

Взаимное расположение двух окружностей



Как понять, сколько общих точек у двух окружностей?

Окружности и их положение

В этой теме мы сравниваем расстояние между центрами и радиусы двух окружностей. По этим величинам можно быстро определить, пересекаются ли они, касаются или совсем не имеют общих точек.



Основные элементы двух окружностей

1. Центр и радиус

Каждая окружность задаётся своим центром и радиусом. Именно эти данные нужны, чтобы описать её положение на плоскости и сравнить с другой окружностью.

2. Общие точки

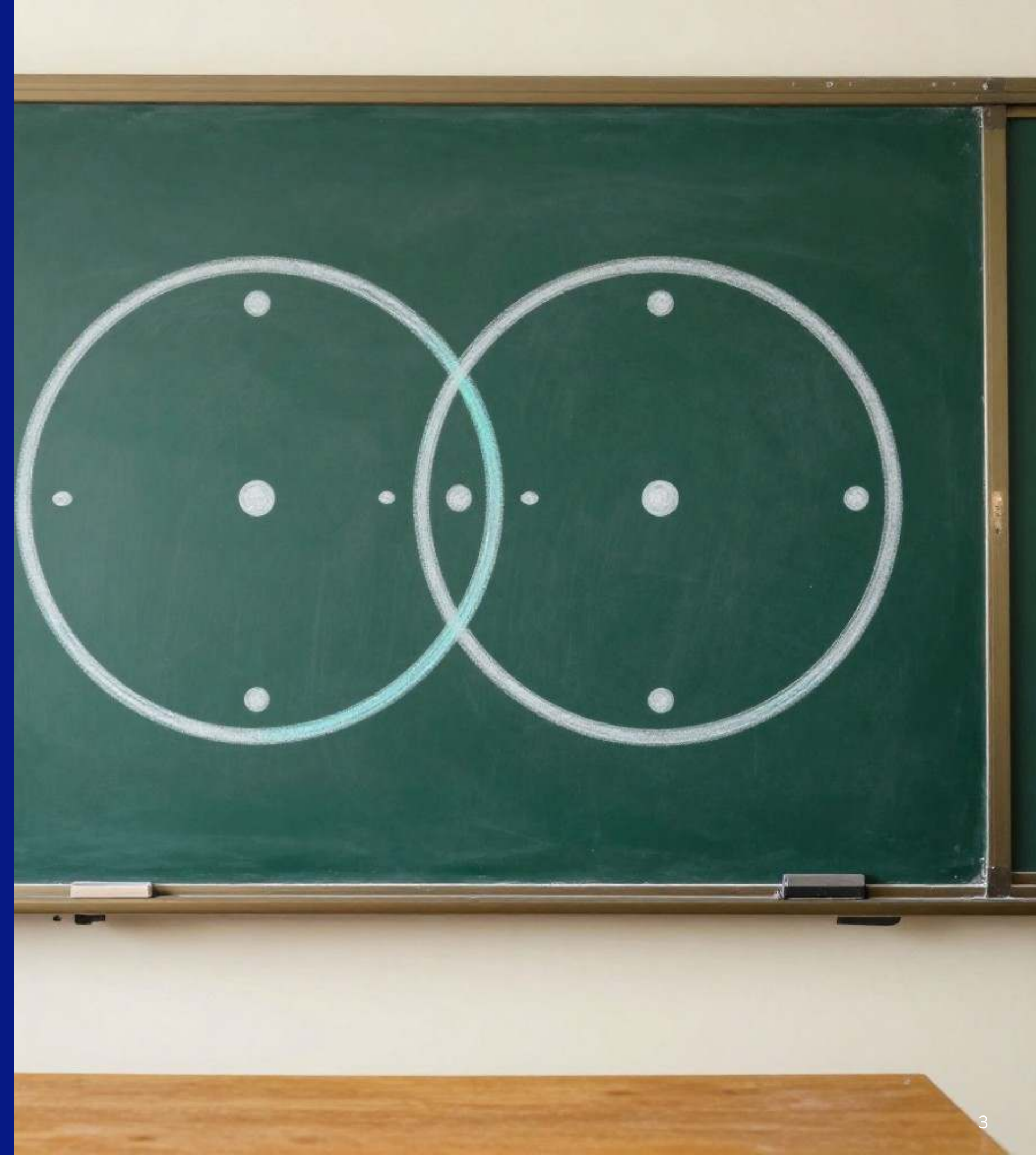
У двух окружностей может быть 0, 1 или 2 общие точки. Их число зависит не от рисунка, а от точного соотношения расстояния между центрами и радиусов.

3. Совпадение центров

Если центры совпадают, окружности могут быть концентрическими: тогда радиусы разные. Если радиусы тоже равны, окружности совпадают полностью и имеют бесконечно много общих точек.

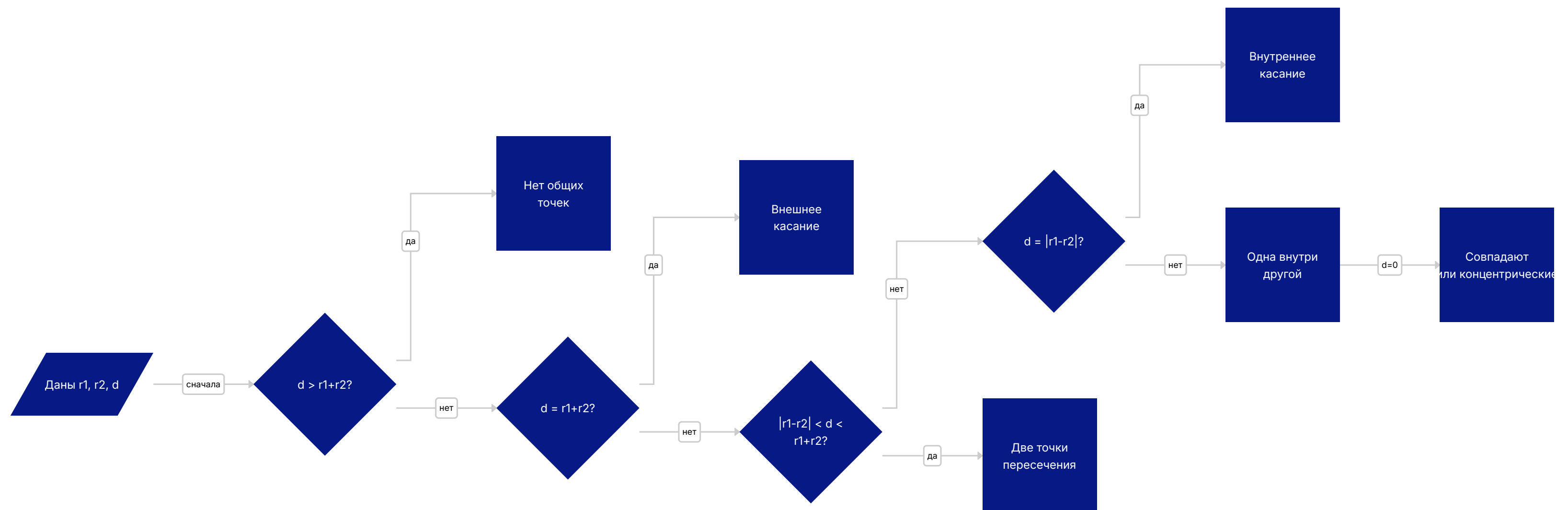
4. Главная идея темы

Чтобы разобраться в любом случае, достаточно сравнить расстояние между центрами с суммой радиусов и с модулем их разности. Это основа всех выводов по теме.



Пошаговое определение взаимного расположения

Сравнение расстояния между центрами с суммой и разностью радиусов



Все основные случаи в одной таблице

Условие	Результат
$d > r_1 + r_2$	0 точек
$d = r_1 + r_2$	1 точка
$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	2 точки
$d = r_1 - r_2 $	1 точка
$d < r_1 - r_2 $	0 точек
$d = 0, r_1 = r_2$	совпадают

Геометрические соотношения для двух окружностей

Таблица показывает, как по трём величинам определить взаимное расположение окружностей.

Число общих точек определяется сравнением расстояния между центрами с суммой и модулем разности радиусов.

Случай двух точек пересечения

Условие пересечения

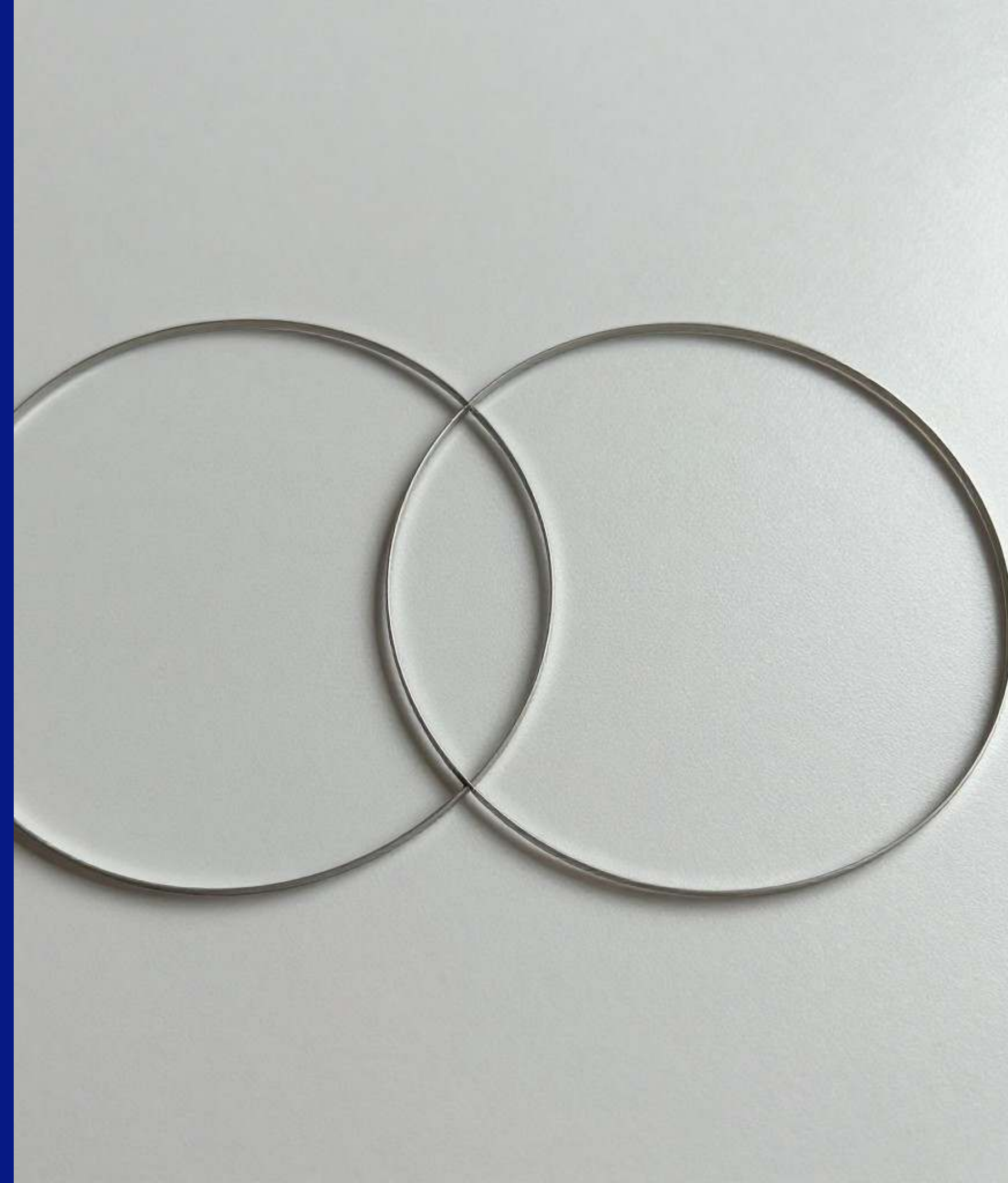
Если модуль разности радиусов меньше расстояния между центрами, а оно меньше суммы радиусов, окружности пересекаются в двух точках. Это самый «средний» случай между касанием и полным разъединением.

Что видно на рисунке

Обе окружности проходят через обе общие точки. Значит, каждая из них имеет часть, лежащую внутри другой, и часть — снаружи, что хорошо видно на чертеже.

Как запомнить

Для двух точек пересечения центры должны быть достаточно близко, но не слишком. Если расстояние слишком мало, одна окружность окажется целиком внутри другой, и число общих точек изменится.



Внешнее касание окружностей

1. Одна общая точка

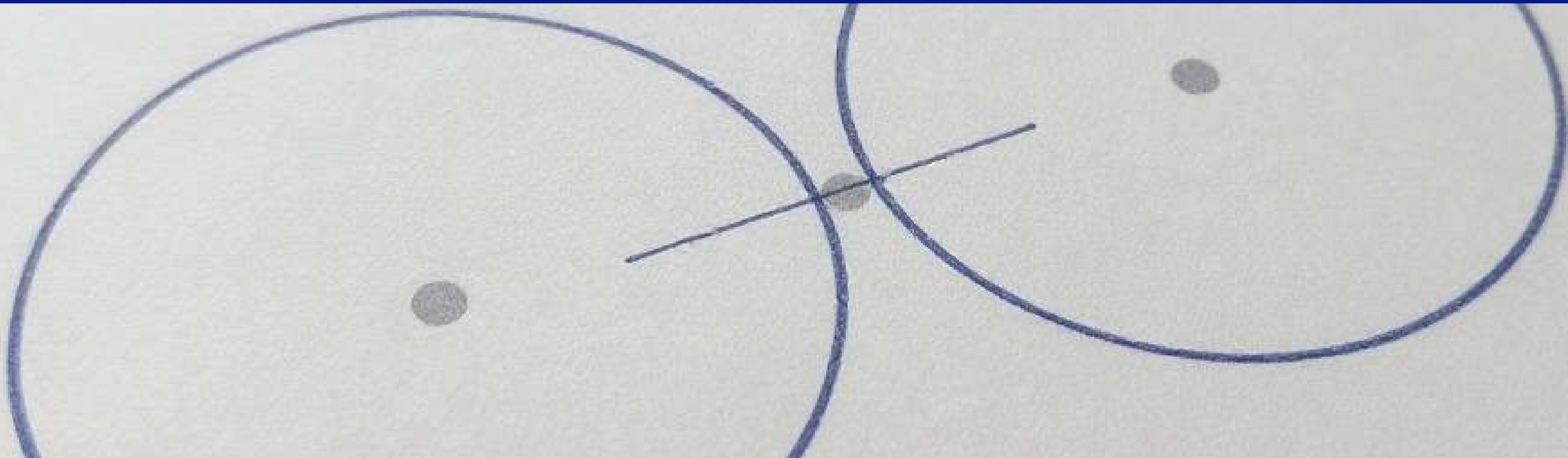
При внешнем касании окружности имеют ровно одну общую точку снаружи. Они соприкасаются, но не входят одна в другую и не пересекаются в двух точках.

2. Расположение центров

Центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой. Это помогает на чертеже быстро узнать случай касания, даже если размеры окружностей разные.

3. Ключевое условие

Внешнее касание возникает тогда, когда расстояние между центрами равно сумме радиусов. Это удобно проверять вычислением и сразу связывать с геометрическим рисунком.





Внутреннее касание окружностей

Касание изнутри

При внутреннем касании меньшая окружность касается большей изнутри. Общая точка только одна, поэтому это не пересечение, а именно касание.

Общая прямая

Центры, точка касания и соответствующий радиус лежат на одной прямой. Такое расположение особенно важно при построении: по нему легко проверить правильность чертежа.

Главное равенство

Этот случай возникает, когда расстояние между центрами равно модулю разности радиусов. Тогда одна окружность как бы «упирается» в другую изнутри.

Когда общих точек нет

1. Слишком далеко

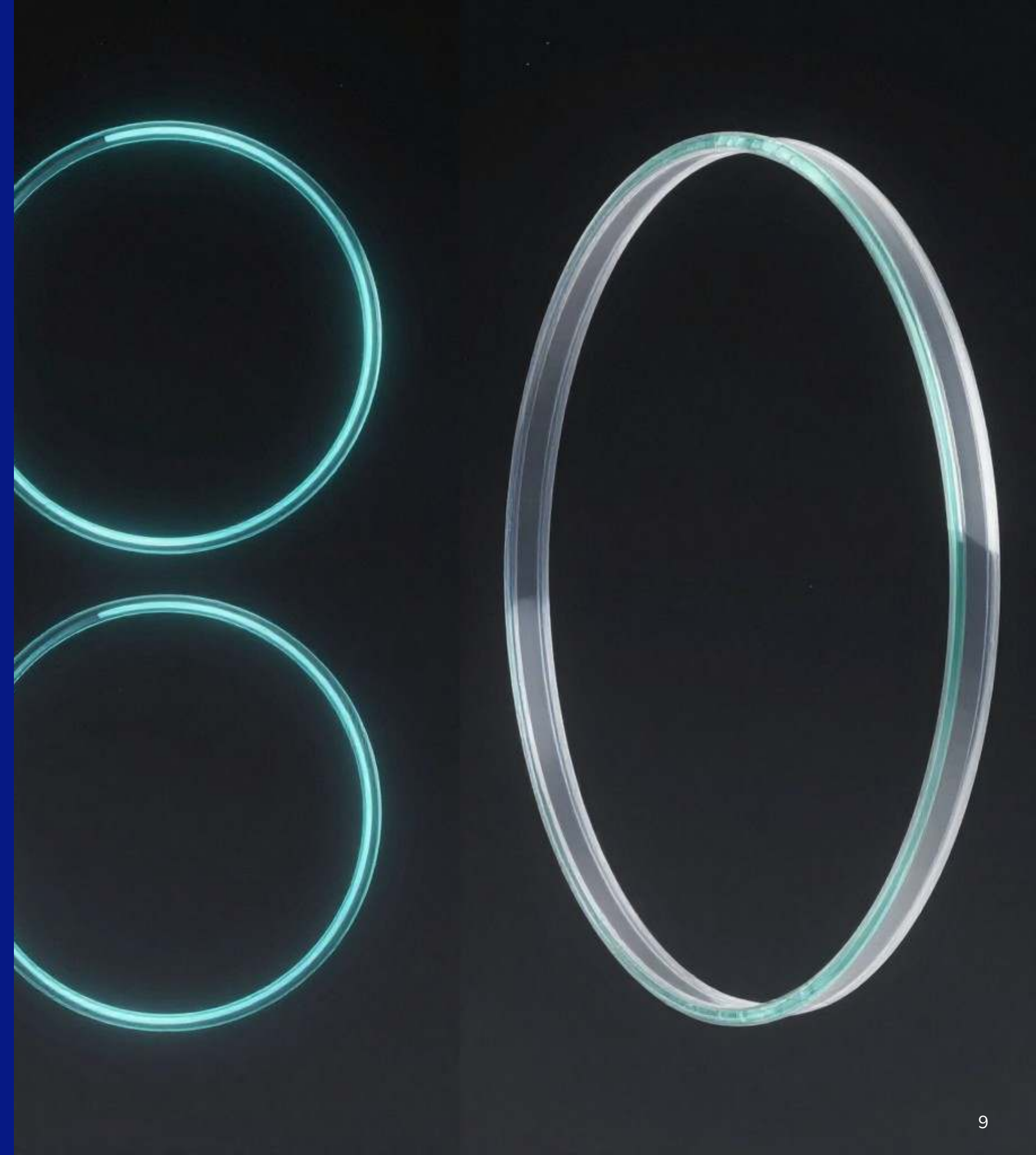
Если расстояние между центрами больше суммы радиусов, окружности расположены отдельно друг от друга. Между ними есть промежуток, поэтому общих точек не получается.

2. Одна внутри другой

Если расстояние между центрами меньше модуля разности радиусов, меньшая окружность целиком лежит внутри большей. Несмотря на это, точки пересечения всё равно отсутствуют.

3. Одинаковый результат

В обоих случаях ответ одинаков: общих точек нет. Но причины разные, поэтому важно не просто запомнить результат, а проверить нужное неравенство.



Концентрические и совпадающие окружности

Общий центр

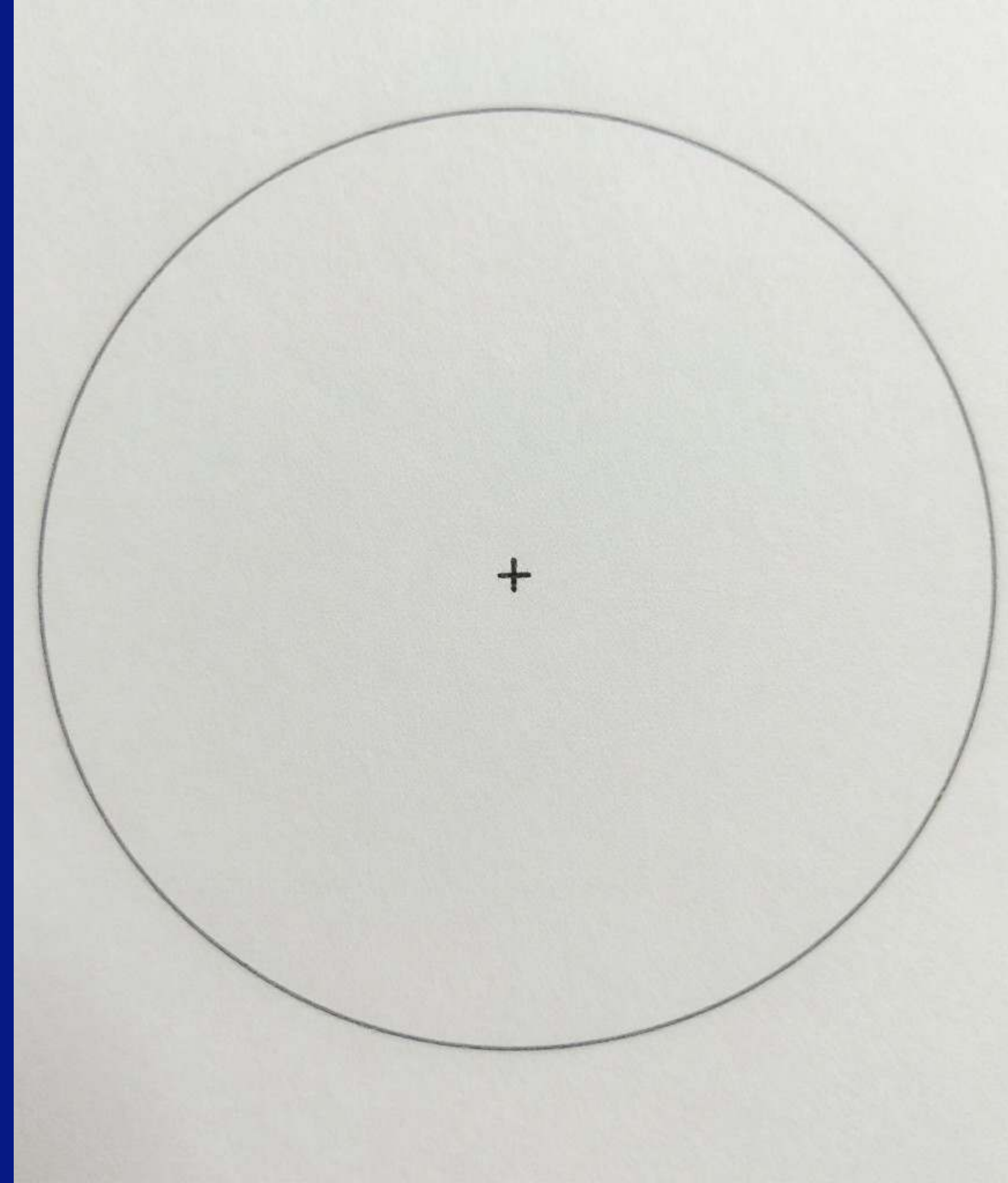
Если расстояние между центрами равно нулю, окружности имеют один и тот же центр. Такое расположение называют концентрическим, когда радиусы при этом разные.

Без общих точек

У концентрических окружностей с разными радиусами нет общих точек. Они выглядят как две «вложенные» окружности с одним центром, но разными размерами.

Полное совпадение

Если при общем центре радиусы равны, окружности совпадают полностью. В этом случае каждая точка одной окружности является точкой другой.



Сколько общих точек у окружностей

Для совпадающих окружностей число общих точек не ограничено, поэтому на диаграмме оно показано условно.

Число общих точек меняется только при сравнении d с двумя границами: суммой радиусов и их разностью.

Составлено по правилам взаимного расположения двух окружностей (школьная планиметрия).

Чертёж двух окружностей

Когда окружности пересекаются

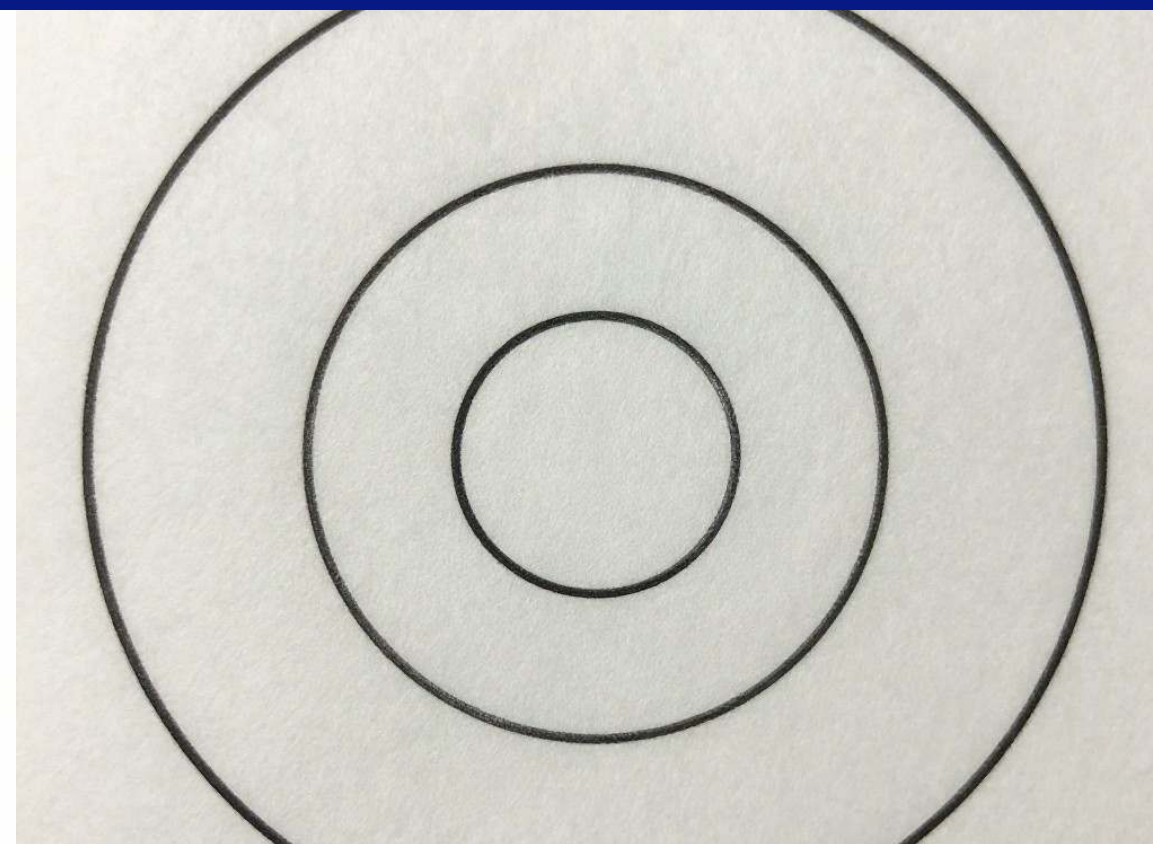
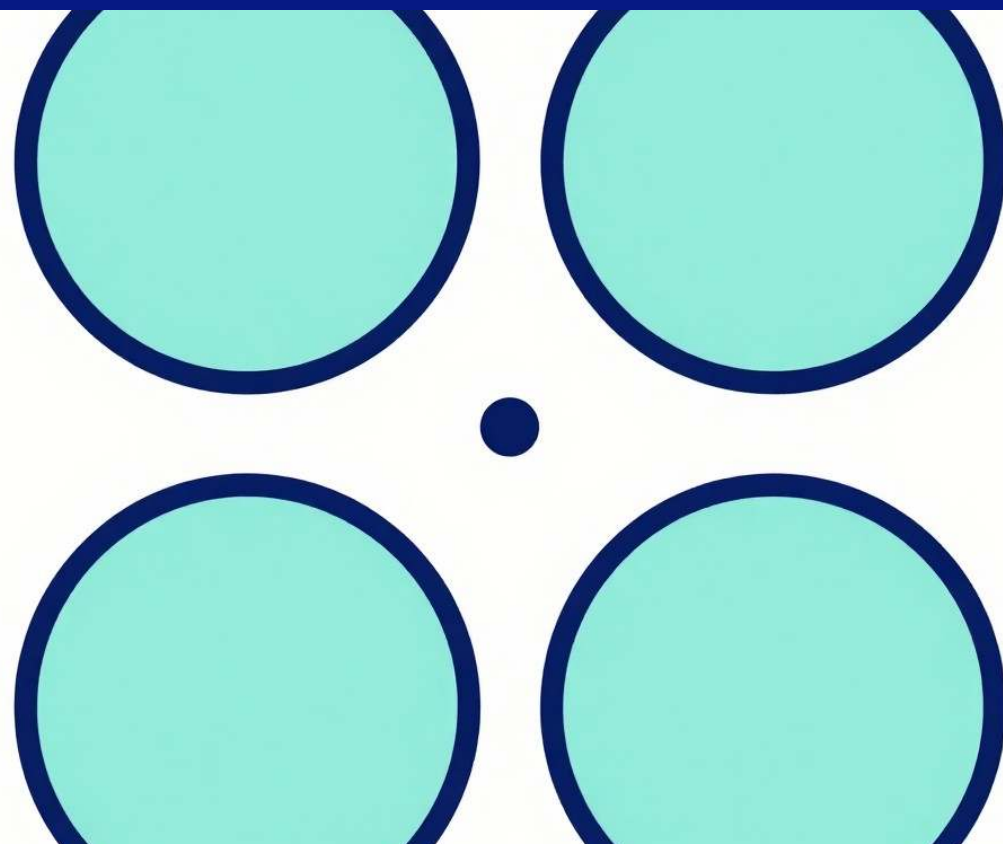
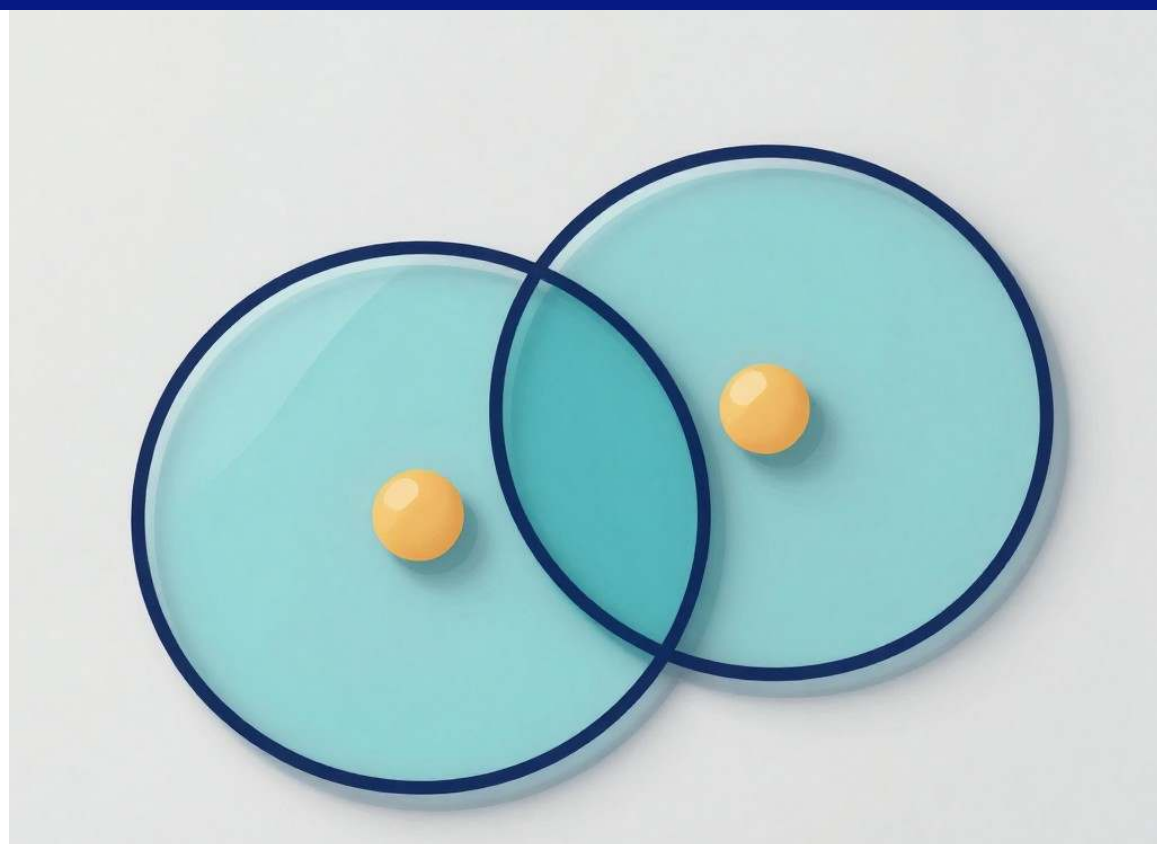
На чертеже видно две дуги, которые входят друг в друга и пересекаются в двух точках. Центры O_1 и O_2 отмечены отдельно, а отрезок между ними показывает расстояние d , по которому и проверяют условие пересечения.

Снаружи и изнутри

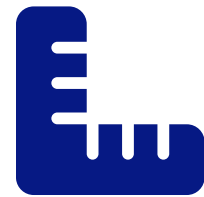
Если окружности касаются, на рисунке появляется одна общая точка. При внешнем касании она находится между окружностями, а при внутреннем — внутри большей окружности, на линии, соединяющей центры и точку касания.

Что помогает подпись

Подписи r_1 , r_2 и O_1O_2 делают схему понятной без длинных вычислений. По ним легко увидеть, какая окружность больше, насколько близки центры и какой геометрический случай изображён на рисунке.

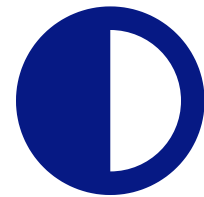


Какие задачи встречаются по этой теме



По радиусам и расстоянию

В задаче дают r_1 , r_2 и d . Нужно сравнить эти величины и понять, есть ли общие точки, а если есть, то сколько их.



Определение касания

По условию надо выяснить, является ли касание внешним или внутренним. Для этого сравнивают d с $r_1 + r_2$ и с $|r_1 - r_2|$.



Координаты центров

Иногда даны координаты центров окружностей. Тогда сначала находят расстояние между ними, а затем применяют те же правила для взаимного расположения.



Положение одной внутри другой

В некоторых задачах требуется проверить, лежит ли меньшая окружность внутри большей без пересечения или совпадают ли окружности полностью.

Примеры числовых проверок

r1	r2	d	Вывод
5	3	8	внешнее касание
4	7	10	2 точки
6	2	3	нет общих точек
4	4	0	совпадают

Подобраны по правилам сравнения d с r_1+r_2 и $|r_1-r_2|$.

Короткие примеры показывают, как одно и то же правило работает в разных ситуациях.

Во всех примерах решение получается из одного сравнения расстояния между центрами с двумя границами, заданными радиусами.

Связь с неравенствами

1. Сравнить величины

Сначала находят две опорные величины: сумму радиусов и модуль их разности. Затем сравнивают расстояние между центрами с каждой из них, как при работе с неравенствами.

2. Определить границу

Если d равно одной из границ, возникает касание. Если значение меньше или больше, меняется число общих точек, поэтому важно не пропустить знак равенства.

3. Сделать вывод

После сравнения записывают геометрический результат: пересечение, касание, отсутствие общих точек или совпадение. Так числовая проверка превращается в точный рисунок в уме.

Границы случаев на числовой прямой

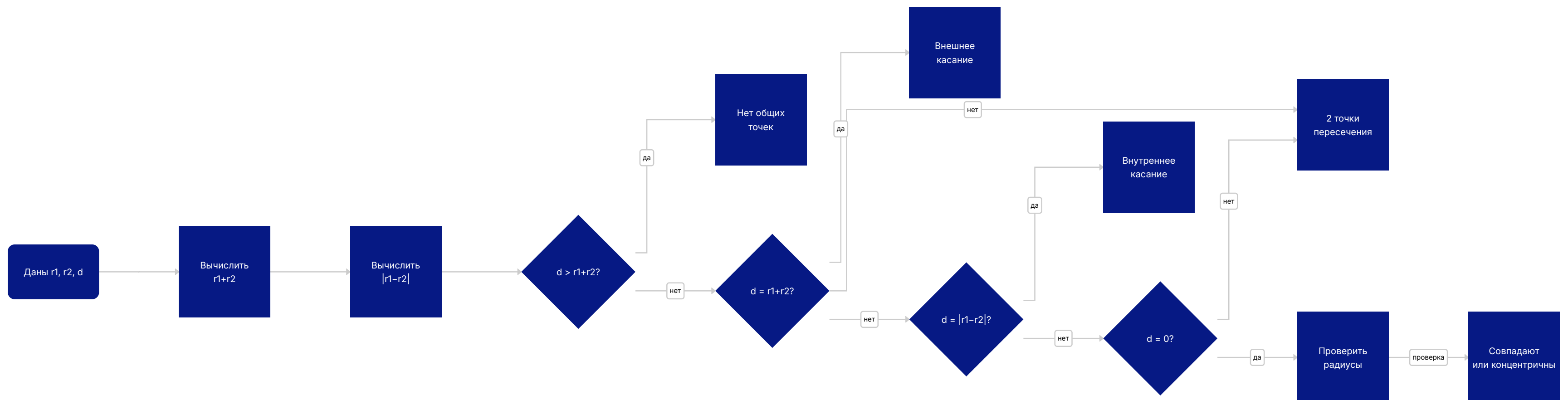
На прямой удобно видеть, где проходят точные границы между соседними случаями.

Две граничные точки делят все значения d на области с нулём, одной или двумя общими точками.

Схема построена по школьным правилам сравнения расстояния между центрами и радиусов.

Алгоритм решения задач

Последовательность проверок для определения взаимного расположения двух окружностей



Типичные ошибки учеников

Путают касания

Часто внешнее касание принимают за внутреннее и наоборот. Чтобы не ошибиться, нужно смотреть, где находится точка касания: снаружи окружностей или внутри большей.

Забывают модуль

Выражение $|r_1 - r_2|$ нельзя записывать без модуля, потому что разность радиусов может быть отрицательной. Ошибка в знаке сразу меняет правильный ответ.

Смотрят только на радиусы

Иногда сравнивают лишь r_1 и r_2 , хотя решающим является ещё и расстояние между центрами. Без d нельзя определить взаимное расположение окружностей.

Неверно делают вывод

Если одна окружность целиком находится внутри другой, это не значит, что они пересекаются. Общих точек может не быть вовсе, и это нужно проверять отдельно.

Где встречается эта тема

1. Чертежи и схемы

При выполнении чертежей важно понимать, пересекутся ли окружности, будут ли они касаться или останутся раздельными. Это помогает аккуратно строить рисунок и читать готовую схему.

2. Координатная плоскость

Если центры заданы координатами, сначала находят расстояние между ними, а затем используют те же правила. Так геометрия связывается с вычислениями и координатами.

3. Практические модели

Такие задачи встречаются в схемах, картах и простых моделях объектов, где нужно определить область пересечения или отсутствие соприкосновения. Это развивает внимательность и точность рассуждений.

Один сравнительный шаг — и ответ найден

Достаточно сравнить d с r_1+r_2 и $|r_1-r_2|$, чтобы определить число общих точек, вид касания или совпадение окружностей. Именно в этом сила темы.