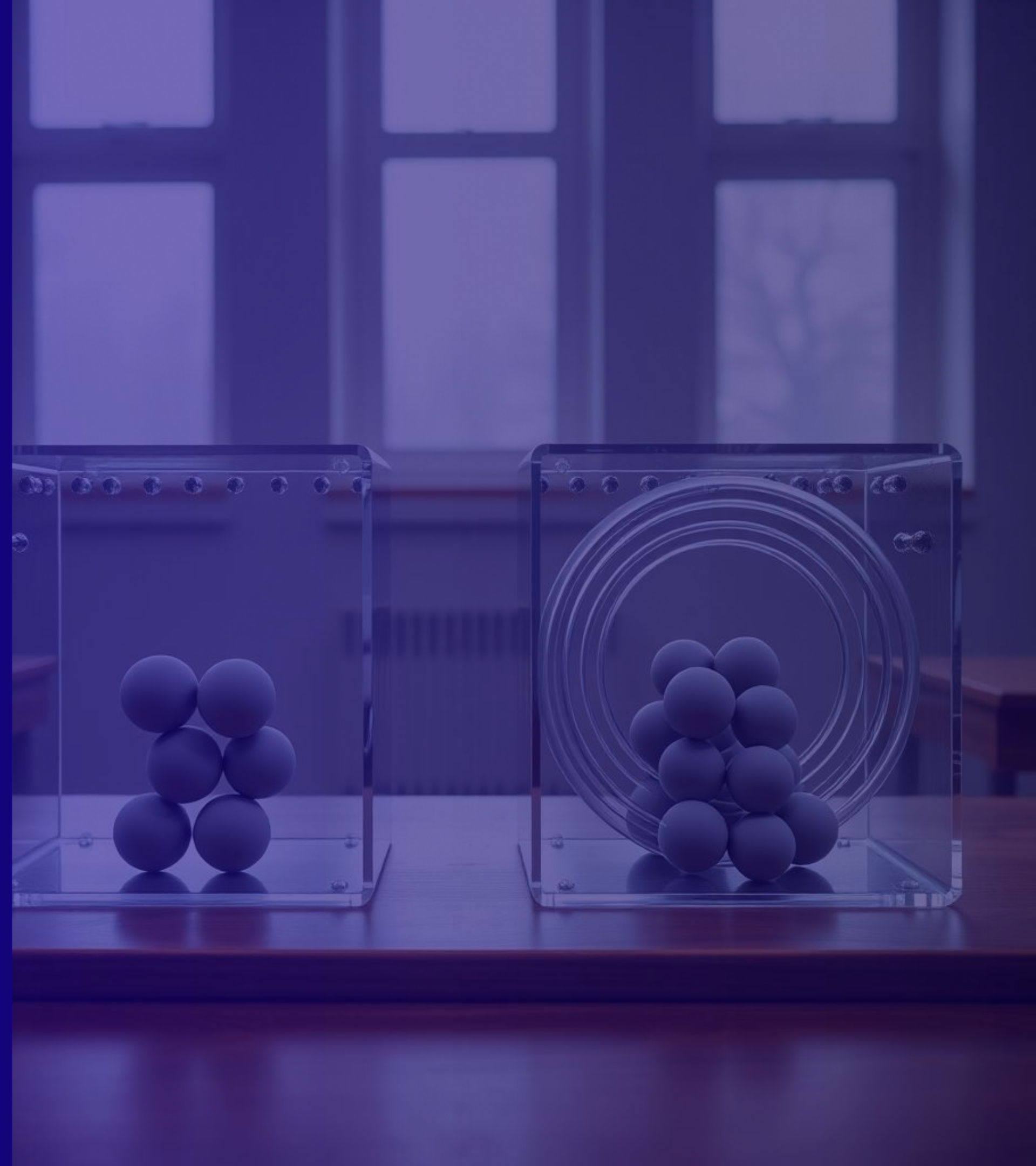


Возведение в степень числового неравенства

Когда степень меняет сравнение чисел

Почему это правило важно

Это правило помогает быстро сравнивать выражения, проверять вычисления и не ошибаться со знаком при возведении в степень.



Что такое числовое неравенство

Сравнение чисел

Числовое неравенство показывает, какое из двух чисел больше или меньше. Для этого используют знаки $>$, $<$, $\geq$ и $\leq$.

Строгая запись

Записи $a > b$ и $a < b$ означают, что числа не равны. Такой вид сравнения называют строгим и читают без допуска равенства.

Сравнение с равенством

Записи $a \geq b$ и $a \leq b$ разрешают равенство. Они показывают, что одно число может быть либо больше, либо равно другому.

Равносильность преобразований

При любых преобразованиях важно сохранять те же решения. Если новое неравенство неравносильно исходному, ответ будет неверным даже при правильных вычислениях.



Когда возведение в степень сохраняет порядок

1.

Положительные числа

Если оба числа положительные и меньшее число возводят в ту же натуральную степень, знак неравенства сохраняется. Чем больше степень, тем заметнее разница между результатами.

2.

Простой пример

Например, $2 < 3$, значит $2^2 < 3^2$ и $2^3 < 3^3$. То же верно для 1,5 и 2: при одинаковой степени порядок не меняется.

3.

Что это даёт

Такой приём удобен для быстрых оценок и проверки ответов. Не всегда нужно считать всё подробно: иногда достаточно сравнить основания и степень.



Основные случаи возведения числового неравенства в степень

Случай	Условия	Результат	Пример
Положительные	$0 < a < b$	Порядок сохраняется	$4^2 < 5^2$
Отрицательные, чётная	$a < b < 0$	Знак может измениться	-3^2 и -2^2
Отрицательные, нечётная	$a < b < 0$	Порядок сохраняется	$-3^3 \leftarrow -2^3$

Три главных случая показывают, когда знак сохраняется, а когда требуется осторожность.

Главные признаки — знак оснований и чётность показателя.
Без их проверки делать вывод о сравнении нельзя.

Для положительных оснований меньшая величина остаётся меньшей и после возведения в одинаковую натуральную степень.

2

положительных числа дают
сохранение порядка
при любой натуральной
степени

Почему отрицательные числа требуют проверки

1. Нечётная степень

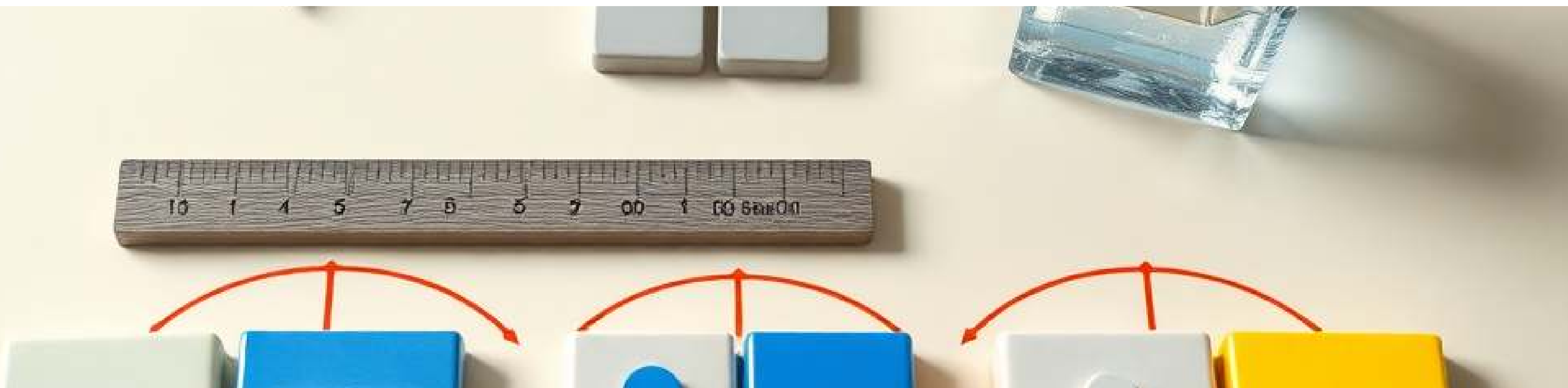
При нечётной степени отрицательное число остаётся отрицательным. Поэтому сравнение обычно сохраняется, если исходный порядок был верным.

2. Чётная степень

При чётной степени оба результата становятся положительными. Тогда число с большим модулем может оказаться больше, и прежний знак уже не подходит.

3. Нужна осторожность

Одно и то же неравенство нельзя переносить в степень автоматически. Сначала нужно определить знак основания и проверить, какая степень перед нами.



Алгоритм проверки перед возведением в степень

Последовательность помогает избежать ошибки в знаке при сравнении чисел.



Числовая прямая и изменение порядка чисел

Точки на прямой

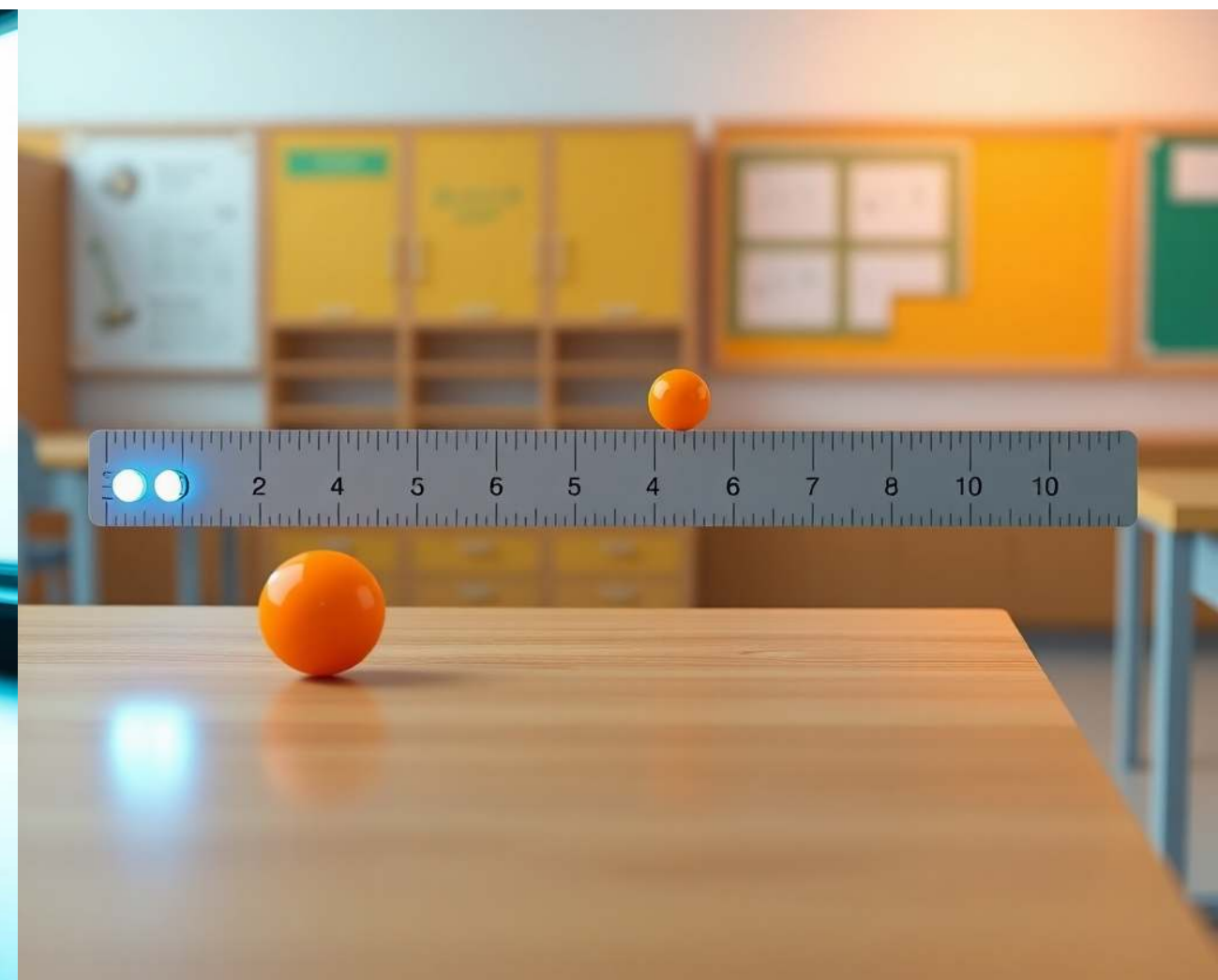
На числовой прямой числа справа всегда больше чисел слева. Поэтому пары -3 и -2 , а также 2 и 3 удобно показывать как точки с разным положением относительно нуля.

Переход через ноль

При чётной степени отрицательные числа переходят в положительную область. На рисунке это хорошо видно на примере -3 и -2 : их степени становятся числами справа от нуля.

Рост разницы

Для положительных чисел после возведения в степень расстояние между результатами обычно увеличивается. Значения 2 и 3 начинают расходиться всё сильнее, если показатель растёт.



Как растут степени чисел 2 и 3

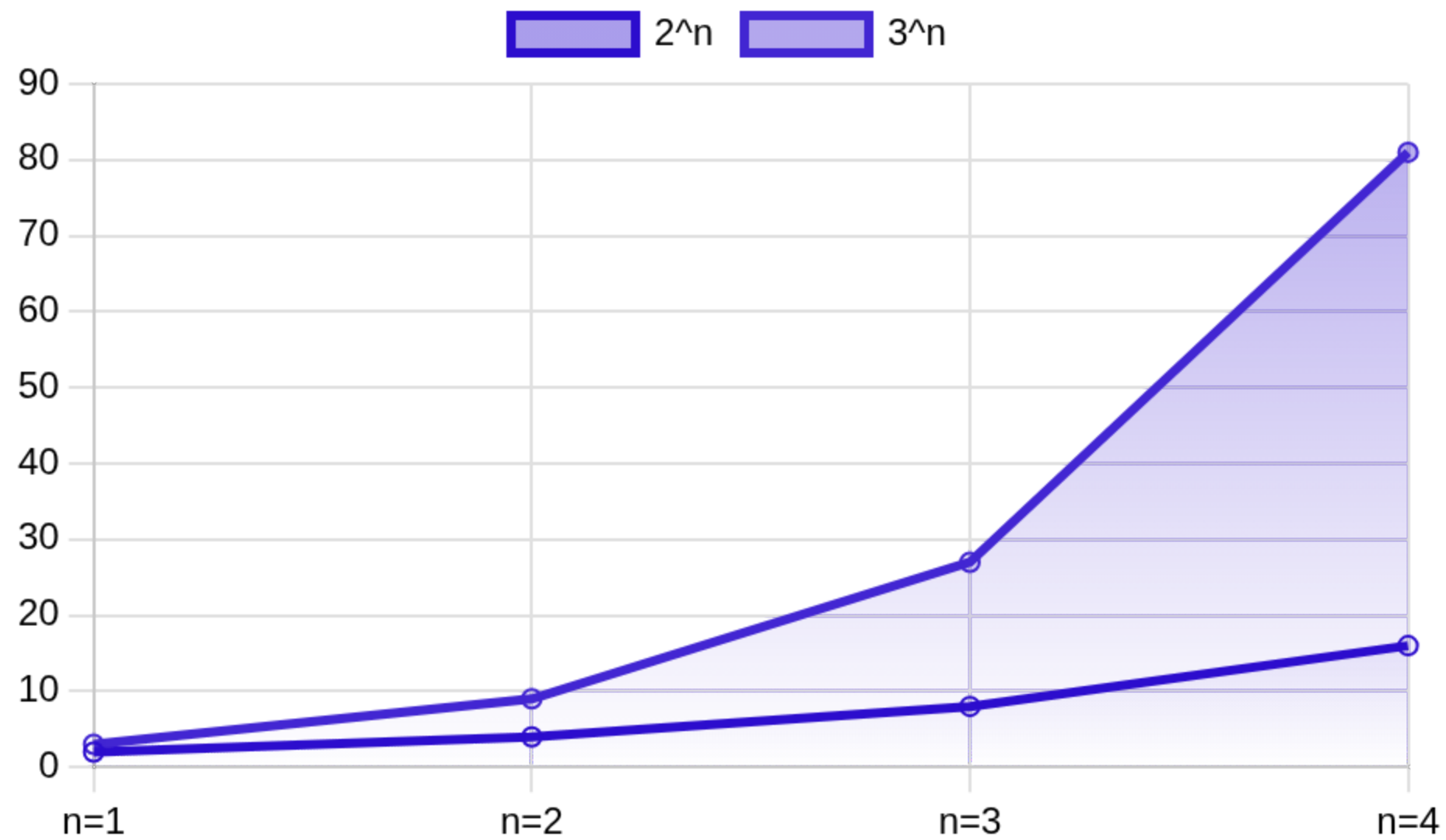


График показывает не только рост значений, но и быстрое увеличение разницы между ними при каждом новом показателе.

Чем больше степень, тем сильнее расходятся результаты. Это помогает понимать, почему порядок чисел после возведения может резко измениться.

Вычисления по свойствам степеней: 2^n и 3^n для $n=1-4$

Четная степень и сравнение модулей

Смотрим на модуль

При четной степени знак отрицательного числа исчезает, поэтому для сравнения удобнее учитывать модули. Чем больше модуль, тем больше становится результат после возведения в квадрат или любую четную степень.

Почему порядок меняется

Два отрицательных числа могут поменяться местами, потому что после преобразования оба становятся положительными. Тогда сравниваются уже не исходные числа, а их квадраты, которые зависят от величины модулей.

Простой пример

Если сравнить -5 и -3 , то больший модуль у числа -5 . После возведения в квадрат получаем 25 и 9, поэтому большее значение дает именно число с большим модулем.

Главный вывод

При четной степени нельзя опираться только на знак исходных чисел. Нужно сначала понять, какие значения станут положительными, а затем сравнить полученные результаты по обычным правилам.



Нечетная степень оставляет отрицательный результат отрицательным, поэтому порядок чисел на прямой не нарушается и сравнение можно продолжать по исходному расположению.

3

при такой степени знак
отрицательного числа
сохраняется

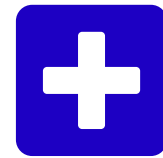
Примеры правильных и неправильных выводов

Сравнение показывает, когда знак неравенства сохраняется, а когда при четной степени меняется.

Для положительных чисел и нечетной степени порядок сохраняется. При четной степени отрицательные числа нужно проверять отдельно, потому что знак сравнения может измениться.

Исходное	Степень	Результат	Комментарий
$1 < 2$	2	$1 < 4$	верно
$-2 \leftarrow 1$	3	$-8 \leftarrow 1$	верно
$-2 \leftarrow 1$	2	$4 > 1$	знак изменился
$-3 \leftarrow 2$	4	$81 > 16$	знак изменился

Типичные ошибки при возведении неравенства в степень



Автоматическое сохранение знака

Часто ученик просто переносит знак неравенства в ответ. Это работает не всегда: при четной степени для отрицательных чисел результат может оказаться противоположным.

Игнорирование положительного результата

После четной степени отрицательные числа становятся положительными. Если не заметить это превращение, легко сделать неверный вывод о том, какое значение больше.

Путаница с умножением

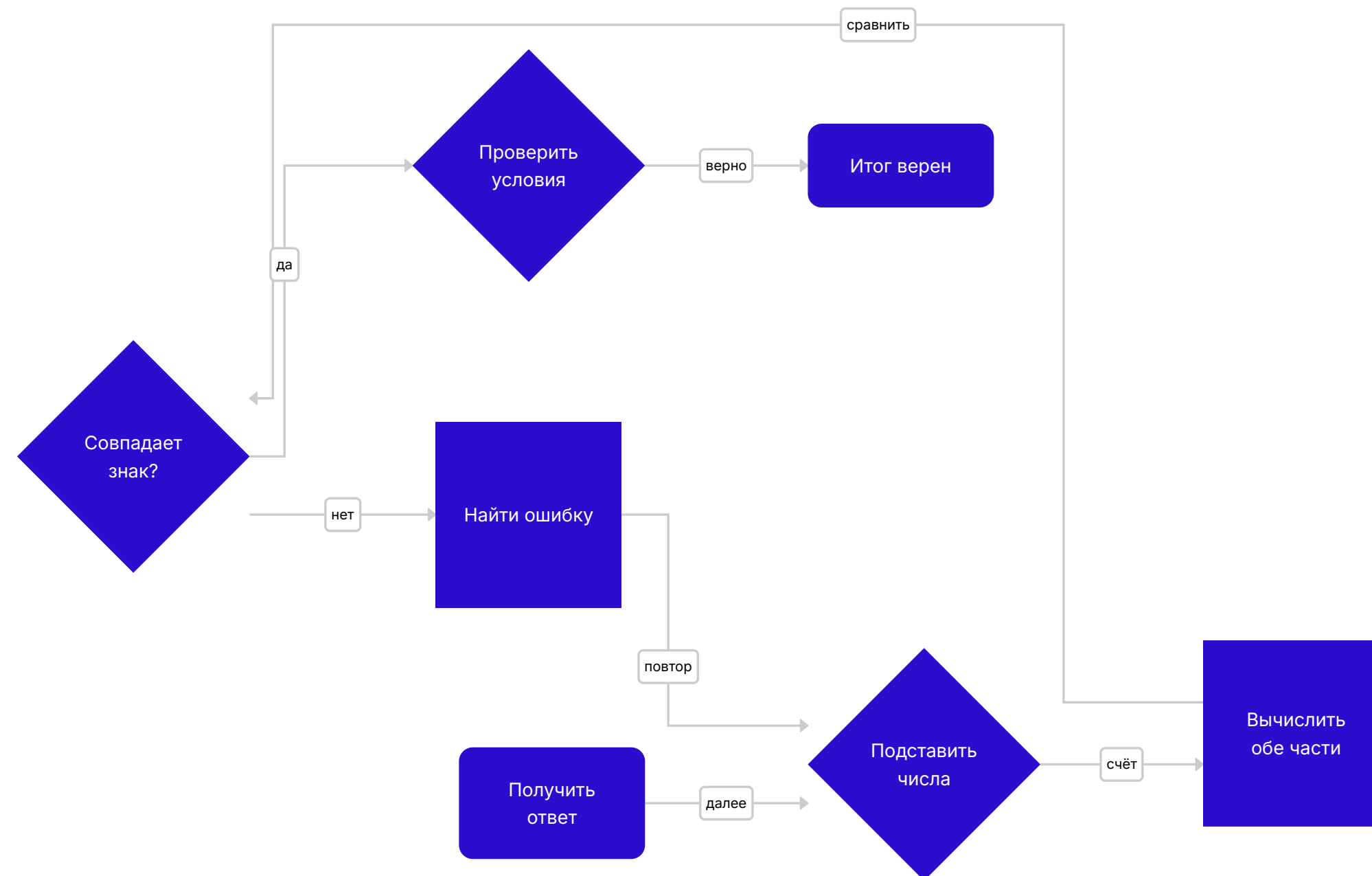
Возведение в степень — это не обычное умножение на число. Нужно различать, что означает показатель степени и как он влияет на результат сравнения.

Неполная проверка условий

Важно убедиться, что сравниваются именно те же основания и что показатель степени одинаковый. Простая проверка на числах 2, 3, -2 и -3 помогает избежать ошибки.

Проверка полученного ответа

Последовательность действий для контроля результата после возведения
неравенства в степень



Связь с правилами действий со степенями

Общие свойства

Степени подчиняются своим правилам: при умножении одинаковых оснований показатели складываются, а при возведении степени в степень показатели перемножаются. Эти свойства помогают быстро преобразовывать выражения.

Но сравнение отдельно

Когда нужно сравнить два числа, одного правила про степени недостаточно. Здесь важно учитывать знак оснований, вид неравенства и четность показателя, иначе вычисление даст неверный вывод.

Три части схемы

Удобно рассматривать основание, показатель и результат как отдельные элементы. Такая схема помогает не смешивать само вычисление степени с проверкой того, сохраняется ли знак неравенства.



Сравнение результатов на нескольких примерах

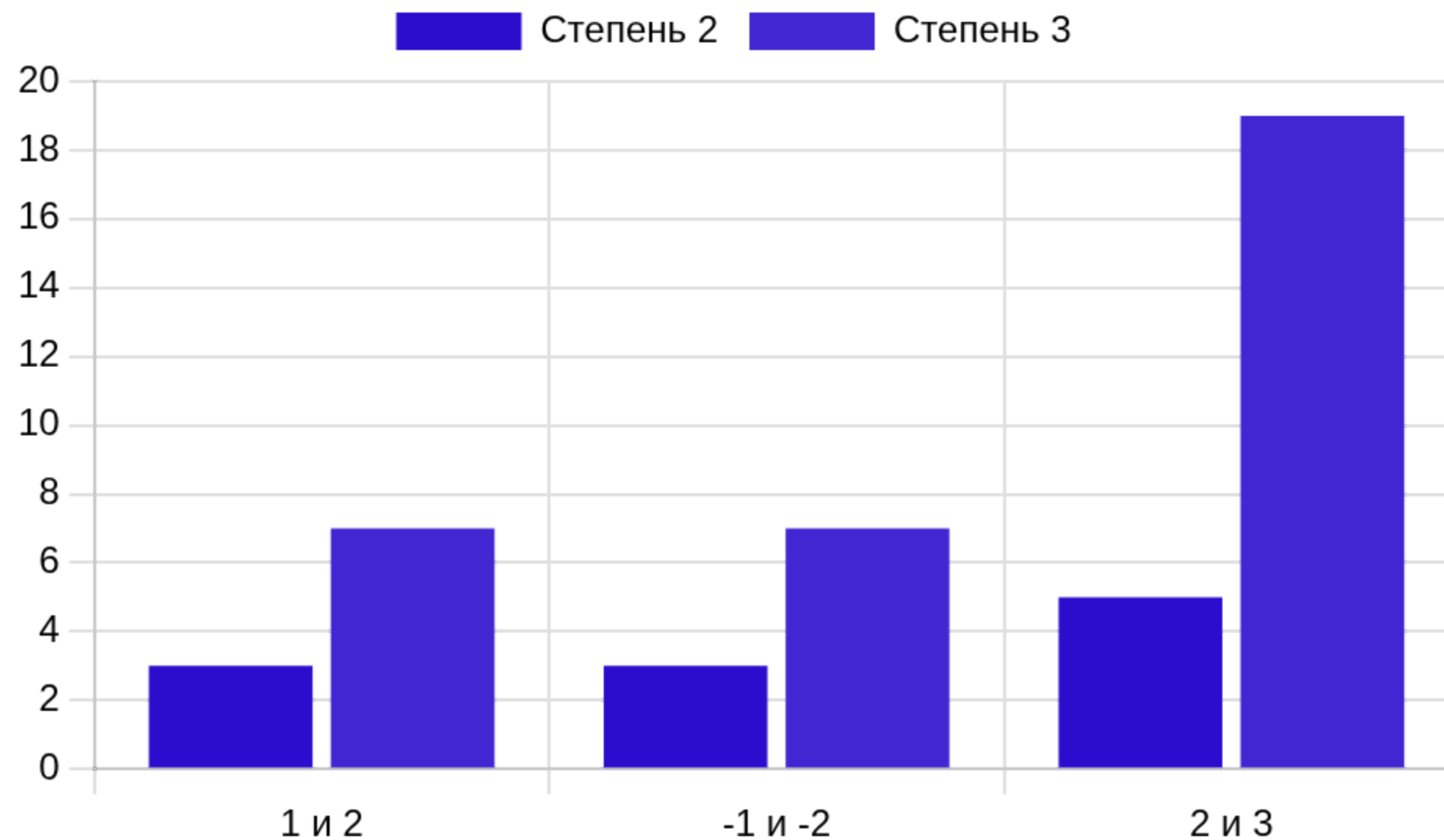


Диаграмма показывает не сами числа, а разрыв между результатами после возведения в степень. Он заметно увеличивается, когда показатель становится больше.

У положительных и отрицательных чисел разница растет по-разному, но при большей степени она всегда становится заметнее. Это помогает быстро оценивать сравнение без долгих вычислений.

Вычисления по правилам возведения в степень: 1, 2, 3, -1, -2, -3

Где это правило используется в задачах

1.

Оценка выражений

Когда нужно быстро понять, какое выражение больше, возведение в степень помогает сравнить результаты без полного решения. Особенно удобно это при работе с простыми числами и степенями 2, 3 и 4.

2.

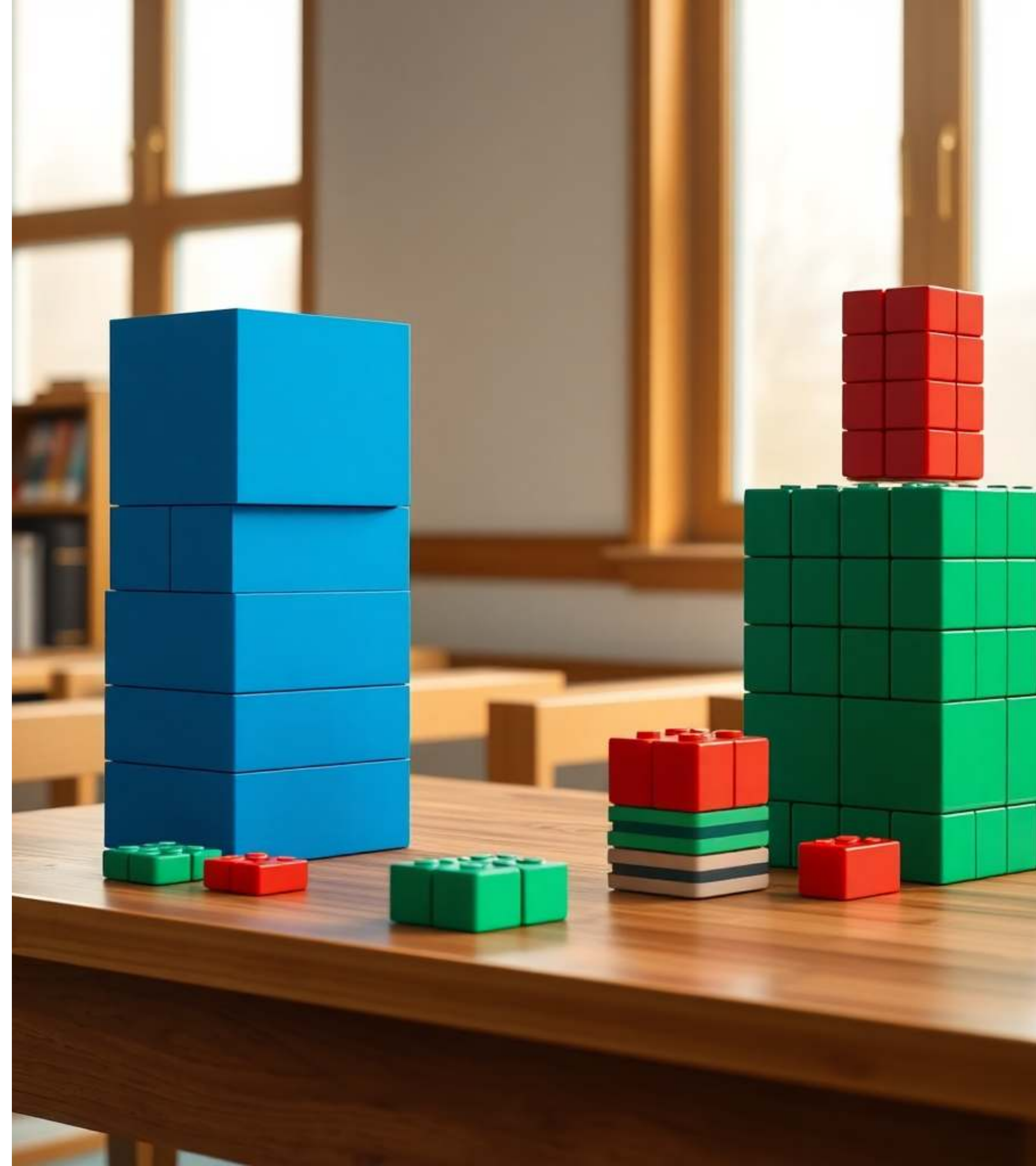
Проверка вычислений

Если ученик получил ответ после преобразований, можно проверить его на коротком примере. Такое сравнение показывает, не был ли потерян знак неравенства и правильно ли учтена четность показателя.

3.

Задачи 9 класса

В алгебре это правило связано с повторением свойств чисел, степеней и неравенств. Оно учит внимательно смотреть на условия и не делать одинаковых выводов для всех случаев.



Короткое правило для запоминания

1. Положительные числа

Если оба числа положительные, то при возведении в любую натуральную степень порядок сохраняется. Это самый простой и надежный случай, который можно применять без дополнительных оговорок.

2. Отрицательные числа

Для отрицательных чисел нужно сначала посмотреть на четность показателя. При нечетной степени порядок сохраняется, а при четной число с большим модулем дает больший результат.

3. Перед ответом

Сначала проверь знак чисел, затем вид неравенства и только потом показатель степени. Такая последовательность помогает избежать типичных ошибок и выбрать правильный знак сравнения.

Что важно помнить о неравенствах в степени

Главное правило простое: сначала определяем знак оснований и четность показателя, затем вычисляем и только после этого делаем вывод. Такой порядок защищает от ошибок и помогает уверенно решать задания.