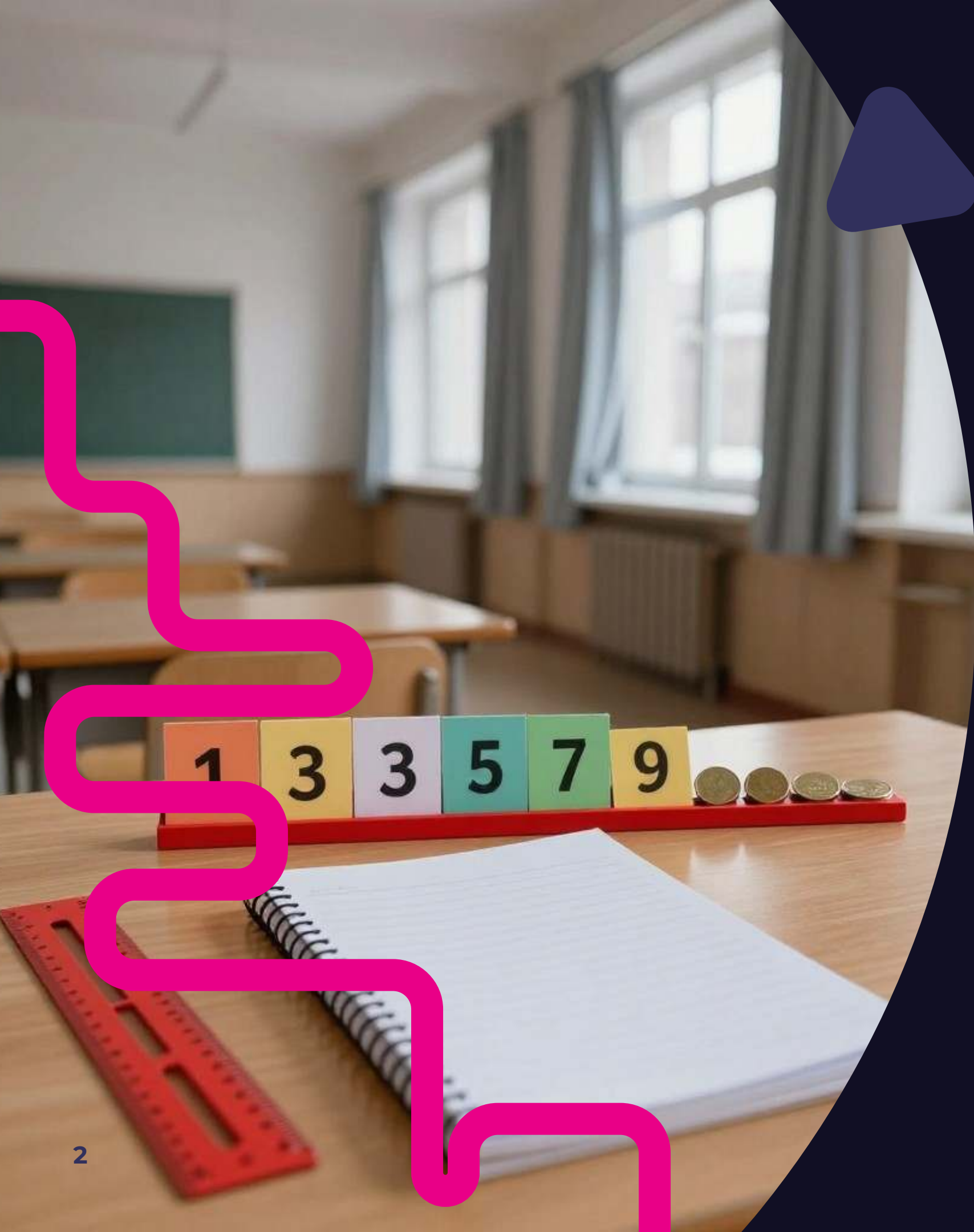


Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Как быстро найти сумму последовательности с одинаковым шагом?





Где встречается сумма последовательности

Такие задачи появляются в алгебре и в повседневных ситуациях: накопления, расписания, числовые ряды. Чтобы решить их быстро, важно знать первый член, разность и число членов.

Определение арифметической прогрессии

01

Постоянный шаг

Арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой разность между соседними членами всегда одна и та же. Эту разность обозначают буквой d .

02

Общий член

Любой член прогрессии можно найти по формуле $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Она показывает, как последовательность строится от первого члена.

03

Рост или убывание

Если d положительно, числа увеличиваются. Если d отрицательно, последовательность убывает. Когда d равно нулю, все члены одинаковы.

04

Примеры последовательностей

Примеры арифметической прогрессии: 3, 7, 11, 15; 20, 17, 14, 11; 5, 5, 5, 5. Во всех них разность между соседними числами постоянна.

Как выглядит арифметическая прогрессия

Запись первых членов

Начало прогрессии можно записать так: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$. Эта запись сразу показывает равномерный шаг.

Наглядная схема

Для иллюстрации подойдут ступеньки, линейка или ряд меток. Такие изображения помогают увидеть, что каждый следующий член отличается от предыдущего на одно и то же число.

Постоянное расстояние

Если между числами на схеме расстояние одинаковое, значит, перед нами арифметическая прогрессия. Это удобно для проверки примеров без вычислений.

Пример с шагом

В последовательности 4, 9, 14, 19 каждый следующий член больше предыдущего на 5. Поэтому разность d в этом примере равна 5.

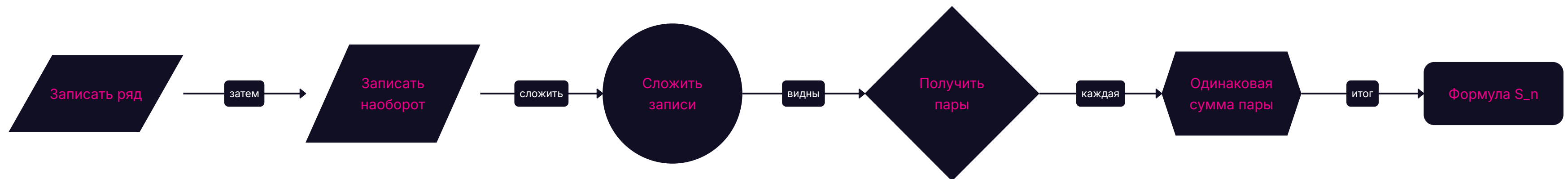
Главная идея

Внешний вид прогрессии подчёркивает её главное свойство: равный переход от одного члена к следующему. Именно это свойство делает возможной удобную формулу суммы.



Как выводят формулу суммы

Сумма получается при сложении последовательности в прямом и обратном порядке.



Основные формулы для нахождения суммы

01

Через первый и последний

Если известны первый и последний члены, удобно использовать формулу $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$. Она сразу даёт сумму без перечисления всех членов.

02

Через разность прогрессии

Когда последний член неизвестен, применяют запись $S_n = (2a_1 + (n - 1)d) \cdot n / 2$. В ней заранее учитывается разность d .

03

Когда формула особенно удобна

Первая формула полезна, если в задаче уже указан последний член. Вторая подходит, когда даны первый член, разность и число членов последовательности.

04

Одинаковый результат

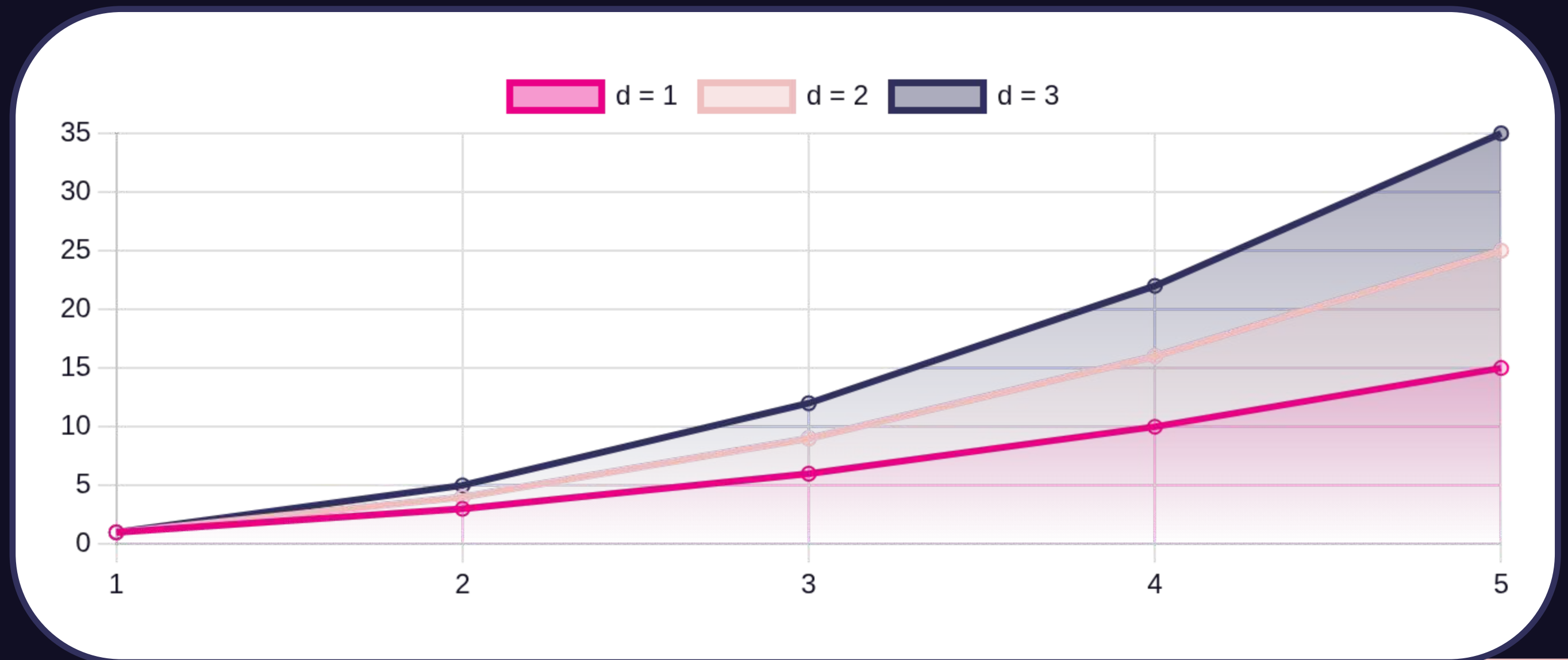
Хотя записи выглядят по-разному, обе формулы приводят к одному ответу. Это разные способы вычисления одной и той же суммы.

Как меняется сумма при разных значениях d

На графике все прогрессии начинаются с одного и того же первого члена, поэтому различие видно особенно чётко.

Чем больше разность, тем быстрее растёт сумма при одинаковом числе членов.

Учебный пример для наглядного сравнения



35

получается и при формуле,
и при прямом сложении

Для последовательности 3, 5, 7,
9, 11 оба способа дают
одинаковый результат
и подтверждают правильность
вычисления.

Учебный пример: $3 + 5 + 7 + 9 + 11$

Сравнение способов вычисления суммы

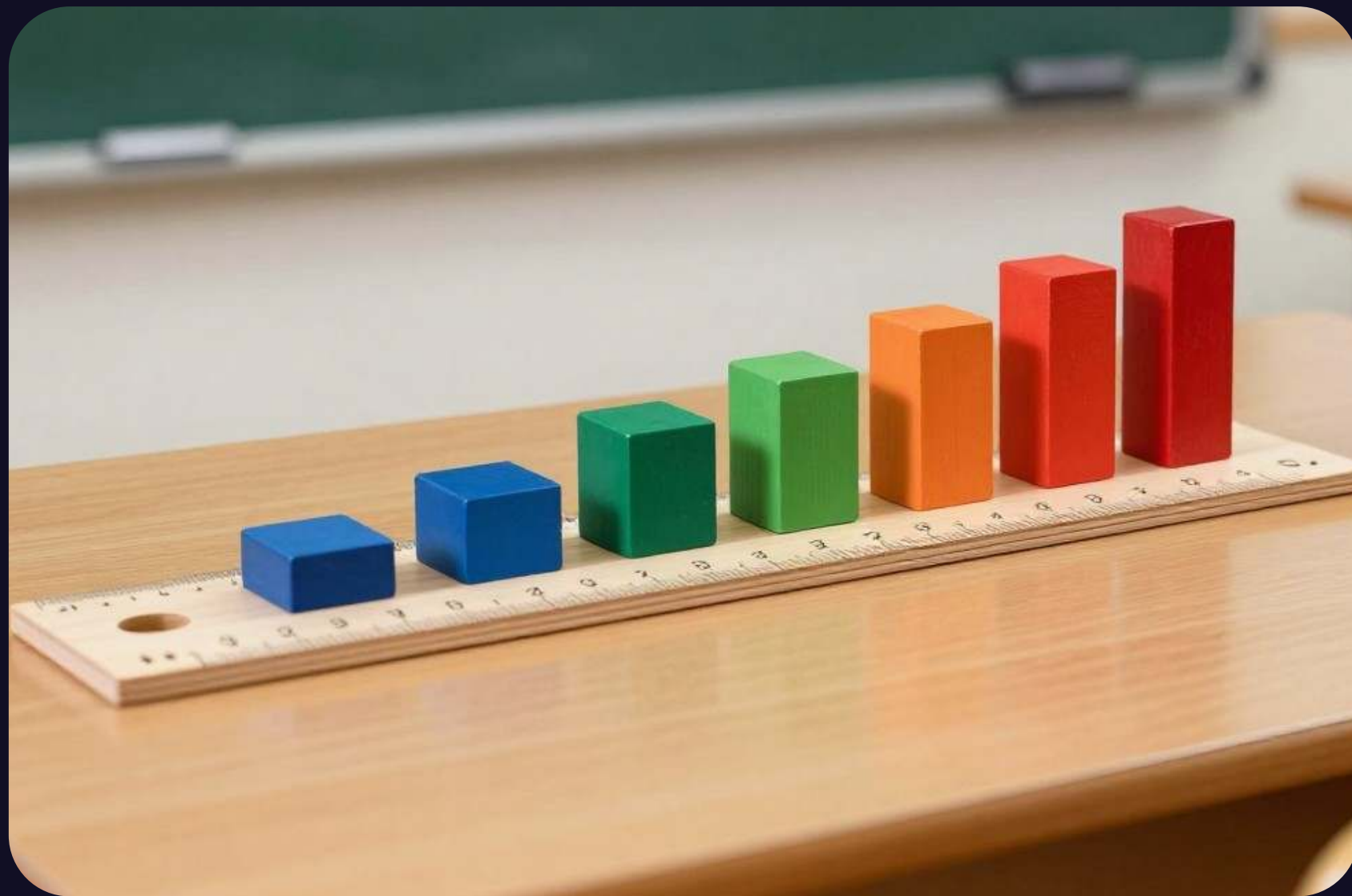
В таблице показано, какую формулу выбрать в зависимости от данных задачи и насколько это удобно.

Формула выбирается по уже известным данным: чем их больше, тем короче путь к ответу.

Сводка по формулам темы

Дано	Формула	Дополнительно	Плюс
a_1 и a_n	$S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$	n	быстро
a_1 , d и n	$S_n = (2a_1 + (n-1)d) \cdot n / 2$	a_n	удобно
небольшой ряд	любая	нет	можно проверить
длинный ряд	формула	нет	меньше ошибок

Геометрический смысл формулы суммы



Среднее значение

Выражение $(a_1 + a_n) / 2$ показывает среднее значение пары первого и последнего членов. Это помогает увидеть в формуле идею среднего арифметического.

Число членов

Множитель n означает, сколько членов входит в сумму. Поэтому формула соединяет две идеи: среднее значение пары и количество элементов последовательности.

Пары с одинаковой суммой

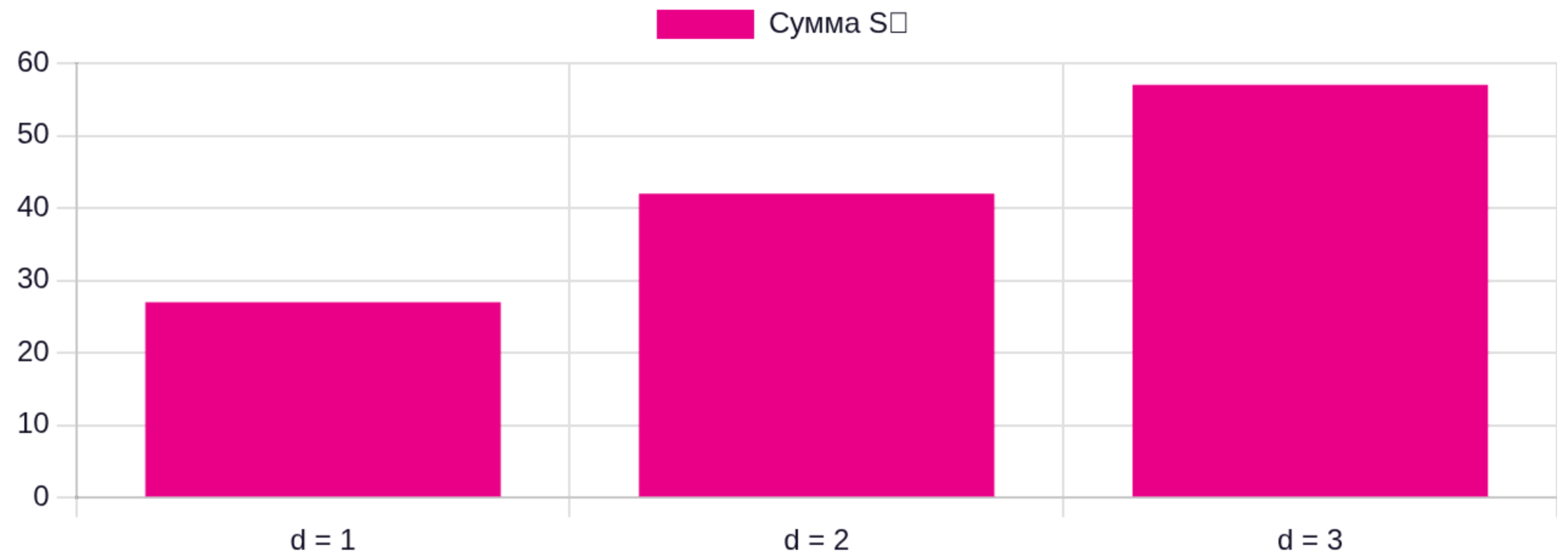
Если складывать числа попарно, получаются одинаковые суммы: первый с последним, второй с предпоследним и так далее. Именно на этом основано быстрое вычисление.

Сравнение сумм при одинаковом n

При одном и том же числе членов рост разности сразу отражается на итоговой сумме. Здесь взят один первый член и одинаковое n , чтобы сравнение было честным.

Чем больше шаг прогрессии, тем быстрее увеличивается сумма. При одинаковом n решающим становится именно значение d .

Расчёт по формуле $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$; пример с $a_1 = 2$, $n = 6$



Типичные ошибки при вычислениях



Путают формулу члена

Вместо $a_n = a_1 + (n - 1)d$ часто ошибочно подставляют n . Из-за этого последний член получается неверным, а дальше неправильно вычисляется вся сумма.



Забывают множитель $n/2$

Складывают первый и последний члены, но не умножают результат на $n / 2$. Тогда ответ оказывается вдвое меньше правильного значения.



Ошибаются при отрицательной разности

В убывающей прогрессии важно помнить, что d отрицательная. Если не учитывать это, последний член и сумма будут найдены с неверным знаком.



Неверно считают n

Иногда берут лишний или неполный набор членов и подставляют неправильное n . Тогда формула работает верно, но ответ не совпадает с условием задачи.

Примеры задач с готовыми ответами

Последовательность	Дано	S_n
1, 4, 7, 10, 13	$a_1=1, d=3, n=5$	35
10, 8, 6, 4	$a_1=10, d=-2, n=4$	28
2, 2, 2, 2, 2	$a_1=2, d=0, n=5$	10

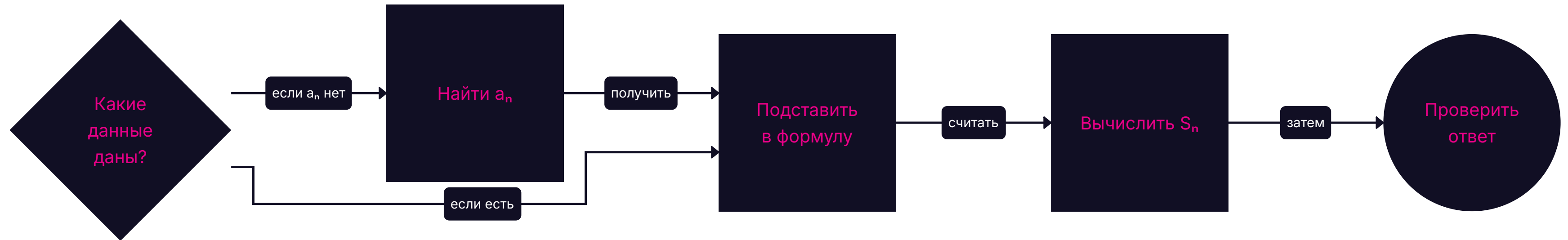
Короткие примеры показывают, что формула суммы работает для возрастающих, убывающих и постоянных прогрессий.

Одинаковая формула подходит для разных типов прогрессий. Меняются только исходные данные: первый член, разность и число членов.

Расчёты по формулам арифметической прогрессии

Алгоритм решения задачи на сумму

Последовательность действий при нахождении суммы первых n членов арифметической прогрессии



Историческая связь с методом Гаусса

01

Идея быстрого сложения

Метод связывают с Карлом Фридрихом Гауссом, который ещё в школьные годы заметил, что удобнее складывать числа парами. Такой приём резко сокращает количество вычислений.

02

Пример с числами от 1 до 100

В знаменитом примере пары $1 + 100$, $2 + 99$ и $3 + 98$ дают одинаковую сумму 101. Это позволяет сразу определить общий результат, не складывая все числа по одному.

03

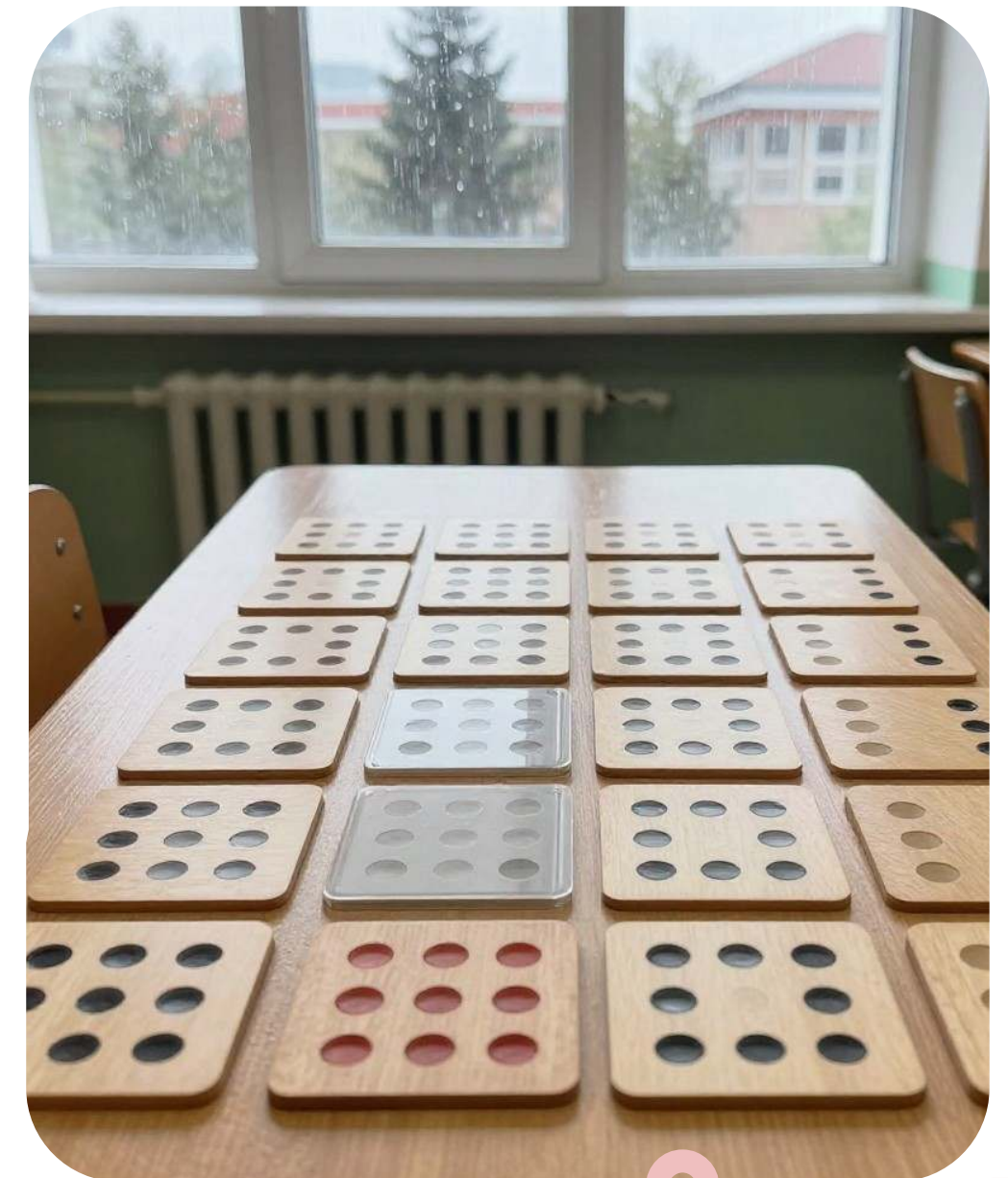
Связь с формулой прогрессии

Та же логика работает и для арифметической прогрессии: первый и последний члены образуют пары с одинаковой суммой. Поэтому формула S_n строится на том же принципе.

04

Почему это важно

История Гаусса показывает, что школьная формула не запоминается вслепую. Она вырастает из понятной идеи: удобно объединять числа так, чтобы считать быстрее и без ошибок.

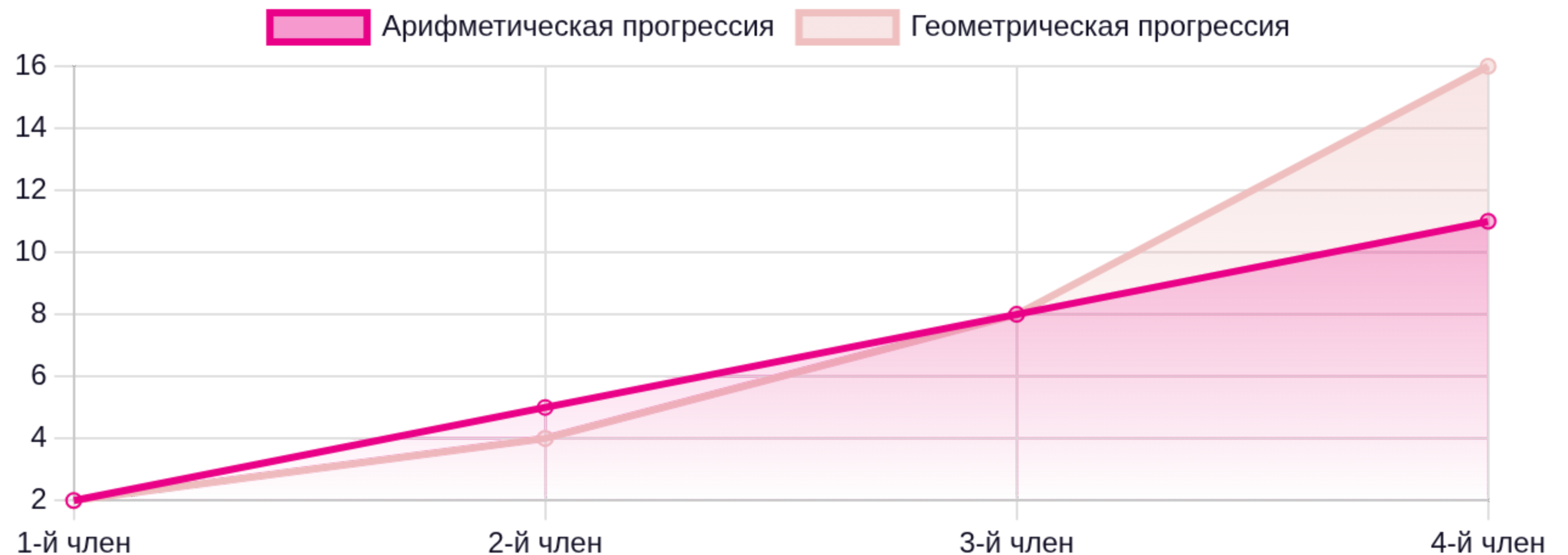


Арифметическая и геометрическая прогрессии: различие в росте

Обе последовательности могут начинаться одинаково, но дальше растут по-разному: одна — прибавлением, другая — умножением.

Арифметическая прогрессия растёт ровно, а геометрическая ускоряется. Поэтому для сумм этих последовательностей нужны разные формулы.

Пример последовательностей: 2, 5, 8, 11 и 2, 4, 8, 16



Задача из повседневной жизни

Накопления по неделям

Ученик решил откладывать деньги каждую неделю: сначала 50 рублей, потом 100, затем 150 и 200. Получилась арифметическая прогрессия с постоянным шагом 50, поэтому сумму легко найти по формуле, не считая все недели отдельно.



Быстрый итог без лишних действий

Вместо длинного сложения $50 + 100 + 150 + 200$ можно сразу увидеть, что первый и последний взносы образуют удобную пару. Такой способ помогает быстро проверить, сколько денег окажется в копилке за месяц.



Памятка по формулам темы

Небольшая таблица помогает быстро выбрать нужную формулу в зависимости от того, что известно в задаче.

Если известны исходные данные последовательности, сумму можно найти двумя способами. Выбор зависит от того, дан ли последний член или его нужно вычислить.

Формулы арифметической прогрессии

Что известно	Формула	Что находится
a_1 и d	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	Последний член
a_1, a_n, n	$S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$	Сумма
a_1, d, n	$S_n = (2a_1 + (n - 1)d) \cdot n / 2$	Сумма
Найден ответ	Сравнить с членами	Проверка

3

основные формулы достаточно, чтобы находить и проверять сумму любой арифметической прогрессии.

Три ключевые формулы помогают быстро считать сумму, находить последний член и проверять ответ без длинных вычислений.

Формулы темы арифметической прогрессии

Главное о сумме арифметической прогрессии

Формула $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$ даёт быстрый и надёжный способ находить сумму первых членов. Она подходит для любых арифметических прогрессий и помогает избегать ошибок.