

Неравенства между средними величинами и неравенство Коши– Буняковского

Сравниваем средние и учимся получать точные оценки.



Где встречаются средние и оценки

Средние помогают быстро сравнивать числа в задачах по алгебре, физике, статистике и экономике. Они показывают не только «середину», но и границы возможных значений без длинных вычислений.

Три основных среднего для двух положительных чисел

1 Арифметическое среднее

Оно показывает обычное усреднение двух чисел: складываем их и делим на два. Это самый привычный способ найти значение, расположенное между данными числами.

2 Геометрическое и гармоническое

Геометрическое среднее связано с корнем из произведения чисел, а гармоническое — с отношением двух произведений к их сумме. Эти средние особенно полезны в задачах на сравнение и скорости.

3 Главная цепочка

Для положительных чисел выполняется неравенство: арифметическое среднее не меньше геометрического, а геометрическое не меньше гармонического. Значит, первое обычно самое большое, а последнее — самое маленькое.

Пример для чисел 4 и 9

Арифметическое среднее

Для чисел 4 и 9 получаем 6,5: это сумма 13, разделённая на 2. Значение удобно воспринимать как точку между двумя данными числами.

Геометрическое среднее

Корень из произведения 4 и 9 равен корню из 36, то есть 6. Этот пример выбран удачно, потому что ответ получается целым числом.

Гармоническое среднее

По формуле $2ab/(a+b)$ получаем $72/13$, то есть примерно 5,54. Порядок значений подтверждает общее неравенство: 6,5 больше 6, а 6 больше 5,54.



Сравнение трёх средних на одном примере

Среднее	Формула	Для 4 и 9
Арифметическое	$(a+b)/2$	6,5
Геометрическое	$\sqrt{ab}$	6
Гармоническое	$2ab/(a+b)$	5,54...
Итог	$A \geq G \geq H$	верно

Таблица показывает формулы и значения для чисел 4 и 9.

На одном примере видно, что арифметическое среднее самое большое, геометрическое занимает середину, а гармоническое — самое маленькое.

По формулам средних для положительных чисел; пример с 4 и 9

1 случай

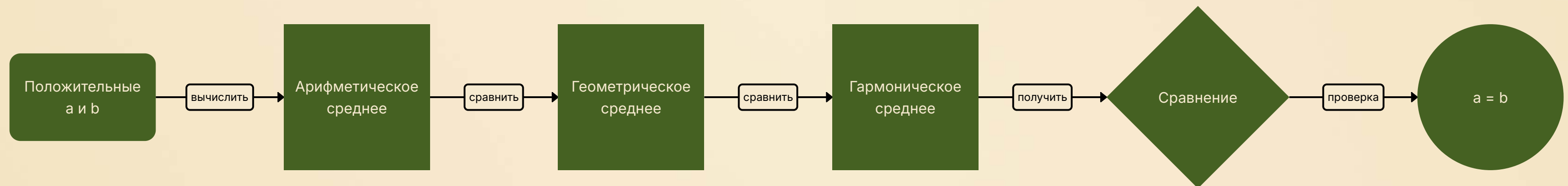
это бывает только тогда, когда
числа равны

Если оба числа одинаковые, все три средние дают один и тот же результат. Тогда неравенство превращается в равенство, и разницы между средними нет.

Свойство равенства для средних величин при $a = b$

Как связаны три средних

Путь от двух положительных чисел к общей цепочке неравенств



Формулировка неравенства Коши–Буняковского

1 Общая запись

Для двух наборов чисел сумма попарных произведений в квадрате не превосходит произведения двух сумм квадратов. Это одна из самых сильных оценок в алгебре и основа многих преобразований.

2 Что сравнивается

Неравенство сопоставляет сумму произведений с произведением сумм квадратов. Оно помогает понять, насколько велико выражение, даже если вычислить его точно трудно или неудобно.

3 Почему важно

Из этой оценки выводят другие полезные неравенства и получают границы значений в задачах. Поэтому она часто встречается в доказательствах и при поиске максимума или минимума.

Геометрический смысл неравенства

● Связь с векторами

В координатной плоскости неравенство связывает скалярное произведение двух векторов с их длинами. Это позволяет увидеть алгебраическую формулу через геометрический рисунок.

● Переход между темами

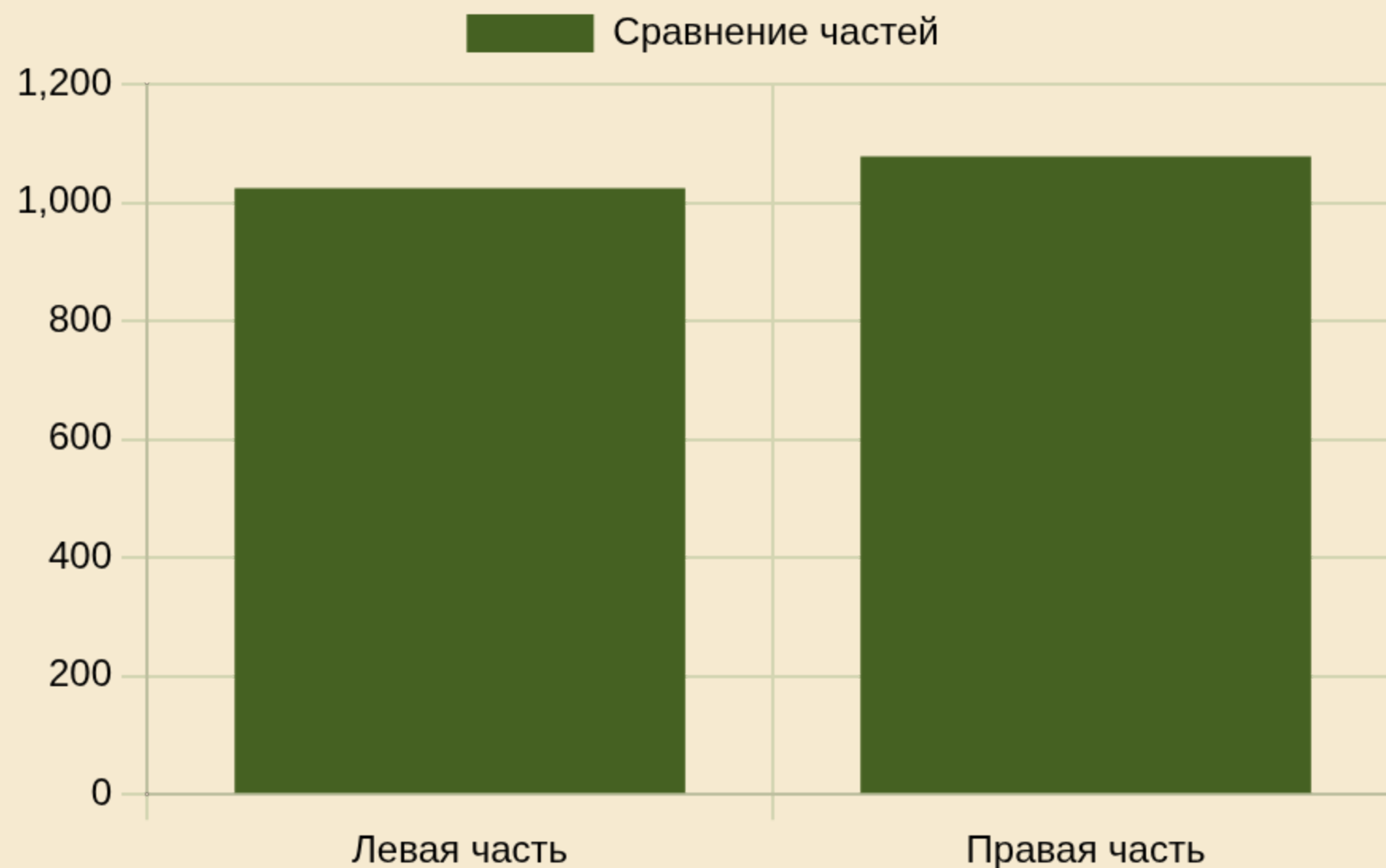
Такой взгляд помогает соединить геометрию и алгебру. Один и тот же пример можно рассматривать как вычисление по формулам и как работу с длинами на чертеже.

● Роль угла

Если два вектора выходят из одной точки, то их взаимное положение зависит от угла между ними. Неравенство показывает, что произведение длин задаёт верхнюю границу для скалярного произведения.



Проверка неравенства на числовом примере



Сравниваем квадрат суммы произведений и произведение сумм квадратов для двух троек чисел. Разница между ними невелика, но неравенство выполняется.

1024 меньше 1078, значит неравенство верно. Пример показывает, как быстро проверить оценку без сложного вывода.

Числовой пример из условия: (1,2,3) и (4,5,6)

Частный случай для двух пар чисел



Две пары чисел

Если рассматривать две пары чисел, неравенство Коши–Буняковского сравнивает сумму попарных произведений с произведением сумм квадратов. Это удобно, когда нужно быстро получить оценку без детального вычисления.



Удобство в задачах

Такая запись особенно полезна при работе с координатами, длинами отрезков и векторными величинами. Она позволяет заменять длинные преобразования одной аккуратной оценкой и сразу видеть границу выражения.



Школьный смысл

В обычных задачах этот частный случай помогает проверять, верно ли составлено решение, и не завышено ли значение выражения. Формула работает как инструмент быстрой и надёжной проверки.

Проверка на конкретных числах

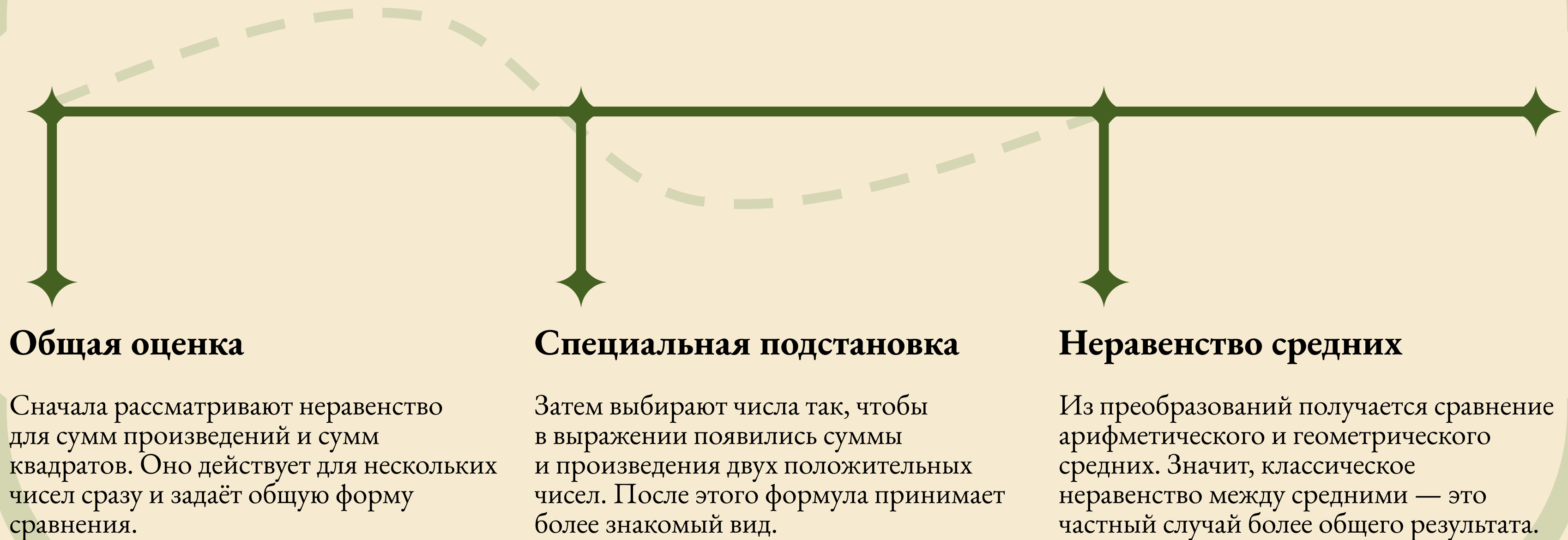
Подставим простые значения и сравним левую и правую части неравенства Коши–Буняковского.

Неравенство выполняется, а разница между частями невелика. Такой пример показывает, как формула работает на конкретных числах и как её можно быстро проверить.

Учебный пример по формуле Коши–Буняковского

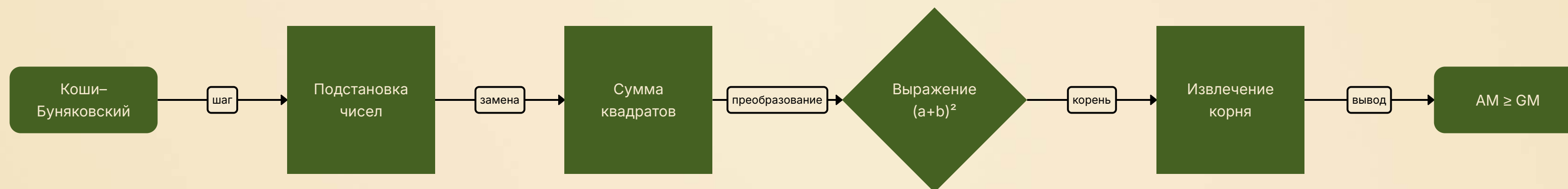
Величина	Значение	Результат
a1, a2	1, 2	—
b1, b2	3, 4	—
Сумма произведений	$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$	11
Проверка	11^2 и $5 \cdot 25$	$121 \leq 125$

Как неравенство Коши–Буняковского связано со средними

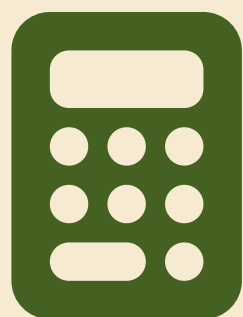


Путь к неравенству $AM \geq GM$

Схема показывает, как из общей оценки для сумм и квадратов получают неравенство между арифметическим и геометрическим средними.



Где применяются эти неравенства



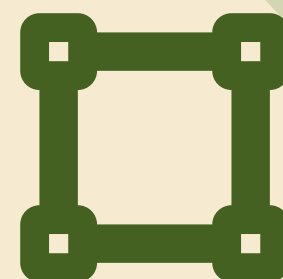
Оценка выражений

Неравенства между средними помогают сравнивать дроби, корни и другие выражения, когда точный расчёт слишком громоздкий. С их помощью быстрее находят верхнюю или нижнюю границу ответа.



Сравнение величин

Если нужно понять, какое из двух значений больше, оценки через средние дают аккуратный способ сравнения. Это особенно полезно, когда числа входят в сложные формулы.



Геометрия и координаты

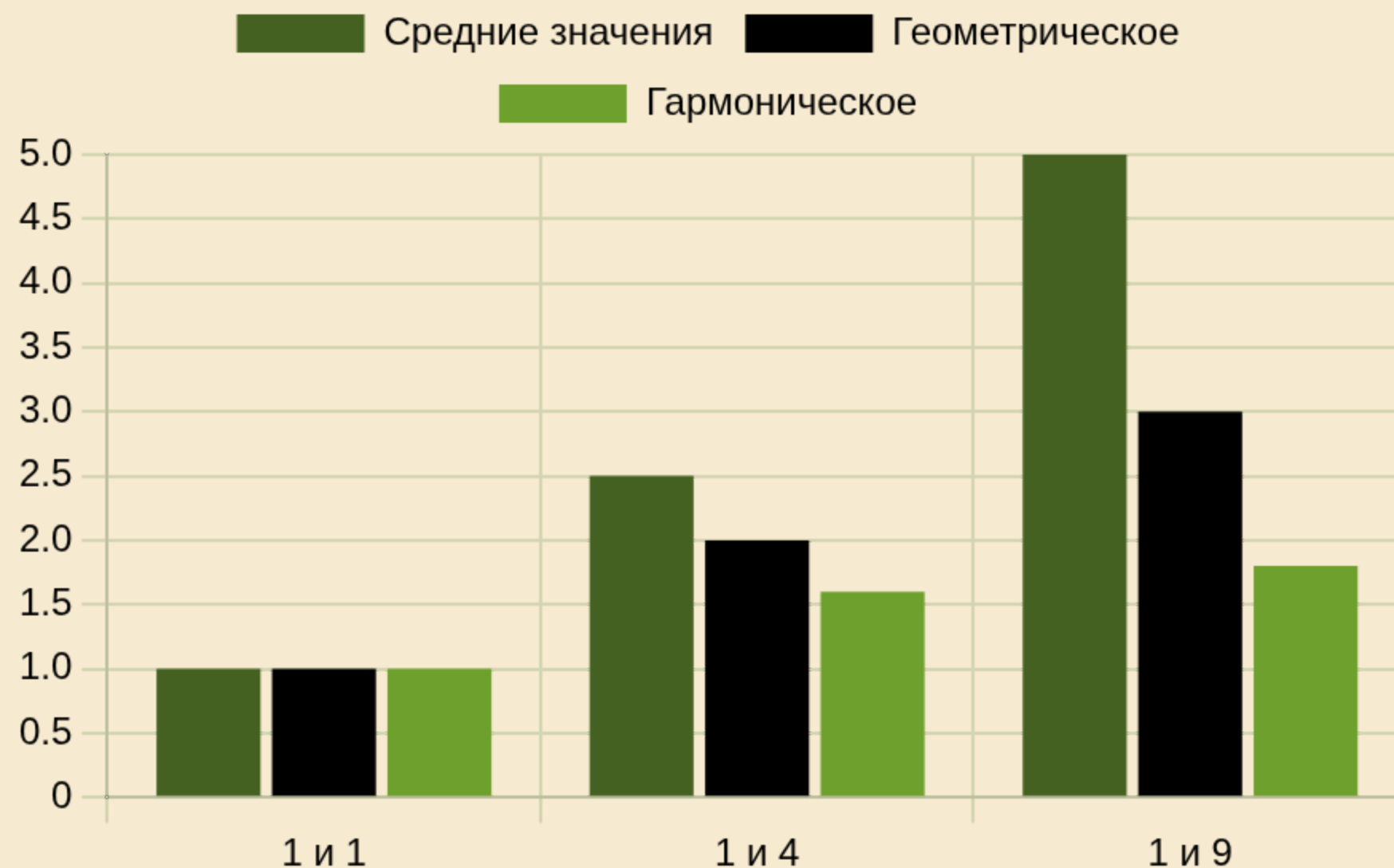
Неравенство Коши–Буняковского часто используют в задачах с отрезками, векторами и координатной плоскостью. Оно связывает длины и произведения координат, делая решение короче и нагляднее.



Максимум и минимум

В задачах на наибольшее и наименьшее значение эти неравенства помогают ограничить результат без полного перебора вариантов. Поэтому они часто встречаются в алгебраических и прикладных задачах.

Как меняется разрыв между средними



Чем сильнее отличаются исходные числа, тем заметнее расходятся значения трёх средних. Это видно уже на простых парах, где одно число остаётся равным 1.

При равных числах все средние совпадают. По мере роста разницы арифметическое удаляется от гармонического, а геометрическое занимает промежуточное положение.

Учебные вычисления для пар 1 и 1, 1 и 4, 1 и 9

Типичные ошибки при работе с формулами

● Игнорирование условий

Геометрическое и гармоническое средние в школьном курсе рассматривают для положительных чисел. Если не проверить это условие, можно получить неверный вывод или неправильно применить формулу.

● Случай равенства

Если $a = b$, все три средних совпадают, и неравенство превращается в равенство. Этот случай важно отдельно проверять, чтобы не допустить лишних знаков строгости.

● Неверный порядок

Частая ошибка — перепутать цепочку неравенств и написать средние в неправильной последовательности. Нужно помнить, что для положительных чисел арифметическое среднее не меньше геометрического, а геометрическое не меньше гармонического.

● Смешение формул

Иногда путают, где используется корень, а где дробь с произведением. Чтобы избежать ошибки, полезно сначала записать формулу полностью, а затем подставлять конкретные числа.

Мини-разбор задачи с числами 5 и 20

1 Арифметическое среднее

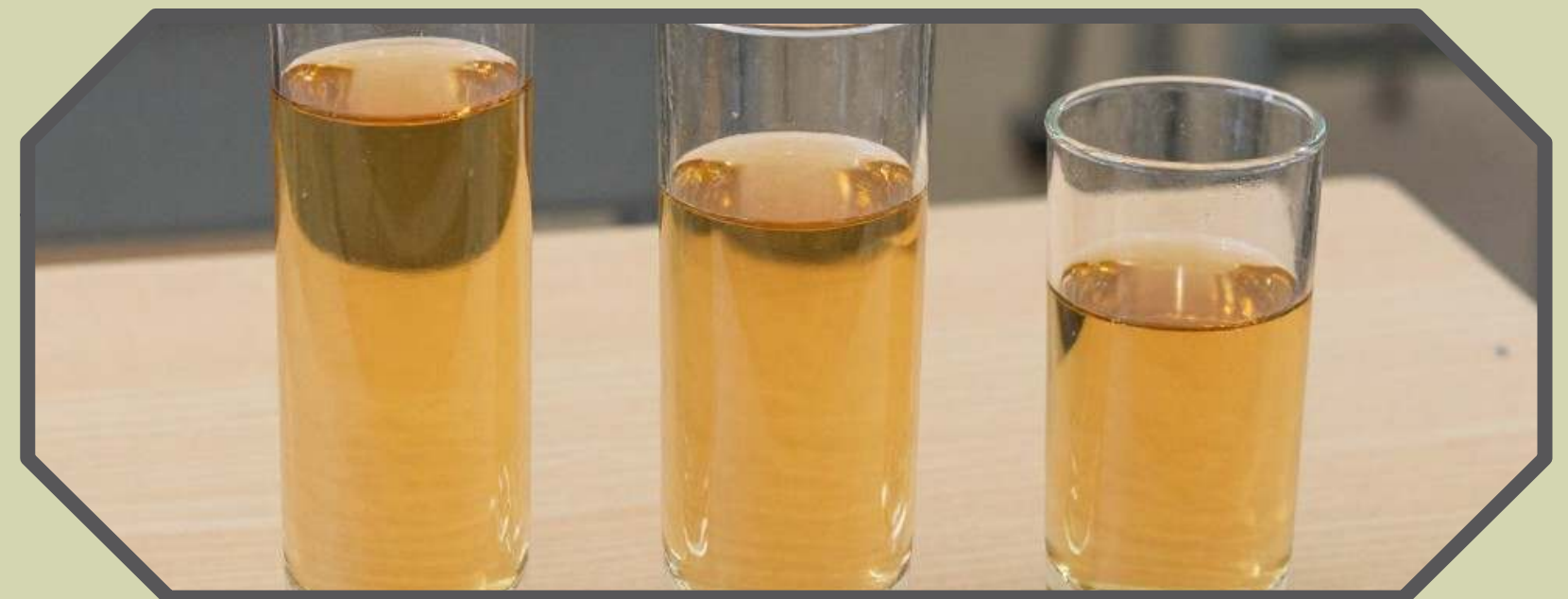
Складываем числа 5 и 20, затем делим сумму пополам. Получаем 12,5, и это наибольшее из трёх средних для данной пары.

2 Геометрическое и гармоническое

Геометрическое среднее равно 10, потому что $\sqrt{(5 \cdot 20)} = \sqrt{100}$.
Гармоническое среднее равно 8, если подставить числа в соответствующую формулу.

3 Сравнение результатов

Итоговая цепочка выглядит так: $12,5 > 10 > 8$. Пример показывает, что даже без длинных вычислений можно быстро увидеть порядок трёх средних.



Итоговое сравнение средних

■ Арифметическое ■ Геометрическое
■ Гармоническое

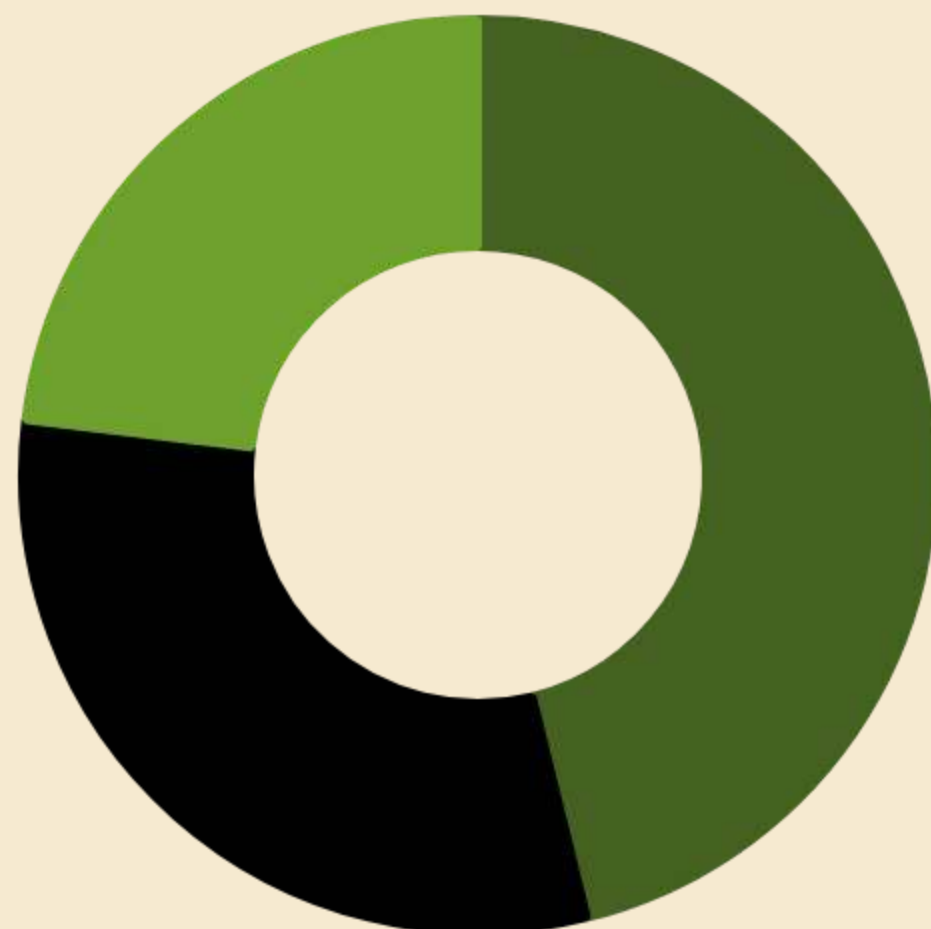
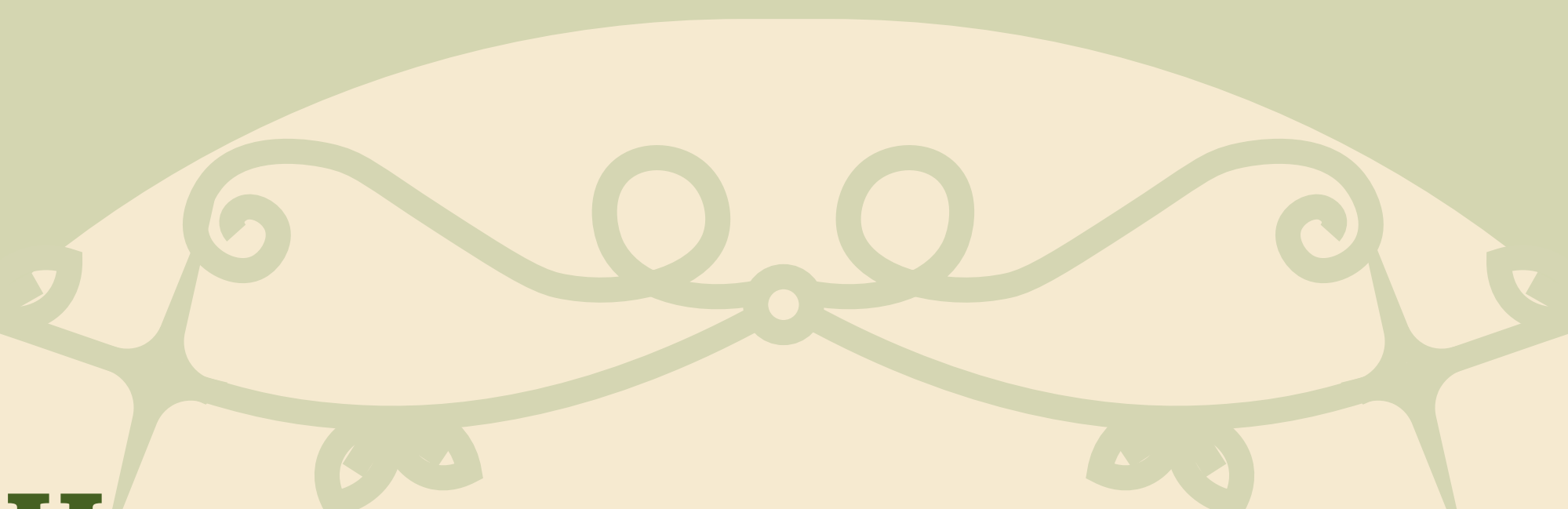


Диаграмма подчёркивает общий порядок средних и показывает, что между ними есть чёткая зависимость, а не случайное совпадение значений.

Для положительных чисел арифметическое среднее не меньше геометрического, а геометрическое — не меньше гармонического. Равенство возможно только при одинаковых числах.

Иллюстративная схема по формулам средних величин



Что важно запомнить

Средние величины позволяют удобно сравнивать числа и получать оценки без лишних вычислений.
Неравенство Коши–Буняковского расширяет эти идеи и помогает решать задачи по алгебре, геометрии и координатам.