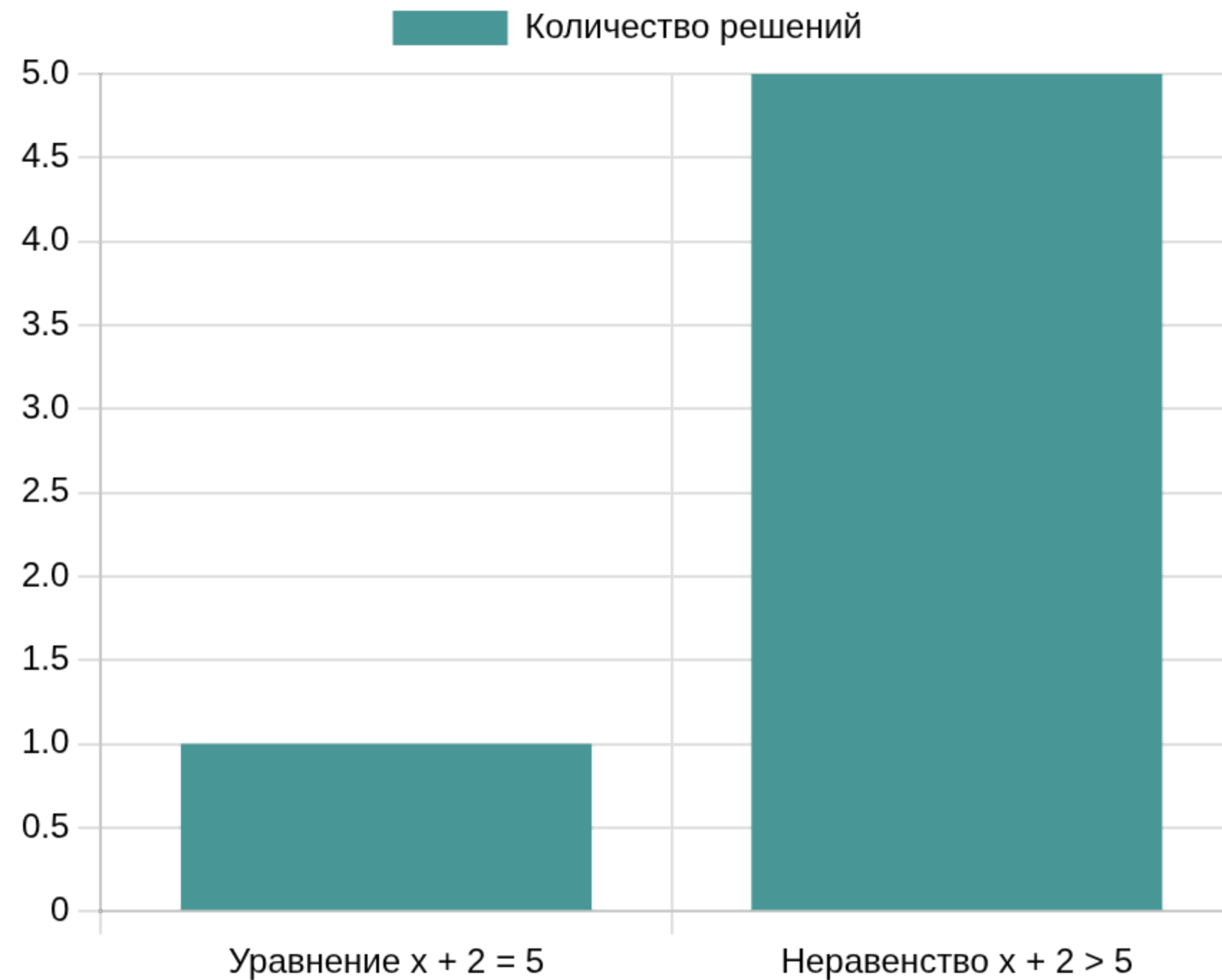
Примеры школьных преобразований линейных неравенств

Уравнение и неравенство: одно решение и множество решений

Уравнение обычно приводит к одному точному ответу, а неравенство — к целому промежутку подходящих значений.

Чем шире условие, тем больше решений; у неравенства их не одно, а множество.

Иллюстративный пример, составлено по учебным заданиям по алгебре.



Неравенства с модулем и их смысл

01

Модуль как расстояние

Модуль показывает, насколько число удалено от нуля на числовой прямой. Поэтому $|x|$ описывает не значение само по себе, а его расстояние до начала отсчёта.

03

Граница входит или нет

Запись $|x| \leq 5$ включает саму границу. Значит, подходят числа от -5 до 5 включительно, а знак равенства показывает, что крайние точки не исключаются.

02

Симметрия промежутка

Если $|x| < 3$, то подходят все числа между -3 и 3. Такой ответ симметричен относительно нуля, потому что одинаково учитываются левая и правая стороны.

04

Связь с близостью к нулю

Чем меньше модуль числа, тем ближе оно к нулю. Это удобно запоминать: у чисел с небольшим модулем координата находится ближе к центру прямой.

Неравенства в реальных ситуациях



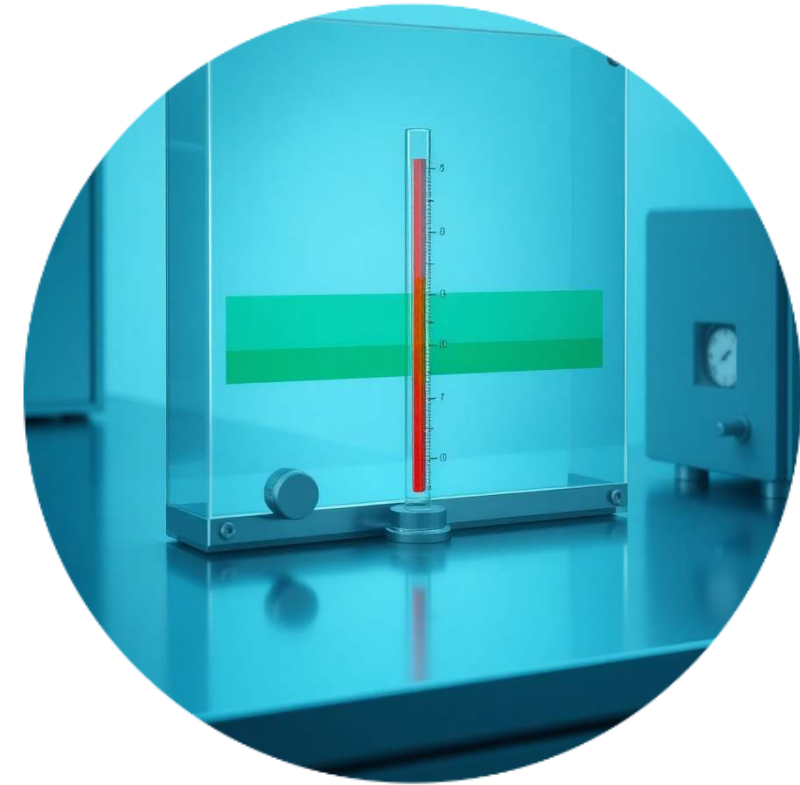
Багаж без лишнего веса

В самолёте для чемодана обычно задают предельную массу: больше нельзя, а допустимое значение зависит от правил перевозки. Такое условие удобно записывать неравенством, чтобы сразу понять, проходит ли багаж по норме.



Возраст и участие в событиях

На школьных и городских мероприятиях часто указывают минимальный возраст участников. Если человеку меньше нужного числа лет, он не подходит; если возраст достигнут, условие выполнено. Так неравенство помогает формально описать ограничение.

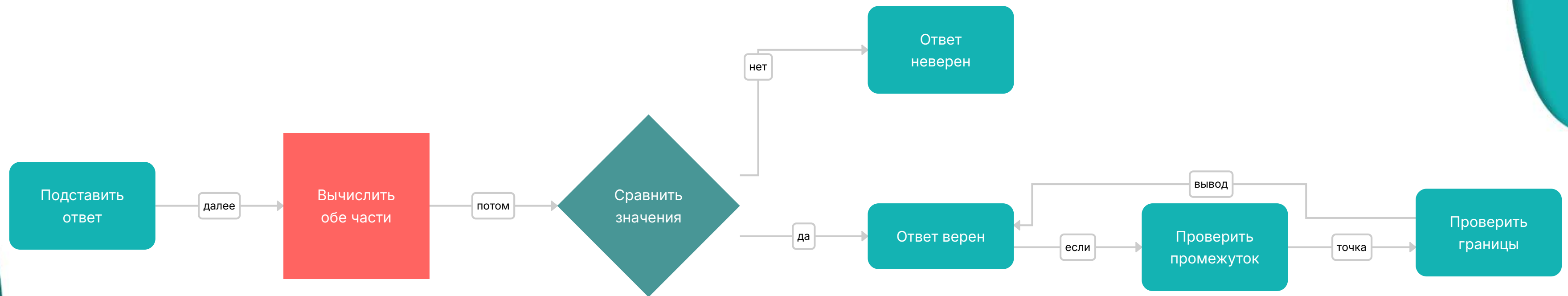


Время и безопасность

Неравенства нужны и для времени выполнения заданий, и для температуры на улице или в лаборатории. Они показывают допустимый диапазон, где условие остаётся верным, а выход за границу уже нарушает правило.

Как проверить решение неравенства

Последовательность действий при проверке ответа и промежутка решений.



Типичные ошибки при решении неравенств

Перепутанные знаки

Знаки $>$ и $<$ легко спутать, если не следить за направлением сравнения. Полезно перечитывать запись вслух: больше слева или больше справа, и сразу сверять смысл.

Отрицательный множитель

При делении или умножении на отрицательное число знак обязательно меняется. Если забыть это правило, решение окажется неверным, даже когда все вычисления выполнены правильно.

Неверные точки

Пустая и закрашенная точки на прямой означают разное. Пустая точка показывает, что граница не входит, а закрашенная — что она входит в ответ.

Потеря границы

Иногда при записи промежутка забывают одну из границ или путают скобки. Тогда множество решений описано не полностью, и ответ уже не совпадает с условием.

Проверка без подстановки

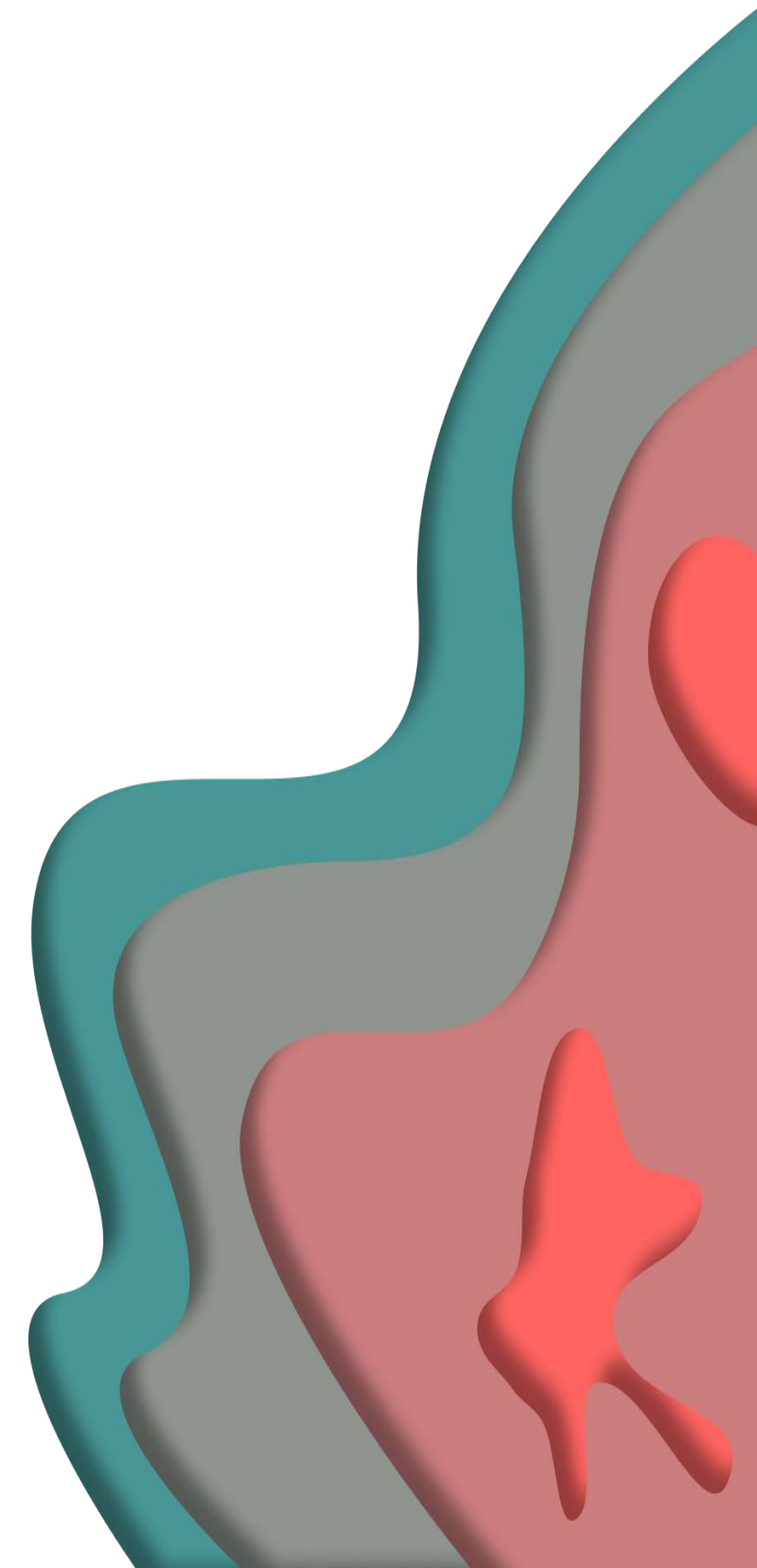
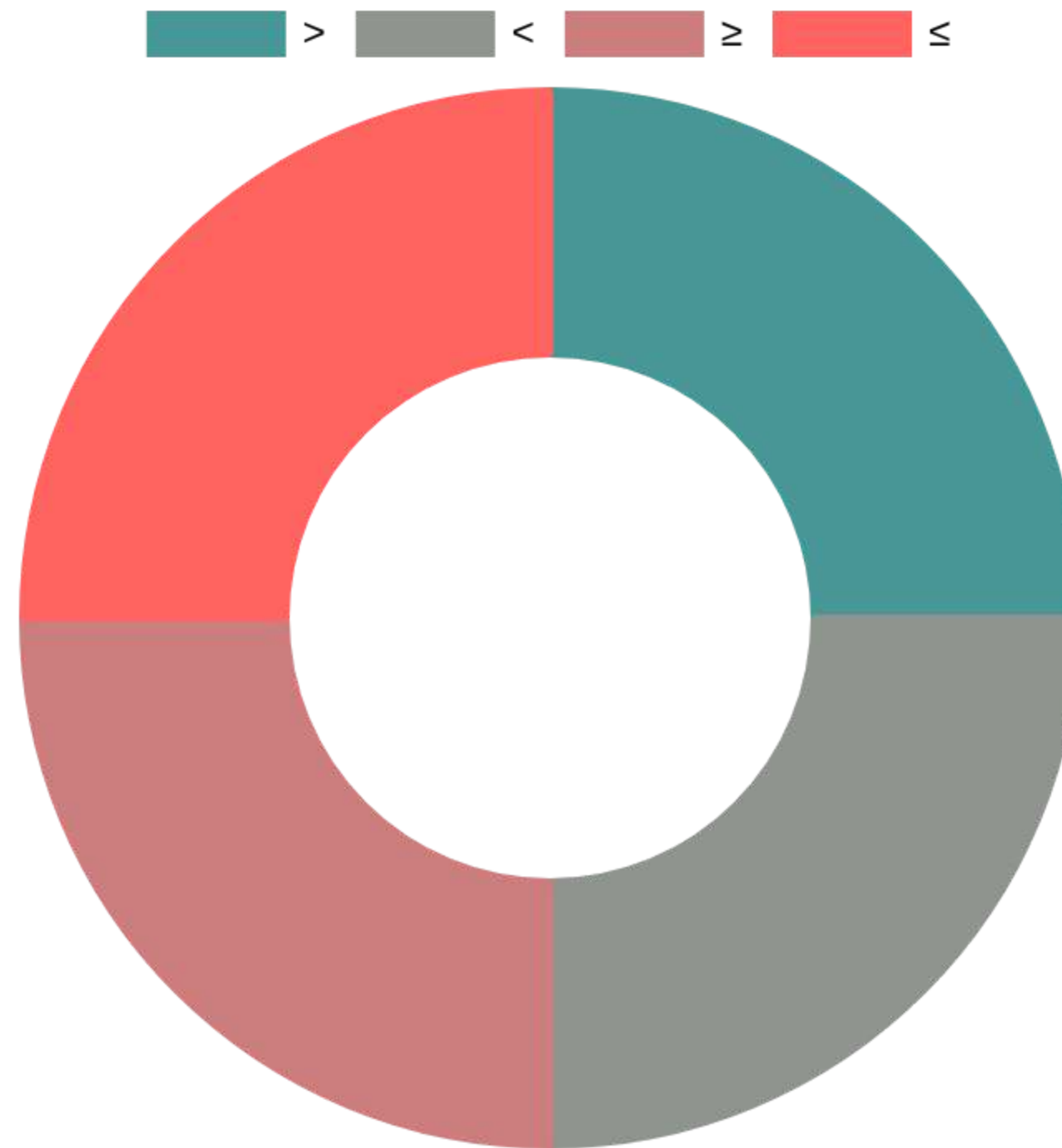
Даже правильный на вид ответ нужно подставить в исходное неравенство. Проверка помогает заметить ошибки в раскрытии скобок, переносе слагаемых и изменении знака.

Строгие и нестрогие неравенства

Строгие знаки отделяют границу от решения, а нестрогие позволяют включить её в ответ.

Различие между группами видно и в записи, и на числовой прямой: граница либо входит, либо нет.

Учебная схема по теме «Неравенства», составлено для презентации.



Запись решений через промежутки

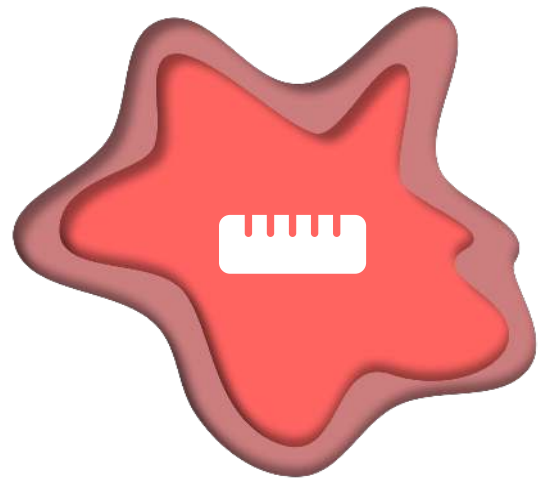
Связь между знаком неравенства, записью промежутка и расположением границ на числовой прямой.

Круглая скобка означает исключённую границу, квадратная — включённую; запись точно показывает все допустимые значения.

Стандартные обозначения промежутков в школьной алгебре.

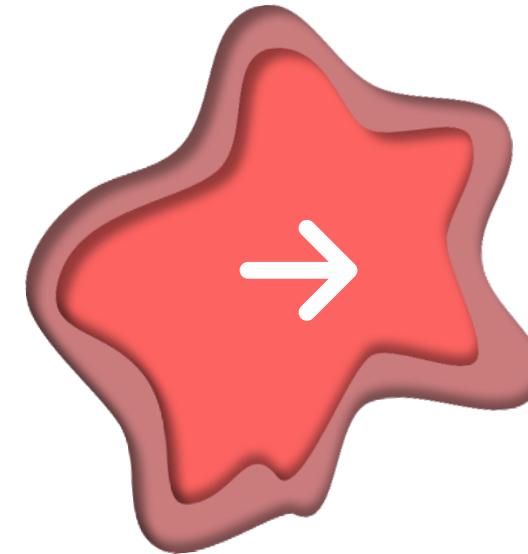
Неравенство	Промежуток	Граница	Смысл
$x > 2$	$(2; +\infty)$	2 не входит	строгое
$x \geq 2$	$[2; +\infty)$	2 входит	нестрого
$-1 < x \leq 4$	$(-1; 4]$	-1 нет, 4 да	составное

Связь неравенств с координатной прямой и сравнением рациональных чисел



Порядок на прямой

На координатной прямой каждое число имеет своё место. Чем правее точка, тем больше число, поэтому сравнение можно увидеть сразу, без длинных вычислений.



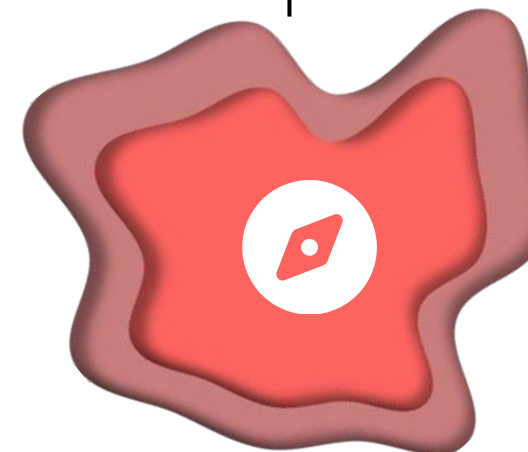
Правее значит больше

Если число расположено правее другого, оно всегда больше. Это правило работает для целых, дробных, десятичных и отрицательных чисел, если правильно отметить их на прямой.



Дроби и десятичные

Рациональные числа удобно сравнивать после перевода в общий вид или наглядного расположения на прямой. Тогда видно, какое число ближе к нулю, а какое дальше.



Алгебра и задачи

Сравнение чисел нужно не только на уроках, но и при решении неравенств. Оно помогает понимать промежутки, проверять ответы и выбирать подходящие значения переменной.

Составные неравенства и системы неравенств

01 Одна запись — два условия

Составное неравенство объединяет две границы сразу. Например, $2 < x \leq 7$ означает, что число больше 2, но не превосходит 7.

03 Пересечение промежутков

Если одно условие даёт один промежуток, а другое — второй, нужно найти их общую часть. Именно она и становится ответом, потому что остальные значения не подходят.

02 Общая область решений

Система неравенств состоит из нескольких условий, которые должны выполняться одновременно. Решение — это только те значения, которые подходят каждому неравенству сразу.

04 Практический смысл

Такая запись удобна, когда нужно задать диапазон допустимых значений: температуру, время, массу или длину. Неравенства помогают точно ограничить нужный промежуток.

Главные выводы о неравенствах в алгебре

Неравенства показывают, какие значения подходят, а какие нет, и часто дают целый промежуток решений. Умение сравнивать, преобразовывать и проверять ответы делает алгебру понятной и точной.

