

# Рациональные дроби: три главных действия

Умножаем, делим и возводим  
в степень без лишних ошибок.



# Рациональные дроби в алгебре

Рациональная дробь — это дробь, где сверху и снизу стоят многочлены. Главное условие: знаменатель не должен обращаться в ноль.



# Умножение: зачем нужен алгоритм

## Начало вычислений

Сначала многочлены раскладывают на множители, чтобы увидеть общие части. Без этого сокращение часто невозможно или становится неудобным.

## Сокращение

Затем одинаковые множители убирают в числителях и знаменателях. Это уменьшает выражение и помогает избежать громоздких перемножений.

## Оставшиеся множители

После этого перемножают оставшиеся части и приводят ответ к простому виду. Такой порядок делает решение быстрее и аккуратнее.

## Меньше ошибок

Алгоритм особенно полезен в больших примерах, где без него легко потерять знак, множитель или ограничение на переменную.



# Правило умножения дробей

01

## Общее правило

• Если даны дроби  $A/B$  и  $C/D$ , их произведение находят по правилу  $(A/B) \cdot (C/D) = AC/BD$ . При этом знаменатели не должны быть равны нулю.

02

## Сначала сокращение

• Перед перемножением полезно осмотреть выражение на общие множители. Их можно сократить заранее, чтобы ответ получился короче и понятнее.

03

## Финальная проверка

• После сокращения перемножают оставшиеся числитель и знаменатель, а затем проверяют, нельзя ли упростить результат ещё раз.

# Умножение с предварительным сокращением

## Разложение

Разложим  $x^2 - 9$  на множители:  $(x-3)(x+3)$ . Тогда в произведении сразу видно общий множитель  $x+3$ , который можно сократить.

## Короткий ответ

После сокращения остаётся  $(x-3)/(x-1)$ . Это показывает, что не всегда нужно перемножать длинные выражения до конца.

## Ограничения

Из исходной записи следует ограничение:  $x \neq -3$  и  $x \neq 1$ . Эти значения исключаются, потому что обращают знаменатели в ноль.



# Умножение: сокращение до вычисления

## 01 Что сокращается

В записи есть числа 2 и 6, а также множитель  $x-5$ . Их удобно сократить ещё до перемножения, чтобы не работать с лишними числами.

## 02 Промежуточный вид

После сокращения остаются множитель  $x$  и скобка  $(x+1)$ . Так выражение становится намного проще для вычисления.

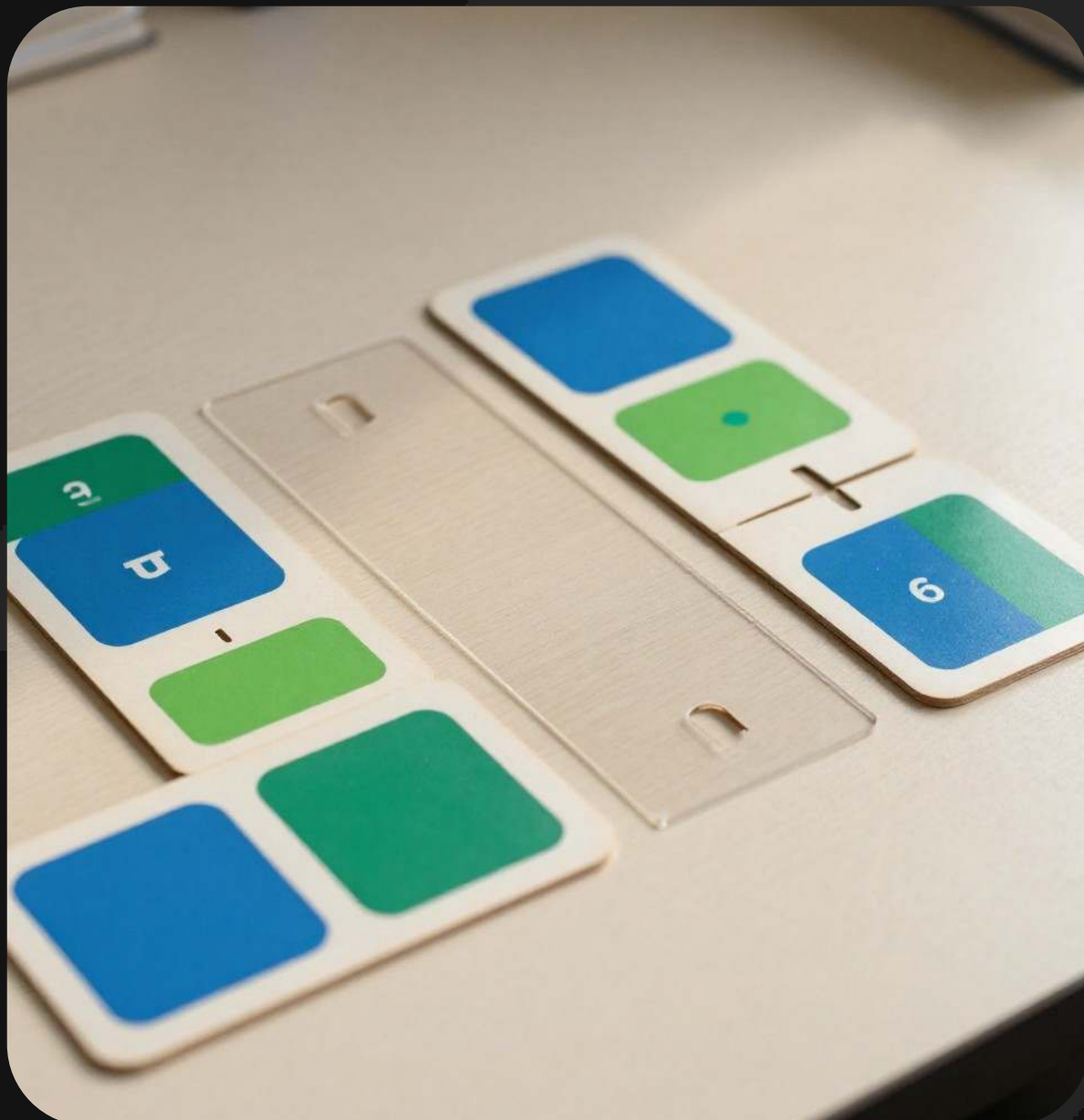
## 03 Ответ

Итог можно записать как  $x(x+1)/3$ . Такой ответ получен быстрее, чем при полном перемножении всех частей сразу.

## 04 Полезный порядок

Этот пример показывает важное правило: сначала ищем общие множители, а уже потом умножаем оставшиеся части.

# Умножение: несколько сокращений подряд



## Разложение

Сначала раскладываем  $x^2 - 4$  и  $x^2 + 2x$  на множители:  $(x-2)(x+2)$  и  $x(x+2)$ . После этого общие части становятся заметны сразу.

## Несколько сокращений

Затем сокращаются множитель  $x+2$ , а также  $x$  и  $x-2$ . Остаётся очень короткая запись, хотя исходное выражение выглядело сложным.

## Проверка

Ответ равен 1, но только при допустимых значениях переменной. Перед записью результата нужно убедиться, что знаменатели не равны нулю.



# Деление как умножение на обратную дробь

01

## Главная идея

При делении рациональных дробей первую дробь оставляют без изменения, а вторую заменяют обратной. Это превращает деление в обычное умножение.

02

## Переписывание

Если записано  $A/B \div C/D$ , то после замены получается  $A/B \cdot D/C$ . Так действуют все дальнейшие правила сокращения и умножения.

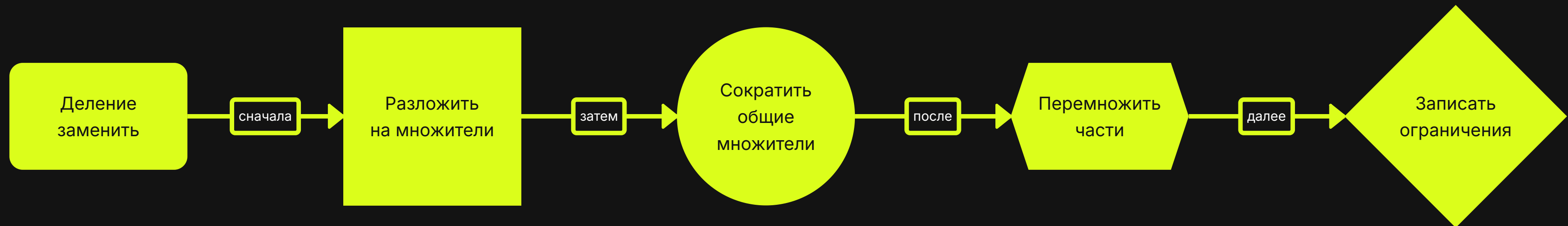
03

## Проверка условий

Особое внимание нужно уделить делителю: он не должен обращаться в ноль, а его знаменатель тоже обязан быть ненулевым.

# Пошаговый алгоритм деления

Пять последовательных шагов помогают не потерять ни множители, ни условия допустимости.



●

**При делении рациональных дробей этот шаг позволяет сразу перейти к сокращению и упрощению выражения.**

●

**1**

замена деления на умножение делает вычисления короче и понятнее.

Правило деления рациональных дробей

●

**После сокращения  
в примере остаётся  
одна простая  
дробь — это и есть  
цель алгоритма:  
убрать лишние  
множители  
до перемножения.**

●

**1**

простая дробь получается после  
полного сокращения

Учебный пример по алгебре

# Деление: полный пример до ответа 1

12



**Когда длинная дробь становится короче**

Сначала выражение выглядит громоздким, но разложение сразу меняет картину. Общие множители в числителе и знаменателе исчезают, и вместо длинной записи остаётся короткий ответ, который легко проверить по ограничениям.



**Почему проверка ОДЗ важна**

В этой задаче особенно важно не забыть про значения, при которых знаменатель обращается в ноль. Даже если итоговый вид очень простой, область допустимых значений задаётся исходной записью, а не только сокращённым результатом.



**what factoring gives**  
(看看 structure into factors)

**Что даёт разложение на множители**

Такие примеры учат видеть не только вычисление, но и структуру выражения. Если сразу замечать разложение на множители, можно быстрее сокращать, меньше ошибаться и аккуратно записывать ответ без лишних шагов.

# Степень рациональной дроби: основная формула

01

## Степень действует на всю дробь

Возведение рациональной дроби в степень относится ко всей дроби целиком. Поэтому степень влияет и на числитель, и на знаменатель одновременно, а не только на одну часть записи.

02

## Основная формула

Если степень целая и неотрицательная, можно возвести отдельно числитель и знаменатель. Формула остаётся верной для любых допустимых значений, при которых знаменатель исходной дроби не равен нулю.

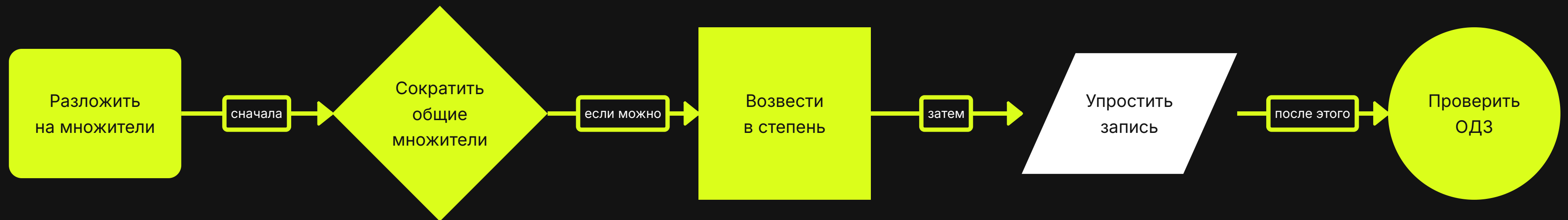
03

## Как ведут себя знаки

Знаки нужно проверять особенно внимательно. При чётной степени минус исчезает, а при нечётной сохраняется, поэтому полезно сначала определить степень, а потом записывать результат без спешки.

# Как возводить дробь в степень

Порядок действий при возведении рациональной дроби в степень



# Возведение дроби в квадрат

01

## Применяем формулу

Сначала применяем правило для степени дроби: квадрат относится и к числителю, и к знаменателю. Получаем  $(x-2)^2/(x+1)^2$ , причём исходное ограничение остаётся неизменным:  $x$  не может равняться  $-1$ .

02

## Компактная запись

Если нужно, ответ можно оставить в компактном виде. Такой записанный квадрат удобен для дальнейших преобразований, потому что не требует лишнего раскрытия скобок и сохраняет структуру выражения.

03

## Проверяем раскрытием скобок

Для проверки можно раскрыть скобки и получить  $(x^2-4x+4)/(x^2+2x+1)$ . Это помогает убедиться, что квадрат применён ко всей дроби без ошибок и без потери знаков.

# Сначала сокращение, потом степень

## Сначала сокращение

Сначала полезно упростить исходную дробь, а уже потом возводить результат в третью степень. Так исчезает общий множитель  $x-3$ , и выражение становится значительно короче.

## Что остаётся после разложения

Разложение числителя на множители показывает скрытую структуру выражения. После сокращения остаётся только  $x+3$ , поэтому весь куб относится уже к одной скобке, а не к длинной дроби.

## Почему это удобно

Этот пример показывает главный принцип: не спешить со степенью, пока дробь можно сократить. Чем раньше убраны общие множители, тем проще итоговая запись и тем меньше риск ошибки.

# Знаки и степень рациональной дроби

## Чётная степень

В выражении с чётной степенью минус исчезает, потому что отрицательное число умножается само на себя. Поэтому  $(-2x/3y)^2$  даёт положительный результат с квадратами всех множителей.

## Нечётная степень

Если степень нечётная, знак минус сохраняется. Это удобно проверять ещё до вычислений: знак итоговой дроби совпадает со знаком исходной записи, а модули степеней распределяются отдельно.

## Каждая скобка отдельно

При возведении многочлена в степень каждая скобка поднимается в ту же степень. Нельзя возводить в степень только первый член или только коэффициент, иначе ответ получится неверным.



# Типичные ошибки

| Ошибка             | Что делать           |
|--------------------|----------------------|
| Деление без замены | Умножать на обратную |
| Нет разложения     | Искать множители     |
| Сокращают не всё   | Сокращать скобки     |

Типовые ошибки при работе с рациональными дробями

Эта таблица помогает быстро заметить, где чаще всего ошибаются при умножении, делении и возведении рациональных дробей.

Большинство ошибок связано не с вычислениями, а с нарушением последовательности действий: сначала преобразовать, затем сократить и только потом выполнять основную операцию.

# Практика 1: два упражнения

## Упражнение 1

Попробуй сначала разложить  $x^2 - 16$  и  $x^2 + 4x$  на множители, затем сократить общие скобки. После этого останется короткое выражение, которое легко перемножить и проверить по области допустимых значений.

## Упражнение 2

Во втором задании важно сначала заменить деление умножением на обратную дробь. После разложения  $a^2 - 1$  на множители сразу станет видно, какие части можно сократить без лишних вычислений.

Запомни три шага: разложить на множители, сократить общие части и выполнить нужное действие. При делении меняем на умножение, при степени возводим числитель и знаменатель отдельно, не забывая проверять знаменатель.

**Шпаргалка: три главные идеи**