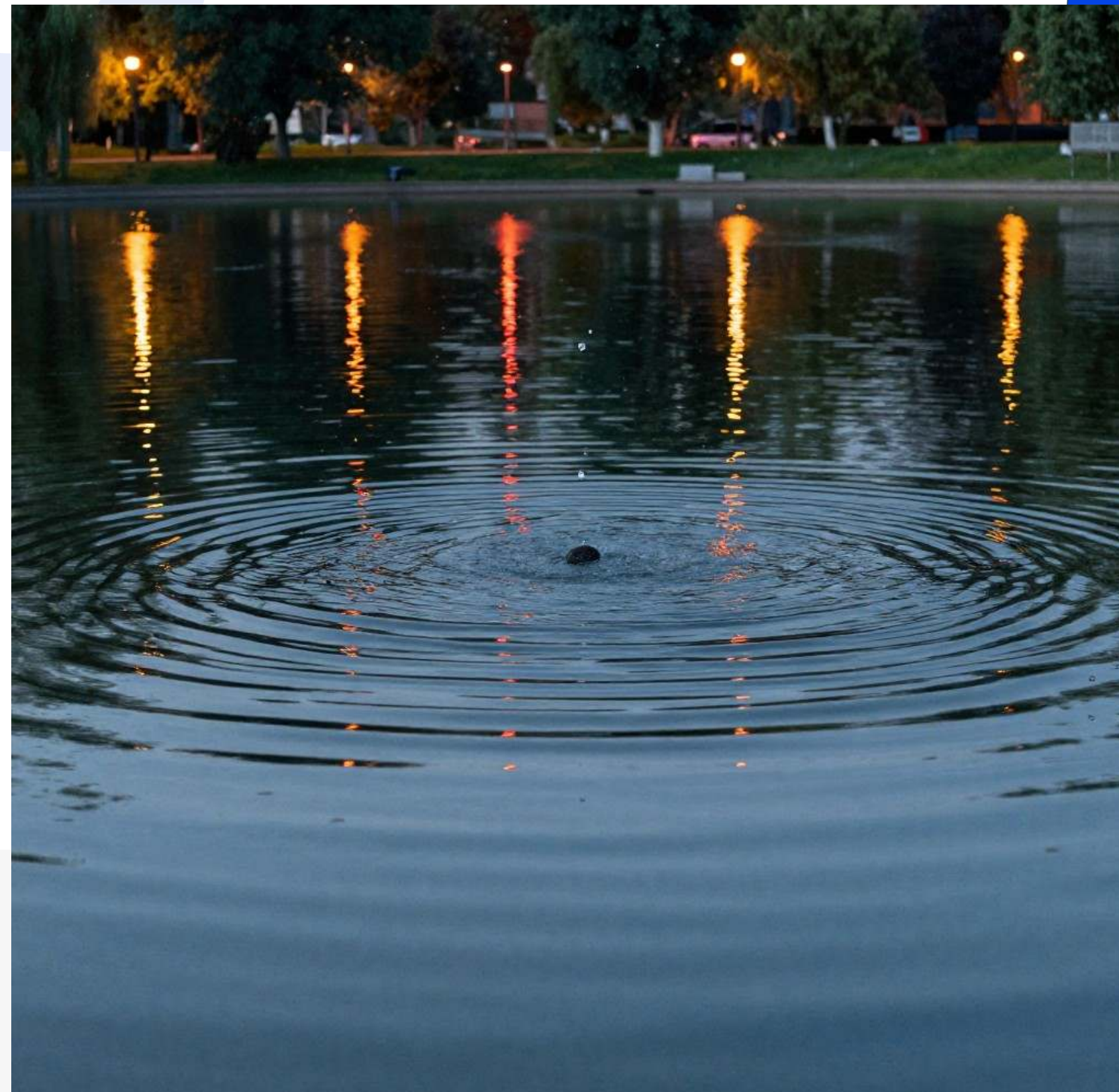


Уравнение $\sin x = a$: как найти все решения

Как найти все решения синусного уравнения?



Что нужно знать перед решением уравнения



Чтобы решать $\sin x = a$ без ошибок, нужно помнить диапазон синуса, период 2π , смысл $\arcsin a$ и работать в радианах.

Что значит решить уравнение

- **Найти все корни**

Решить уравнение — значит найти все значения x , при которых равенство $\sin x = a$ выполняется одновременно и без исключений.

- **Ответ в общем виде**

Обычно ответ записывают не одним числом, а множеством решений, потому что периодичность синуса создаёт бесконечно много подходящих значений.

- **Не пропустить решения**

Один и тот же график может пересекать прямую $y = a$ много раз, поэтому важно не остановиться на первом найденном угле.

Когда решения вообще существуют



Границы значения

Синус любого действительного аргумента не выходит за пределы от -1 до 1 , поэтому значения вне этого промежутка недостижимы.

Случай $|a| > 1$: решений нет

Нет пересечения

Если $|a|$ больше 1, горизонтальная прямая $y=a$ лежит выше или ниже графика $y=\sin x$ и не может его пересечь.

Пустое множество

Следовательно, уравнение не имеет действительных корней, а ответ записывают как пустое множество $\emptyset$.



Случай $a = 1$

01

Максимум синуса

При $a=1$ синус должен достичь своего максимума, а это возможно только в верхней точке графика.

→

03

Все корни

Из периодичности получаем все решения:
 $x = \pi/2 + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то есть вершина повторяется через каждый период.

→

02

Первый корень

Базовое решение: $x = \pi/2$, потому что $\sin(\pi/2) = 1$ и именно здесь график поднимается до вершины.

→

04

Внутри одного периода

На отрезке $[0; 2\pi]$ остаётся единственный корень $\pi/2$, что удобно для быстрой проверки.

→

Случай $a = -1$

01 Минимум синуса

При $a = -1$ синус должен достичь наименьшего значения, то есть опуститься до нижней точки своего графика.

02 Первый корень

Базовое решение можно взять как $x = -\pi/2$, поскольку $\sin(-\pi/2) = -1$.

03 Все корни

После добавления периода получаем $x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; эквивалентная запись — $x = 3\pi/2 + 2\pi k$.

04 Внутри одного периода

На отрезке $[0; 2\pi]$ остаётся только одно решение: $x = 3\pi/2$.

Базовый угол $\alpha = \arcsin a$

01

Вводим α

Если $|a| < 1$, удобно ввести $\alpha = \arcsin a$: это главный угол, который сразу даёт одно из решений уравнения.



02

Где лежит угол

Значение α всегда лежит в промежутке $[-\pi/2; \pi/2]$, поэтому его легко контролировать и не путать с лишними периодами.



03

Переход к общему ответу

Дальше α используют как отправную точку: через симметрию и периодичность получают весь набор корней.



Почему появляются два угла



- **Два угла**
У синуса есть два угла с одинаковым значением внутри одного периода, поэтому одного найденного значения α недостаточно для полного ответа.
- **Симметричный угол**
Второй угол выражается как $\pi - \alpha$: именно здесь синус сохраняет то же значение, хотя аргумент расположен по другую сторону от вертикали $x = \pi/2$.
- **Графический смысл**
Эта симметрия наглядно видна на графике: левая и правая части одного «горба» дают одинаковую высоту.

2

семейства решений обычно появляются при $|a| < 1$.

Свойства функции $\sin x$.

Для $|a| < 1$ в одном периоде возникают две точки пересечения с прямой $y=a$.



360°

поэтому второй корень получают через угол
 $180^\circ - \alpha$

Тригонометрическая окружность и свойства функции $\sin x$

В градусной мере период синуса остаётся
тем же по смыслу: это полный оборот
на окружности.





2

достаточно проверить два характерных угла
в каждом периоде

Свойства тригонометрических уравнений и периодичность
синуса

Для проверки достаточно сравнить
найденные базовые углы и учесть
повторение через период функции.



Пример 1: $a = \frac{1}{2}$

Базовый угол

Сначала находим базовый угол: $\alpha = \arcsin(\frac{1}{2}) = \pi/6$. Это одно из двух значений внутри периода, которое сразу согласуется с таблицей синусов.

Полный ответ

Затем используем симметрию: второй корень в одном периоде равен $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Общий ответ записывают с добавлением $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



Пример 2: $\alpha = \sqrt{2}/2$

01 Находим α

Из таблицы значений сразу видно, что $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, значит $\alpha = \pi/4$. Это удобный пример, где базовый угол узнаётся без вычислений.

02 Второй угол

Второе решение внутри периода получается как $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$. Оба угла лежат в одном промежутке и дают симметричную пару корней.

03 Записываем ответ

Итоговый ответ: $x = \pi/4 + 2\pi k$ и $x = 3\pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Эти углы часто используют как опорные при решении задач.



Пример 3: отрицательное α



01

Базовый угол



При отрицательном значении аргумента базовый угол тоже оказывается отрицательным: $\alpha = \arcsin(-1/3) < 0$. Это нормально и отражает положение точки на нижней ветви синуса.

02

Второй корень



Второй корень в пределах периода строится по формуле $\pi - \alpha$. Поскольку α отрицателен, этот угол автоматически становится больше $\pi/2$ и остаётся допустимым решением.

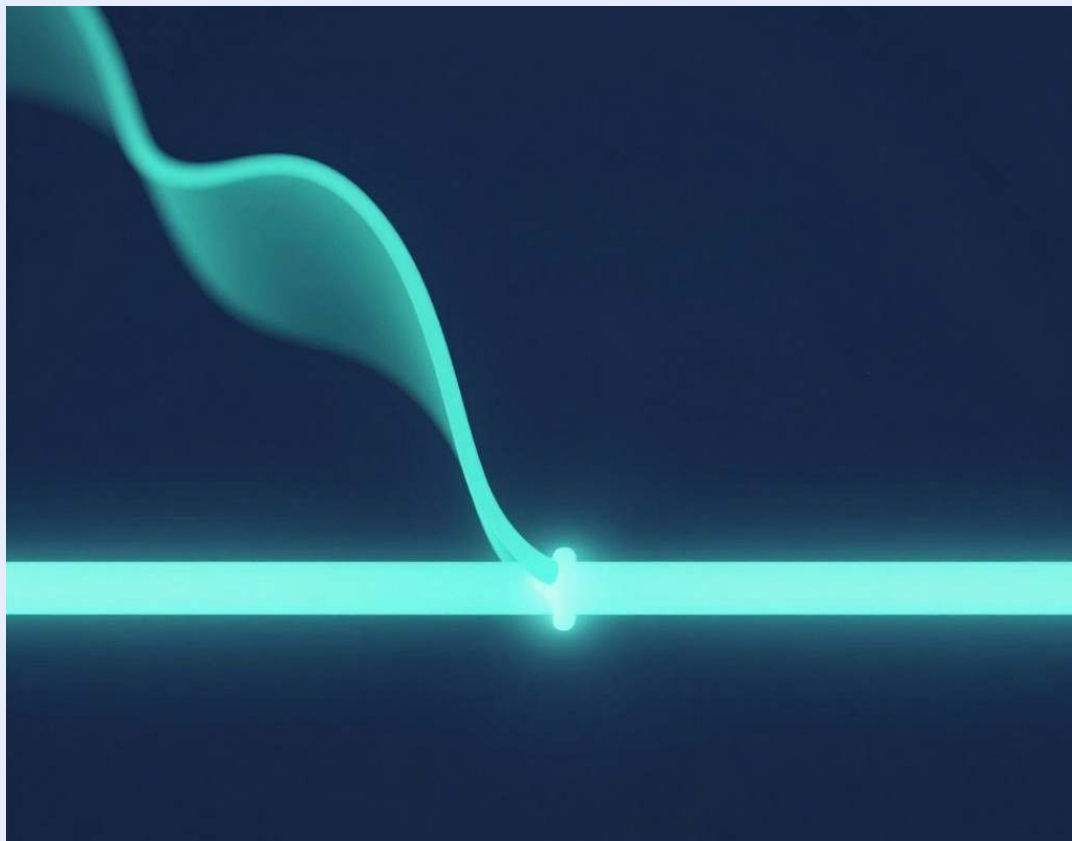
03

Общий вид



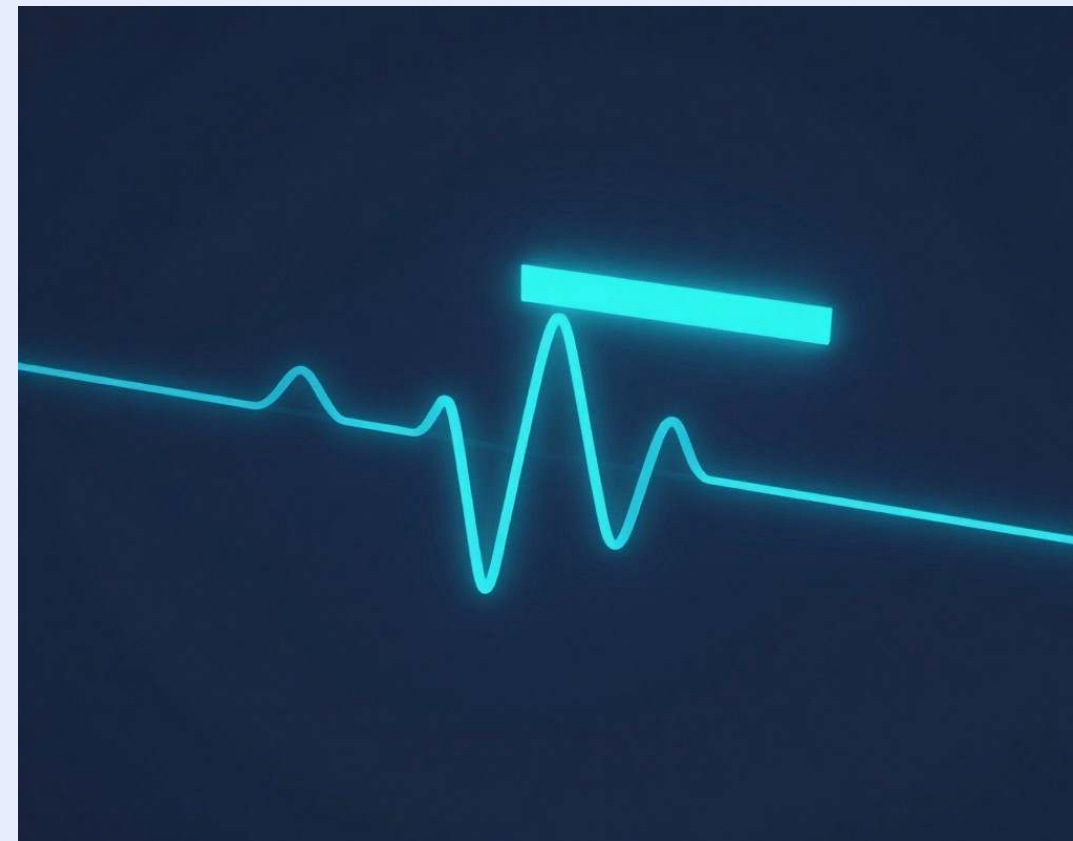
Общее решение записывают без изменений: $x = \alpha + 2\pi k$ и $x = \pi - \alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Такая запись одинаково работает для положительных и отрицательных α .

Графическая интерпретация



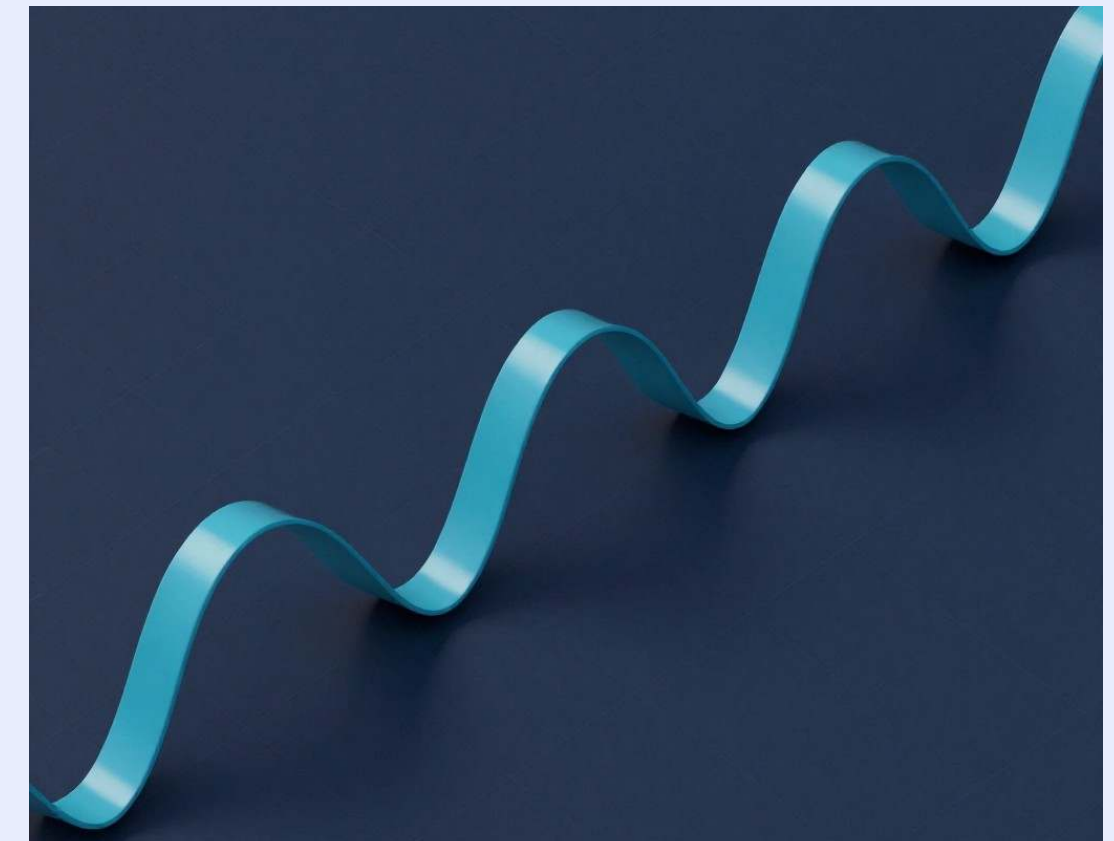
Точки пересечения

На графике видно, что каждое решение — это точка пересечения синусоиды с горизонтальной линией $y = a$. Чем ниже линия, тем ближе пересечения к минимуму функции.



Когда решений нет

Если прямая $y = a$ находится выше 1 или ниже -1 , график $y = \sin x$ её не достигает. Тогда пересечений нет и решений тоже нет.

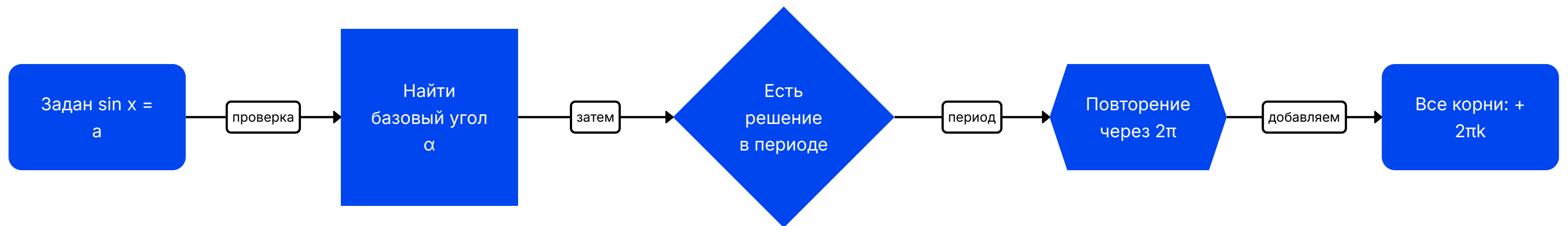


Повторяемость графика

При $|a| < 1$ обычно видны две точки пересечения за один период. Затем картина повторяется, потому что синус — периодическая функция.

Почему решения повторяются

Периодичность синуса и сдвиг аргумента на 2π сохраняют значение функции.





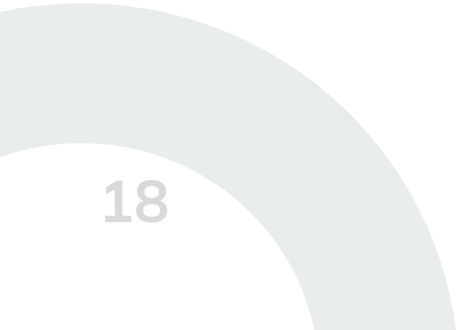
Как ограничить решения промежутком

При ограничении промежутком сначала выписывают общее решение, а затем отбирают подходящие значения целого k .

Промежуток не меняет формулу общего решения, но сокращает множество корней до допустимых значений.

Промежуток	Что остаётся
$[0; 2\pi]$	корни внутри
$[-\pi; \pi]$	оба семейства

Общий вид решений и правила отбора корней по промежутку



Типичные ошибки

01

Не проверяют область значений

Сначала всегда проверяйте, может ли уравнение вообще иметь решения: для синуса это условие $|a| \leq 1$. Без этой проверки легко получить несуществующие корни.

02

Теряют второй корень

Нельзя ограничиваться только углом α . Если забыть второй корень $\pi - \alpha$, ответ будет неполным даже тогда, когда значение a попадает в допустимый диапазон.

03

Не учитывают период

Запись без $2\pi k$ делает ответ частным, а не общим. Для тригонометрических уравнений это критическая ошибка, потому что решений бесконечно много.

04

Путают единицы измерения

Рadiany и градусы нужно не смешивать. Если формулы выписаны в одной системе, все углы, включая вспомогательные, должны быть выражены именно в ней.

05

Ошибаются со знаками

При отрицательном a важно правильно определить знак базового угла и не перепутать симметричный корень. Иначе меняется положение решения на окружности.





Уравнение $\sin x = a$: уверенный алгоритм решения

Главная идея проста: сначала проверяем, возможны ли решения, затем находим базовый угол и записываем два семейства корней. После этого остаётся лишь учесть нужный промежуток и не потерять периодичность.

