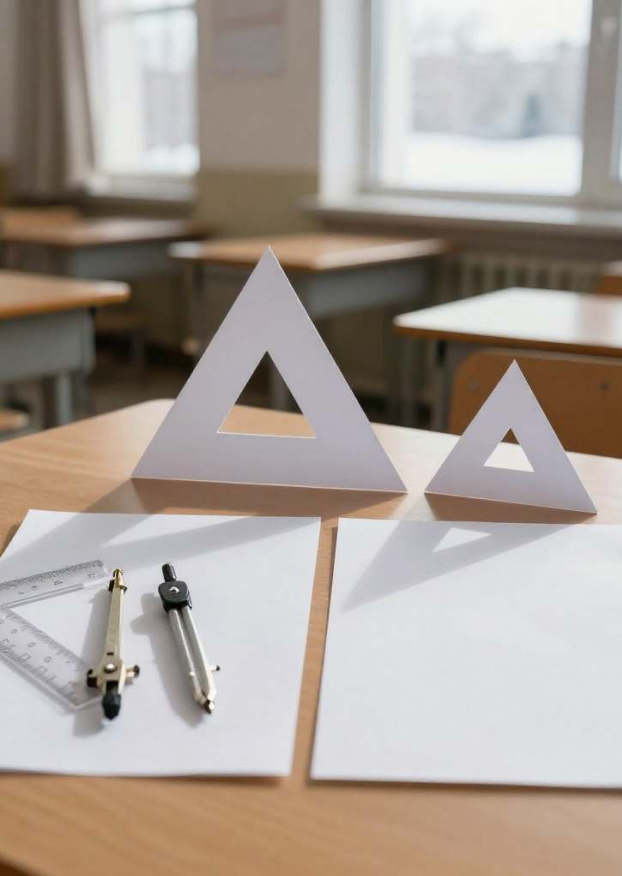




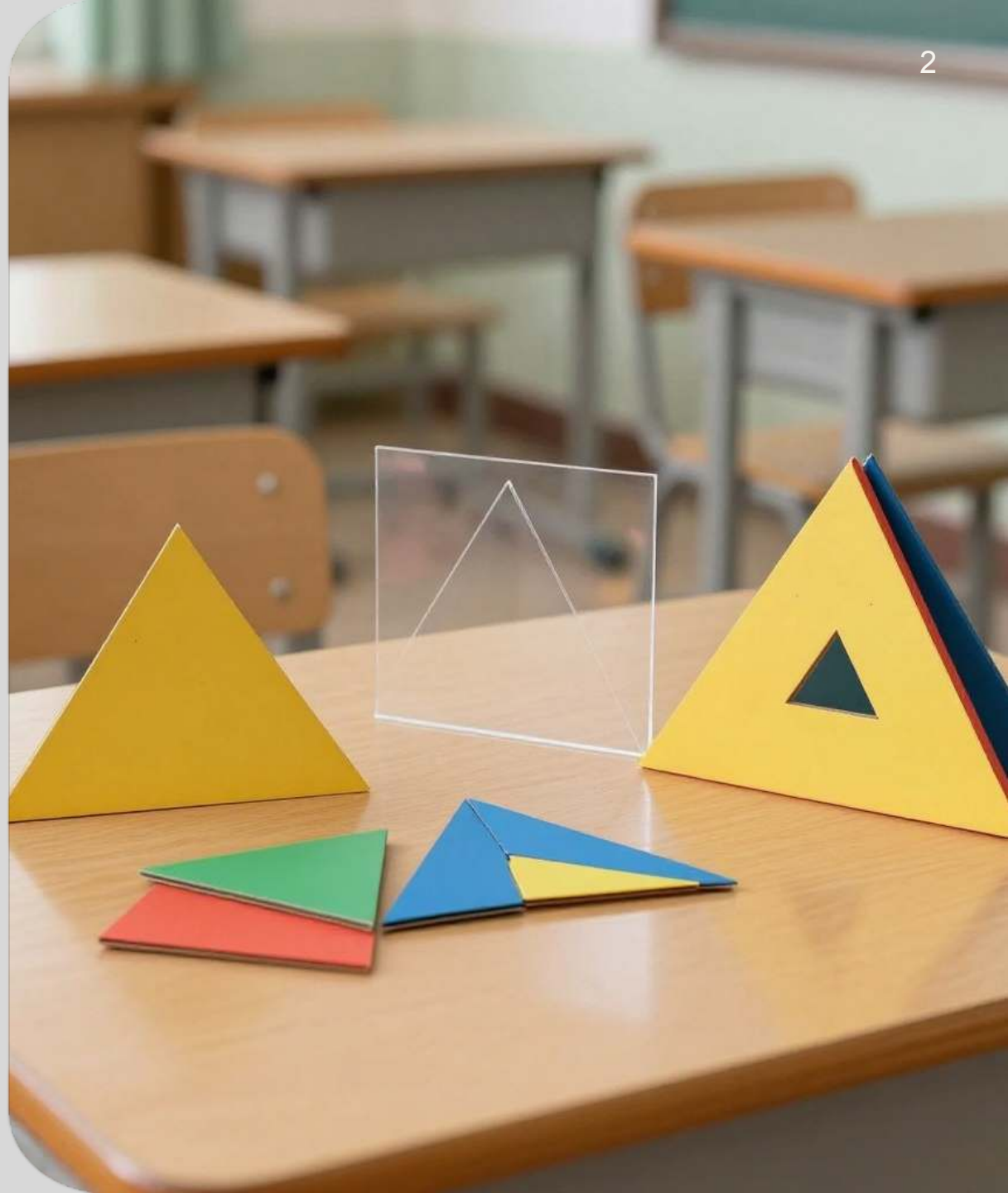
Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

Подобие превращает чертёж в точный инструмент
для доказательств и расчётов.



Зачем подобие нужно в геометрии

Подобие помогает читать чертежи, работать с масштабом и находить недоступные размеры. В 8 классе оно особенно важно, потому что связывает свойства фигур, пропорции и строгие доказательства.



Определение подобия фигур и коэффициент подобия



1

Сходство формы

Две фигуры называют подобными, если их форма одинакова, а размеры могут отличаться. При этом соответствующие углы равны, а соответствующие стороны связаны одной и той же пропорцией.

2

Коэффициент подобия

Коэффициент подобия k показывает, во сколько раз одна фигура больше другой. Он помогает сразу понять, как изменятся длины сторон, периметр и площадь при увеличении или уменьшении.

3

Увеличение и уменьшение

Если $k = 2$, все линейные размеры удваиваются. Если $k = 0,5$, они уменьшаются вдвое. Фигура при этом не искажается: сохраняются углы и общий вид.

4

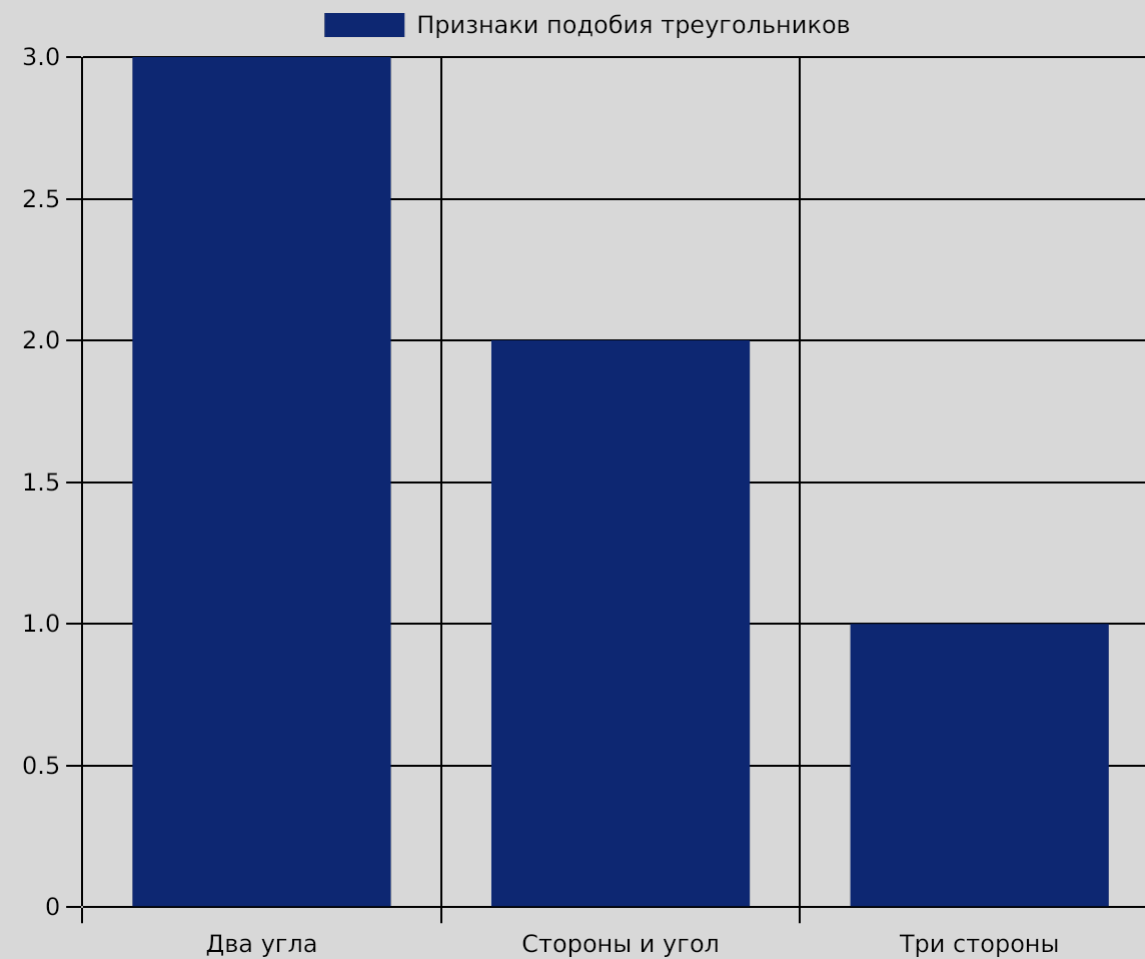
Практический смысл

Зная коэффициент подобия, можно переходить от одной фигуры к другой без полного измерения. Это удобно в задачах на чертежи, модели и геометрические построения.

Три признака подобия треугольников

Все признаки приводят к одному выводу: треугольники имеют одинаковую форму и пропорциональные стороны.

На практике чаще всего используют признак по двум углам: его проще всего установить в задаче.



Как подобие используется в доказательствах



Сравнение отрезков

Подобие позволяет выразить неизвестный отрезок через известный, если найдено соответствие сторон. Тогда вместо прямого измерения используется точная пропорция.



Работа с углами

Равные, вертикальные и накрест лежащие углы часто помогают увидеть подобные треугольники. После этого можно сразу перейти к отношениям сторон.



Вспомогательная схема

В сложной конфигурации удобно построить дополнительную линию или выделить нужные треугольники. Это делает доказательство короче и нагляднее.

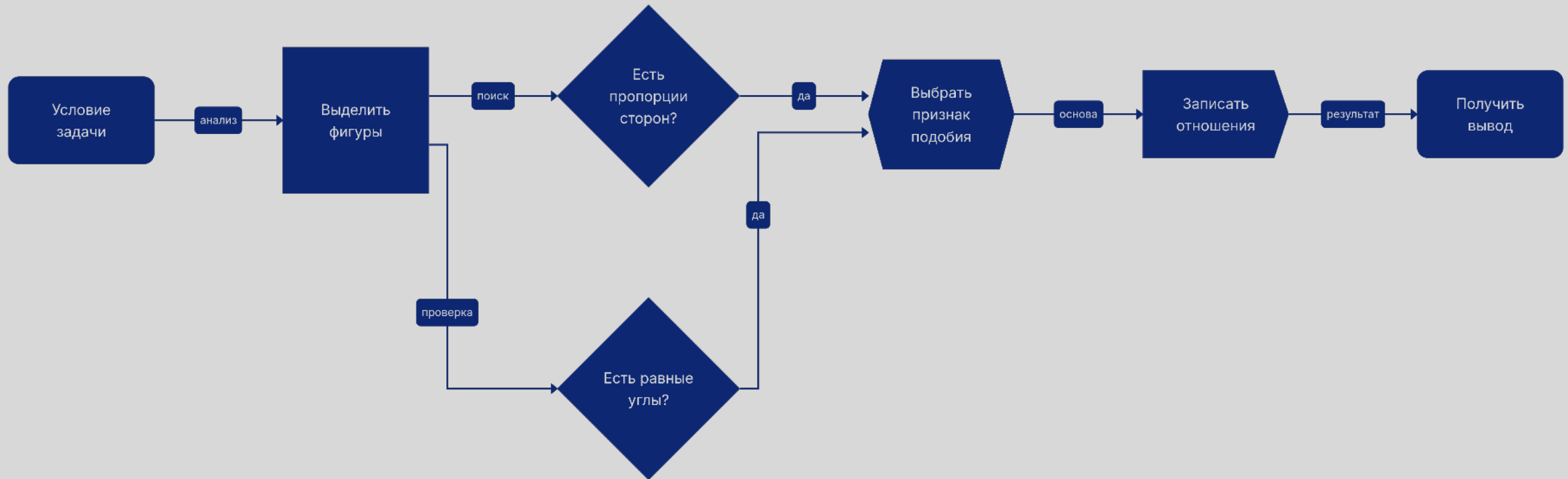


Геометрический вывод

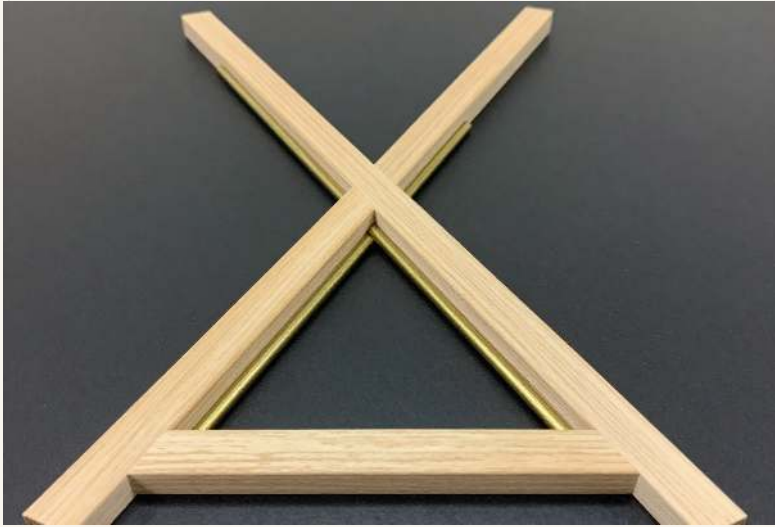
Из подобия получают пропорции, равенство отношений и доказательства параллельности. Так одна идея помогает решать разные задачи и доказывать теоремы.

Общий ход доказательства через подобие

Логика решения геометрической задачи с опорой на признаки подобия



Теорема Фалеса и пропорциональные отрезки



Параллельные прямые на лучах угла

Если несколько параллельных прямых пересекают стороны угла, они делят эти стороны на пропорциональные части. На рисунке обычно видно два луча, несколько параллелей и отрезки, которые можно сравнивать по одной схеме.



Как делят отрезок на части

Теорема Фалеса удобна, когда нужно разбить отрезок на равные или заданные доли. Достаточно построить вспомогательный угол с параллельными линиями, и нужные длины получаются через пропорцию, а не через прямое измерение.



Почему это полезно в задачах

В школьных задачах теорема Фалеса помогает находить неизвестные длины и доказывать равенство отношений. Она особенно полезна там, где на чертеже есть пересекающиеся прямые и нужно аккуратно сравнить несколько отрезков.

Что сохраняется и как меняется в подобных треугольниках

Сравнение основных элементов подобных треугольников показывает, какие величины остаются неизменными, а какие растут по-разному.

Линейные размеры меняются одинаково, а площадь реагирует сильнее. Поэтому при проверке ответа важно учитывать не только длины, но и квадрат коэффициента подобия.

Элемент	Изменение	Вывод
Углы	Равны	Форма сохраняется
Стороны	В k раз	Линейный масштаб
Площадь	В k^2 раз	Меняется быстрее



Если треугольники подобны, достаточно знать отношение соответствующих сторон. Тогда неизвестный отрезок находят без лишних построений: все размеры меняются по одному правилу.

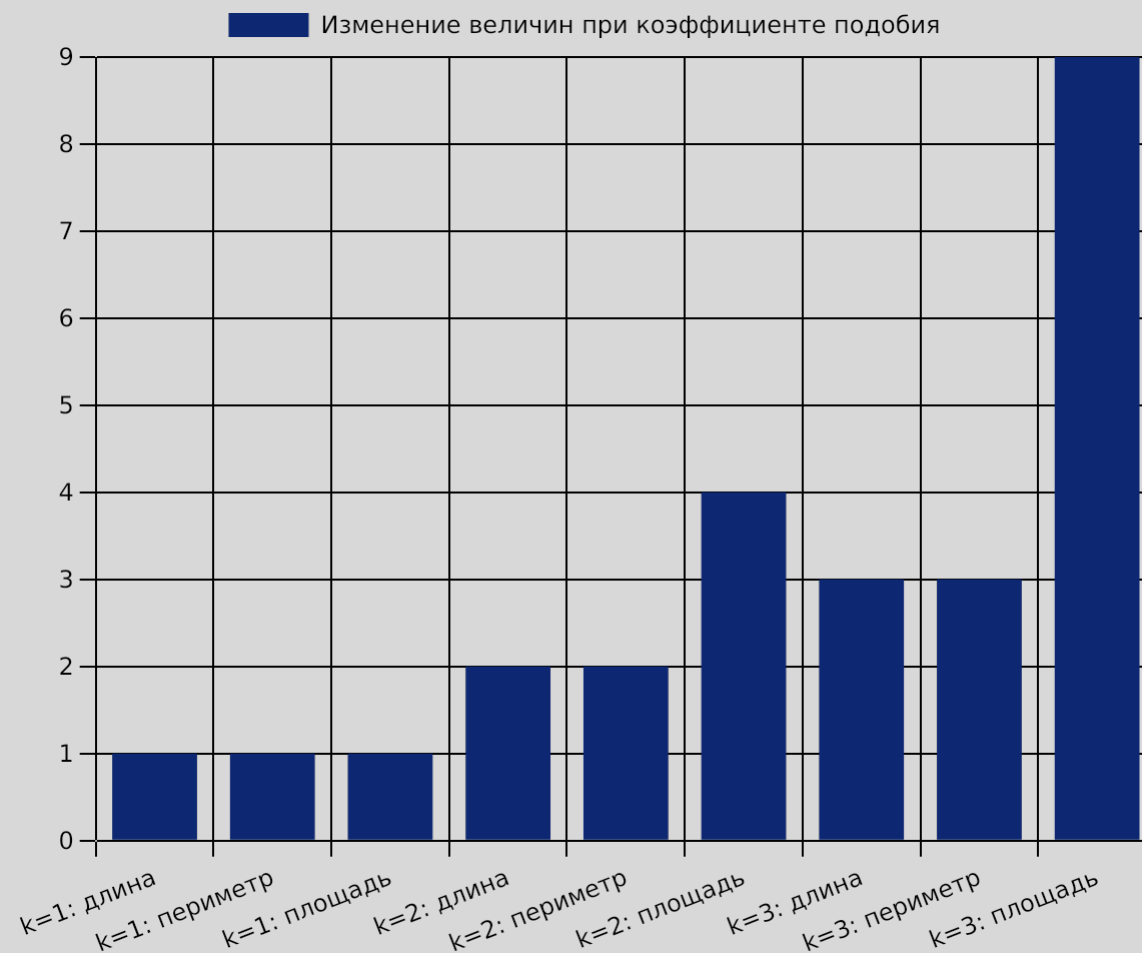
1,5

— такой коэффициент подобия позволяет сразу перейти от одной стороны к другой через пропорцию.

Как меняются длины, периметры и площади

На диаграмме видно, что линейные размеры и периметр растут одинаково, а площадь увеличивается заметно быстрее.

Если коэффициент равен 2, площадь становится в 4 раза больше; если 3 — в 9 раз больше. Это помогает быстро оценить правильность ответа.



Подобие в доказательстве теорем о высоте прямоугольного треугольника

Высота делит треугольник

- 01 Высота, опущенная из прямого угла на гипотенузу, разбивает исходный треугольник на два меньших. Каждый из них имеет общий острый угол с большим треугольником и потому связан с ним подобием.

Три подобных треугольника

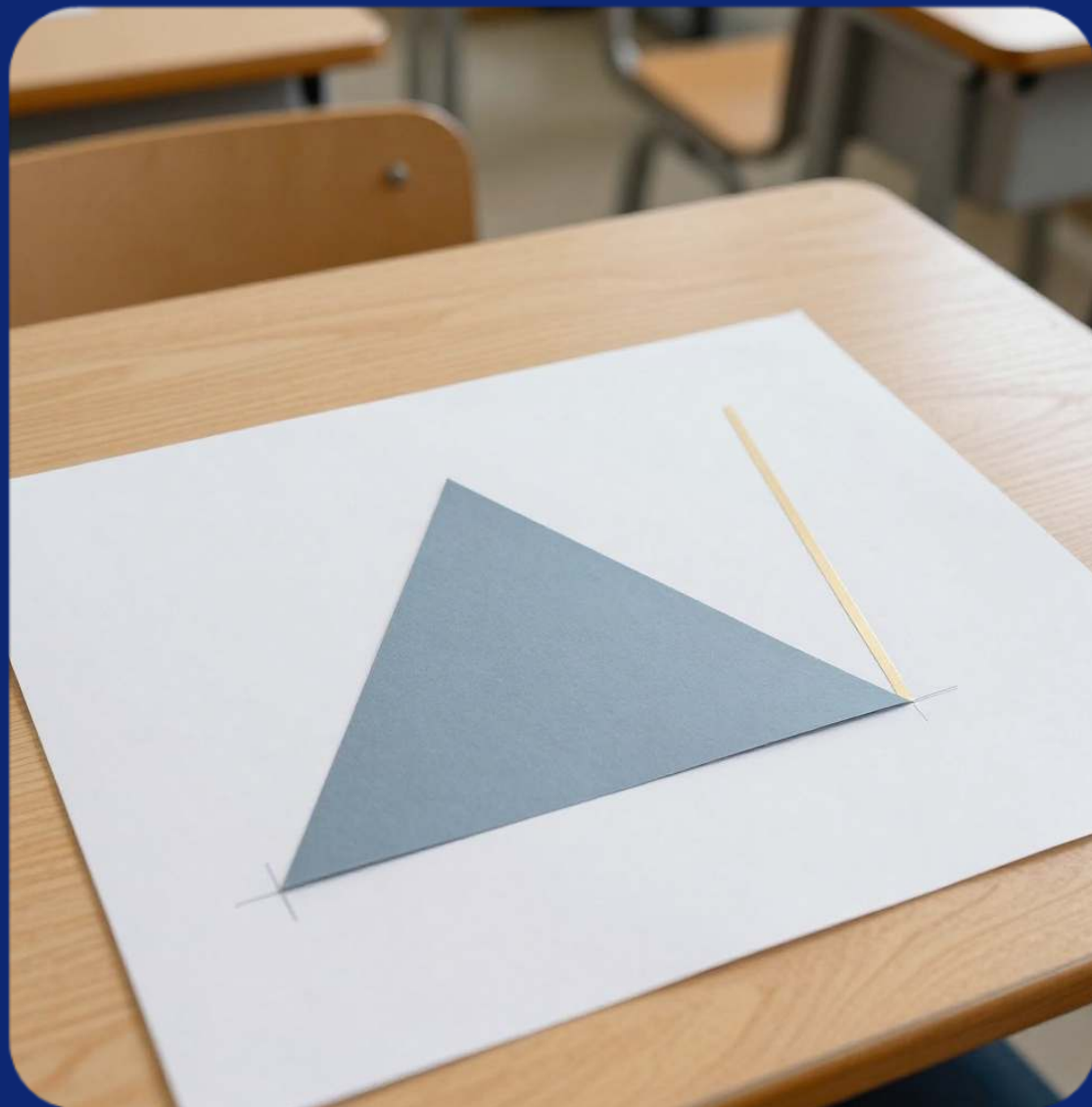
- 02 Из равенства углов следует, что оба малых треугольника подобны исходному и, значит, подобны друг другу. Это позволяет сравнивать соответствующие стороны без прямых измерений и получать точные отношения.

Геометрические средние

- 03 При записи пропорций появляются связи между катетами, отрезками гипотенузы и высотой. Именно из них выводят теоремы о геометрических средних, которые часто встречаются в школьной геометрии.

Основа доказательств

- 04 Подобие здесь важно не только для вычислений, но и для доказательства свойств фигуры. Оно объясняет, почему одни отрезки выражаются через другие и откуда берутся нужные формулы.



Задачи на недоступные расстояния и измерения на местности



Ширина реки

Если перейти реку нельзя, выбирают точки на берегу и строят вспомогательные треугольники. По известным отрезкам и подобию находят ширину, не измеряя её напрямую.

Высота здания

Тень от здания и тень от палки образуют подобные треугольники. Сравнивая их стороны, можно вычислить высоту объекта, если известна высота опоры и длина теней.

Отражение в воде

Иногда используют отражение вершины предмета в спокойной воде. Тогда луч зрения, отражённый луч и предмет образуют удобную геометрическую модель с подобными треугольниками.

Расстояние до объекта

При измерении на местности отмечают базовый отрезок и углы наблюдения. Затем составляют пропорции, которые позволяют найти расстояние до дерева, столба или другого удалённого объекта.

Польза метода

Такие задачи показывают, что подобие помогает работать с реальными объектами, когда прямой доступ к ним невозможен. Геометрия становится инструментом измерения, а не только чертежа.

Типичные ситуации, где используется подобие

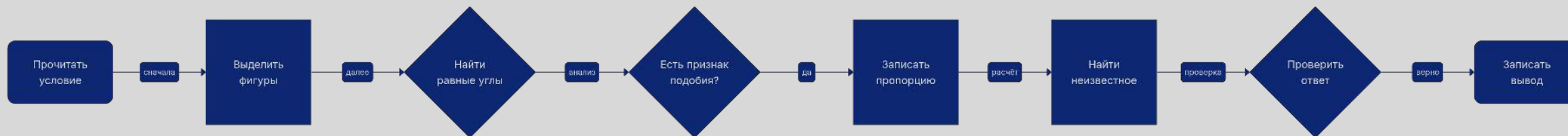
Ситуация	Пример	Идея
Высота по тени	Дерево	Подобные треугольники
Ширина реки	Береговой отрезок	Пропорция
Масштаб карты	План местности	Отношение длин
Чертёж детали	Макет	Сохранение формы

В таблице показано, как одна и та же идея пропорциональности помогает решать разные практические задачи.

Во всех случаях сохраняется форма, а меняется только масштаб. Одна пропорция позволяет описывать и измерения на местности, и работу с картами, планами и моделями.

Алгоритм решения задач с применением подобия

Последовательность действий для школьных задач на подобие треугольников и пропорции сторон.



Типичные ошибки при работе с подобием

Неверные соответствия

Главная ошибка — перепутать соответствующие стороны или углы. Тогда пропорция строится между несвязанными элементами, и весь дальнейший расчёт становится неверным.

Смещение треугольников

Иногда в одной записи используют стороны разных треугольников, не проверив, какие из них действительно соответствуют друг другу. Из-за этого ответ получается случайным, а не доказанным.

Порядок в пропорции

Нужно соблюдать одинаковый порядок сравнения: большую сторону сопоставляют с большей, меньшую — с меньшей. Если порядок нарушен, коэффициент подобия искажается.

Потеря единиц

При вычислениях легко забыть сантиметры, метры или миллиметры. Без единиц измерения нельзя проверить, разумен ли результат и соответствует ли он условию задачи.

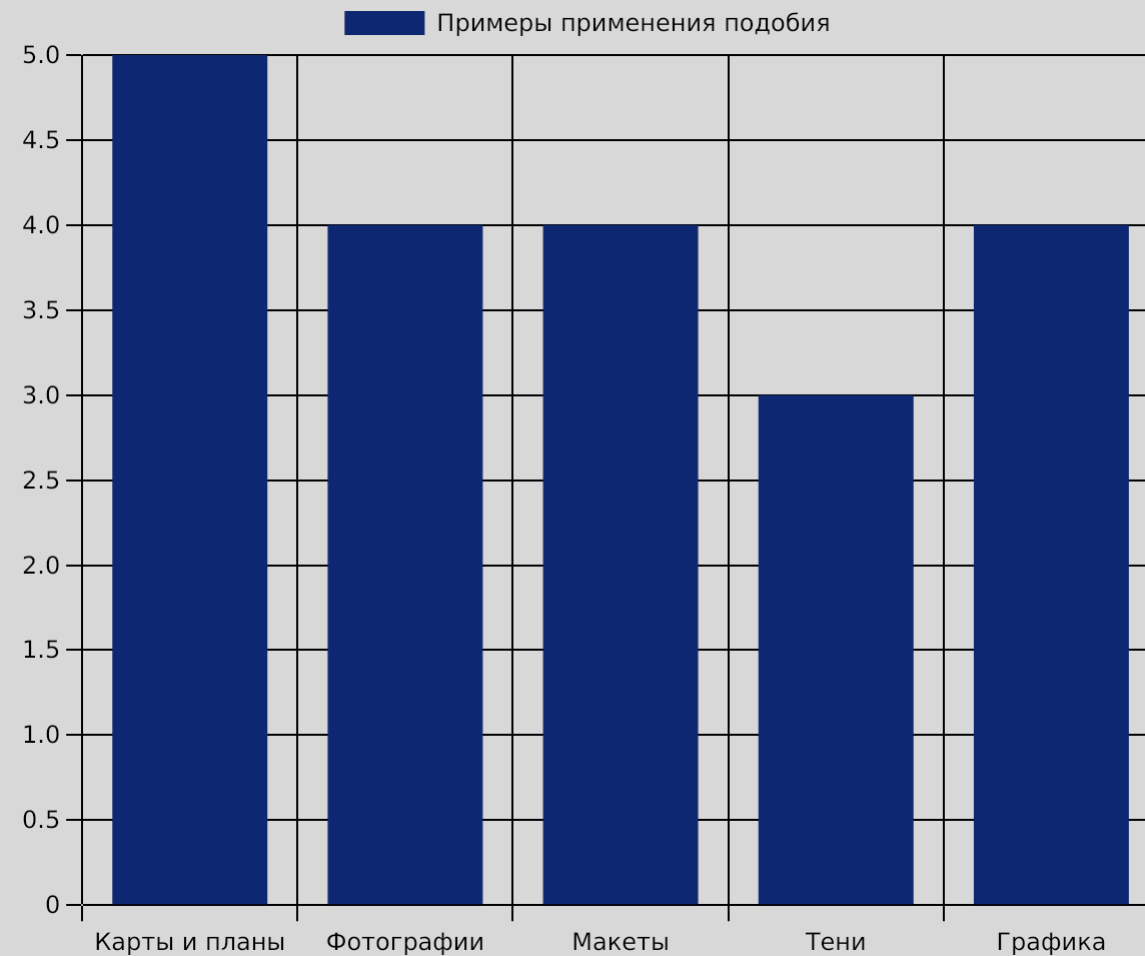
Нет проверки углов

В доказательствах важно убедиться, что есть нужные равные углы или параллельные прямые. Если этого не сделать, признак подобия применён необоснованно.

Где подобие встречается в жизни и учебных предметах

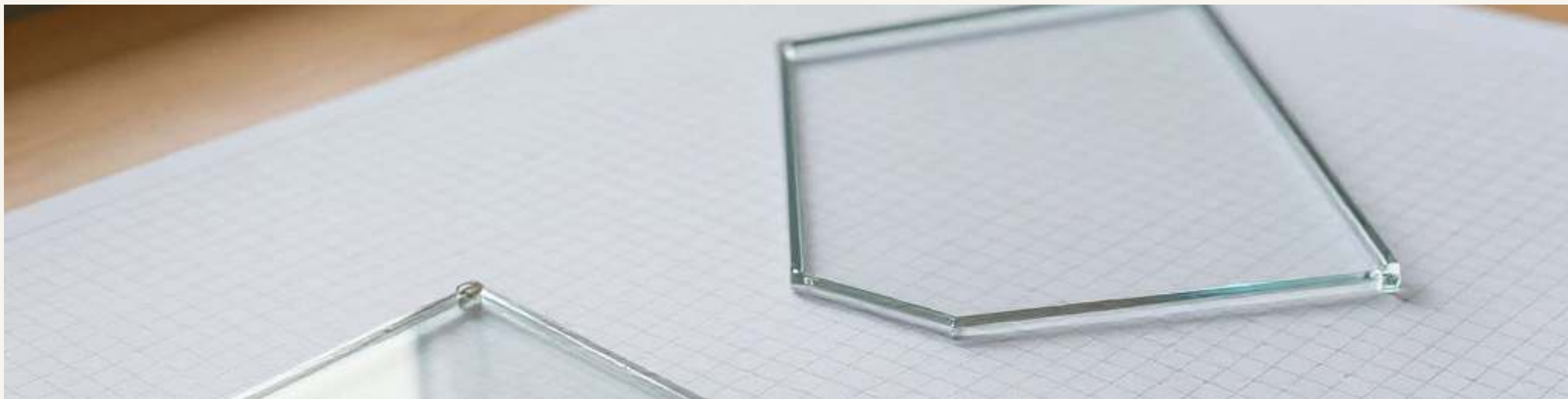
Подобие помогает не только в геометрии: оно лежит в основе уменьшенных моделей, точных изображений и расчётов, когда объект нельзя измерить напрямую.

Все примеры связаны с сохранением формы при изменении масштаба. Чем точнее задано отношение размеров, тем надёжнее измерения и моделирование.



Обобщение распространённых учебных и жизненных примеров использования подобия.

Связь подобия с координатами и масштабом



1

Координатное увеличение

На координатной плоскости подобная фигура получается при одинаковом изменении всех линейных размеров. Тогда соответствующие точки смещаются согласованно, а форма фигуры остаётся той же.

2

Роль коэффициента

Если фигура увеличена в несколько раз, координаты её вершин связаны тем же коэффициентом. Это удобно при построении изображений, проверке вычислений и сравнении размеров.

3

Масштаб в практике

В карте, плане и чертеже масштаб показывает, сколько единиц на изображении соответствует одной единице в действительности. Поэтому можно точно переходить от рисунка к реальному объекту.



Такой коэффициент сразу показывает, во сколько раз увеличиваются соответствующие стороны. По нему удобно находить недостающие отрезки, периметры и проверять, правильно ли выбраны пары сторон.

1,5

— это коэффициент подобия в приведённом примере.

Учебный пример на пропорцию в подобных треугольниках.

Какие теоремы школьной геометрии опираются на подобие



Параллельные прямые

Свойства углов при пересечении параллельных прямых часто приводят к подобию треугольников. Благодаря этому получают отношения отрезков и доказывают новые геометрические факты.



Пропорциональные отрезки

Теорема Фалеса и связанные с ней задачи строятся на пропорциях. Подобие объясняет, почему одинаковые отношения возникают на разных сторонах угла и отрезка.



Высота в прямоугольном треугольнике

Высота к гипотенузе создаёт несколько подобных треугольников. Из их сравнения выводят соотношения между катетами, гипотенузой и высотой, а также формулы геометрических средних.



Биссектриса

Свойства биссектрисы тоже удобно доказывать через подобие. Равенство углов делит фигуру на треугольники, из которых получают нужные отношения сторон и точные выводы.

Итоги темы: что даёт подобие в геометрии 8 класса

Подобие соединяет доказательства и вычисления в одной идее: равные углы приводят к пропорциям, а пропорции помогают находить длины, сравнивать фигуры и работать с масштабом.