

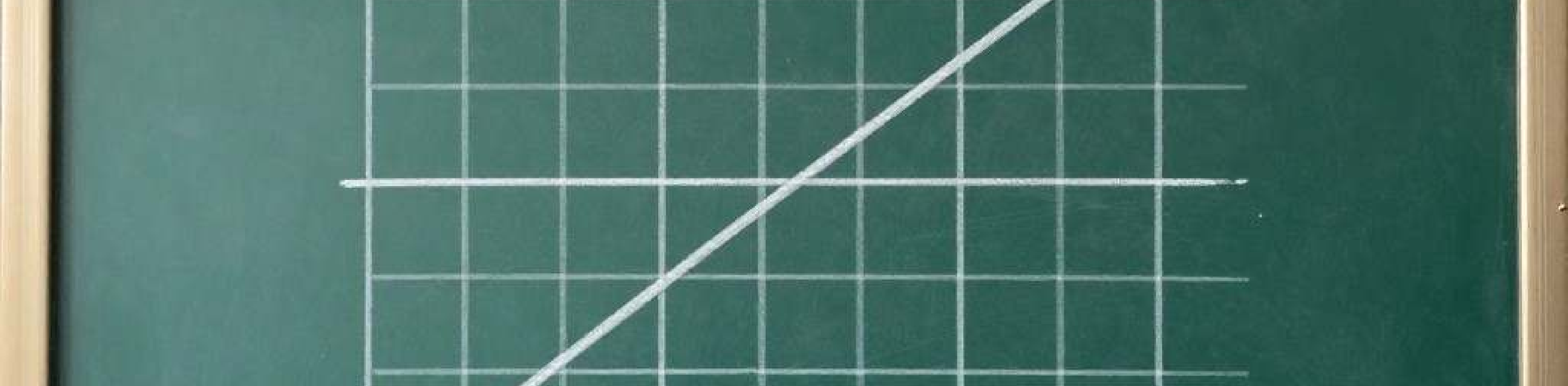


График линейного уравнения с двумя переменными

Линейное уравнение можно увидеть как прямую на плоскости.

Где встречаются линейные зависимости

Такие уравнения связывают две величины в задачах по математике, физике и повседневных ситуациях: от покупки товаров до движения и изменения температуры.



Что такое уравнение с двумя переменными

Две переменные

Уравнение содержит две буквы, обычно x и y . Значения этих переменных подбирают так, чтобы после подстановки получилось верное равенство.

Пара чисел

Решением считается не одно число, а пара $(x; y)$. Каждая такая пара показывает конкретную точку на координатной плоскости.

Проверка решения

Чтобы убедиться, что пара подходит, достаточно подставить x и y в уравнение и проверить, совпадают ли левая и правая части.

Линейный вид

В линейном уравнении переменные входят только в первой степени. Здесь нет квадратов, дробных степеней и произведения вида xy .



Общий вид линейного уравнения

1 Запись уравнения

Общий вид линейного уравнения с двумя переменными записывают так: $ax+by=c$. Здесь a , b и c — числа, которые задают конкретное уравнение.

2 Коэффициенты

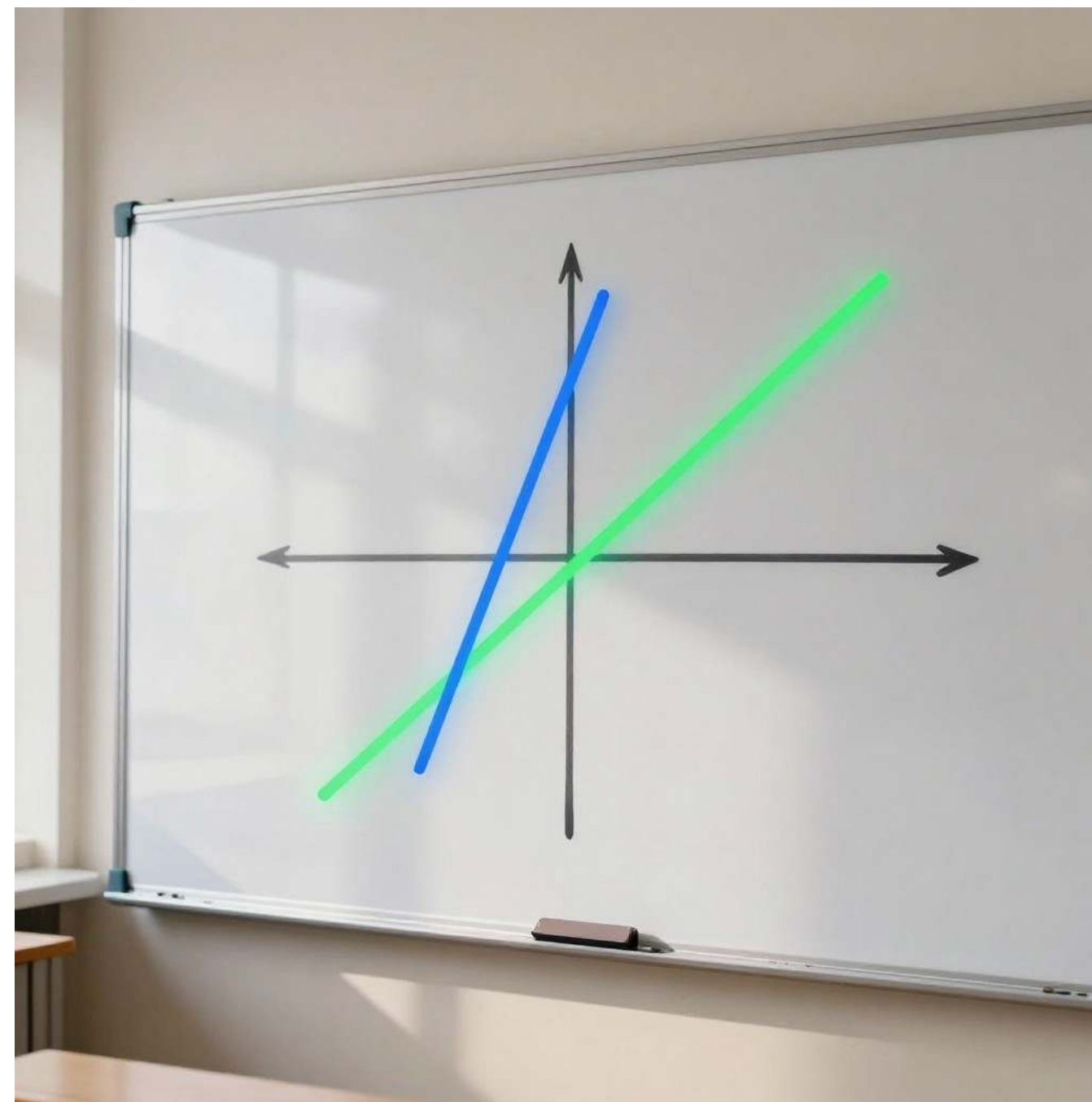
Числа a и b не могут одновременно быть равны нулю, иначе уравнение потеряет смысл как линейное. Каждый коэффициент влияет на график по-своему.

3 Удобная форма

Если b не равно нулю, уравнение можно преобразовать к виду $y=kx+b$. Такая запись сразу показывает, как меняется y при изменении x .

4 Что видно сразу

В форме $y=kx+b$ легче определить направление прямой, её наклон и точку пересечения с осью y , не строя график полностью.



Основные формы записи и их графики

Форма	График	Пример
$ax+by=c$	наклонная	$3x+2y=6$
$y=kx+b$	наклонная	$y=2x-1$
$x=a$ / $y=b$	верт./гор.	$x=2$; $y=3$

Сравним несколько способов записи линейных уравнений и увидим, какой вид прямой задаёт каждая форма.

Обычная линейная запись задаёт наклонную прямую, а формы $x=a$ и $y=b$ описывают особые прямые, параллельные осям координат.

Координатная плоскость и запись точки

Порядок координат

Точку на плоскости записывают как пару чисел $(x; y)$. Сначала указывают положение по горизонтали, затем по вертикали.

Оси координат

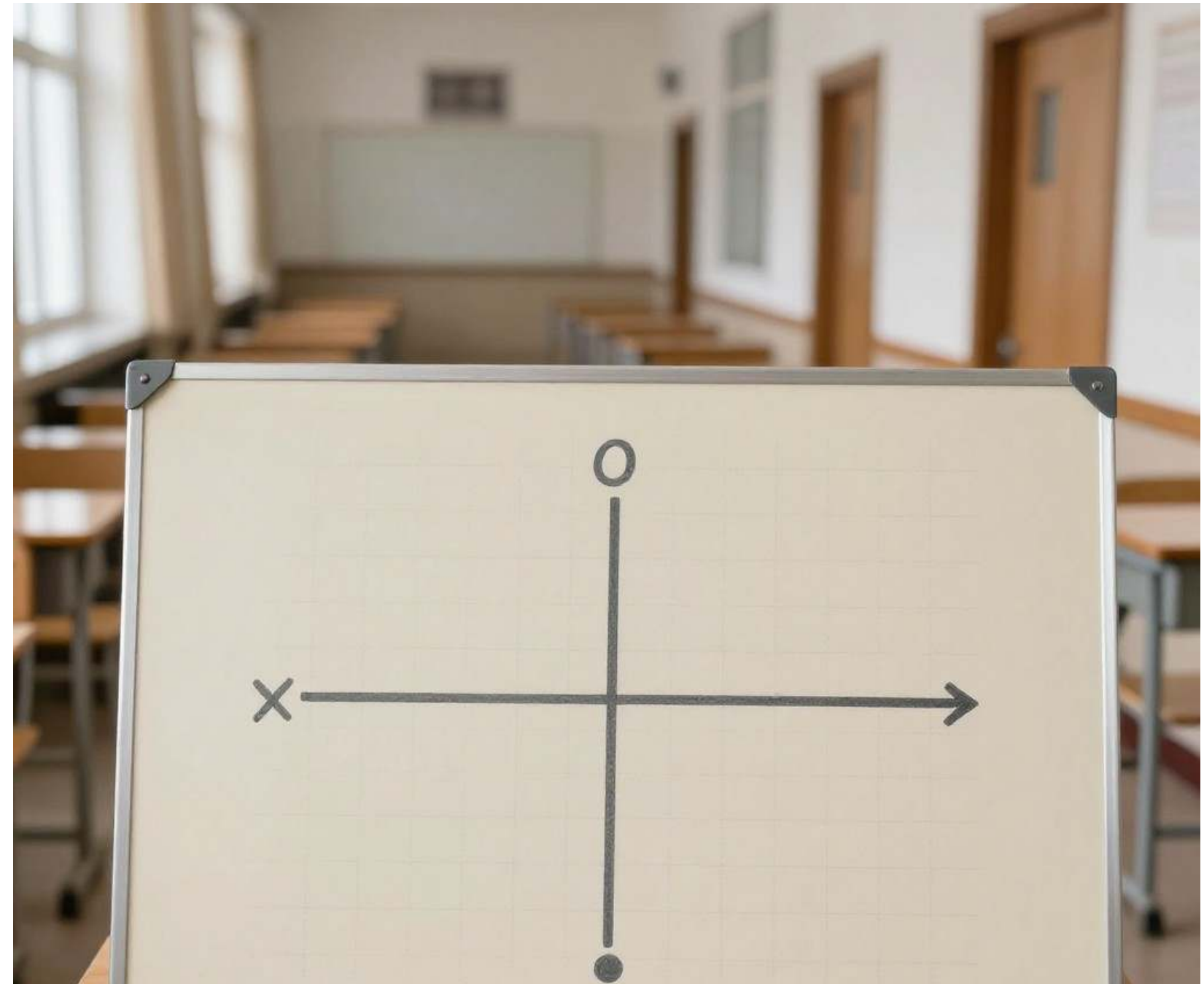
Ось x идёт горизонтально, а ось y — вертикально. Их пересечение образует начало координат $O(0; 0)$, откуда отсчитывают все точки.

Одна точка — одна пара

Каждая точка соответствует одной паре чисел, а каждая пара — одной точке. Поэтому важно не менять координаты местами.

Две точки для прямой

Чтобы построить график линейного уравнения, достаточно двух различных решений. Через две точки можно провести только одну прямую.



Как строят график по уравнению

Последовательность действий при построении прямой по линейному уравнению

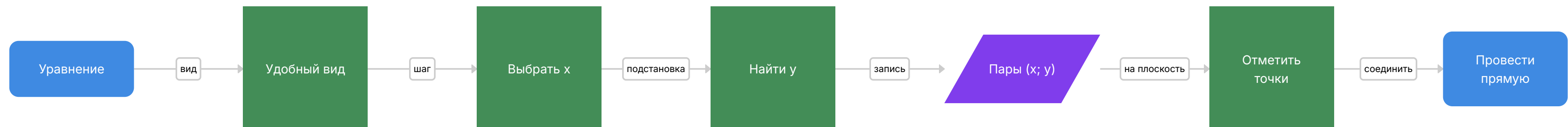
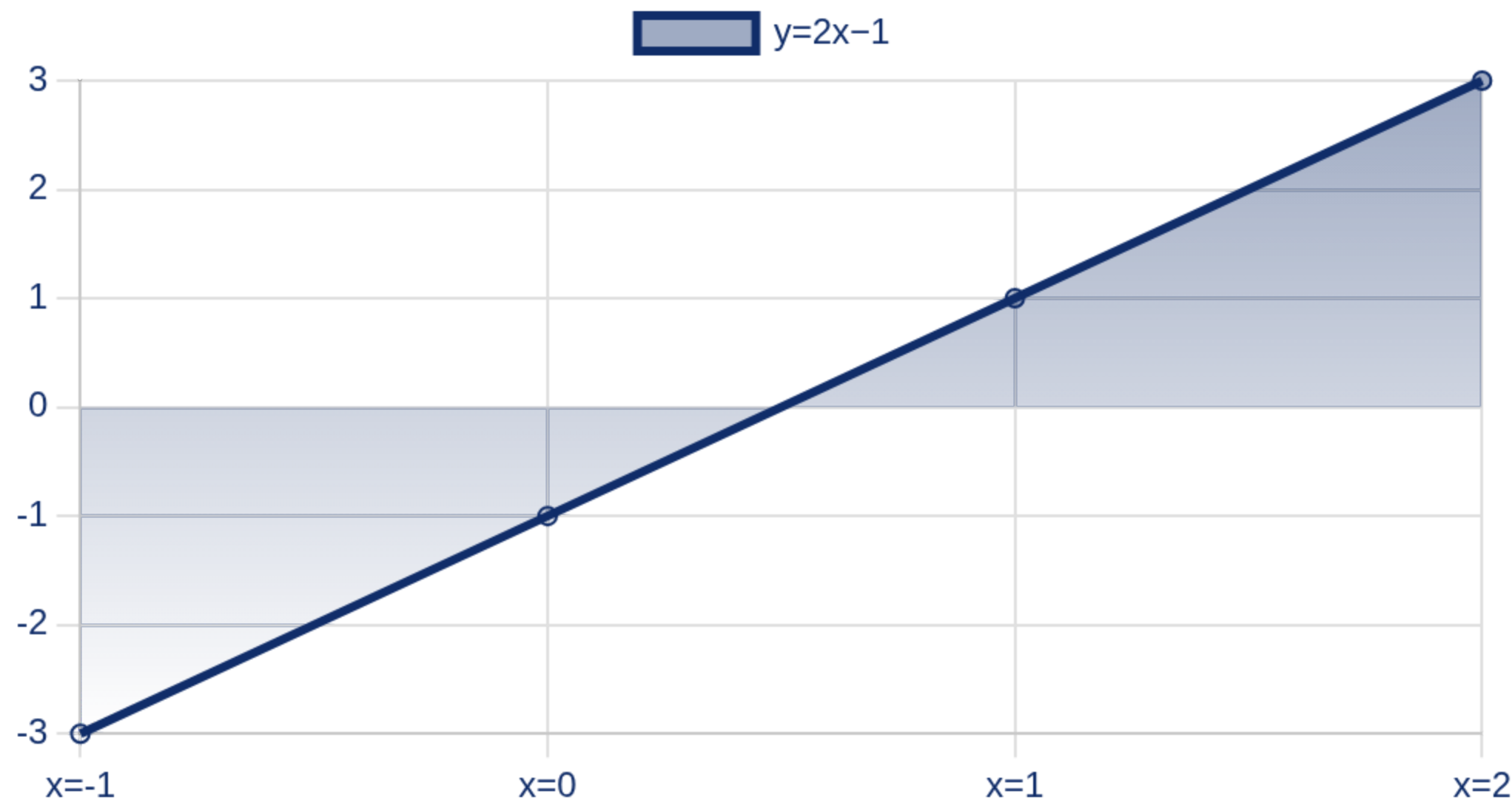


Таблица значений для уравнения $y=2x-1$



Значения удобно читать по таблице:
при каждом увеличении x на 1 значение y
растёт на 2.

График идёт вверх слева направо, значит
коэффициент при x положительный
и задаёт рост значений.

Почему для графика хватает двух точек

Две точки определяют прямую



Если известны две разные точки, через них можно провести только одну прямую. Именно поэтому для линейного уравнения обычно достаточно двух решений.

Третья точка для проверки



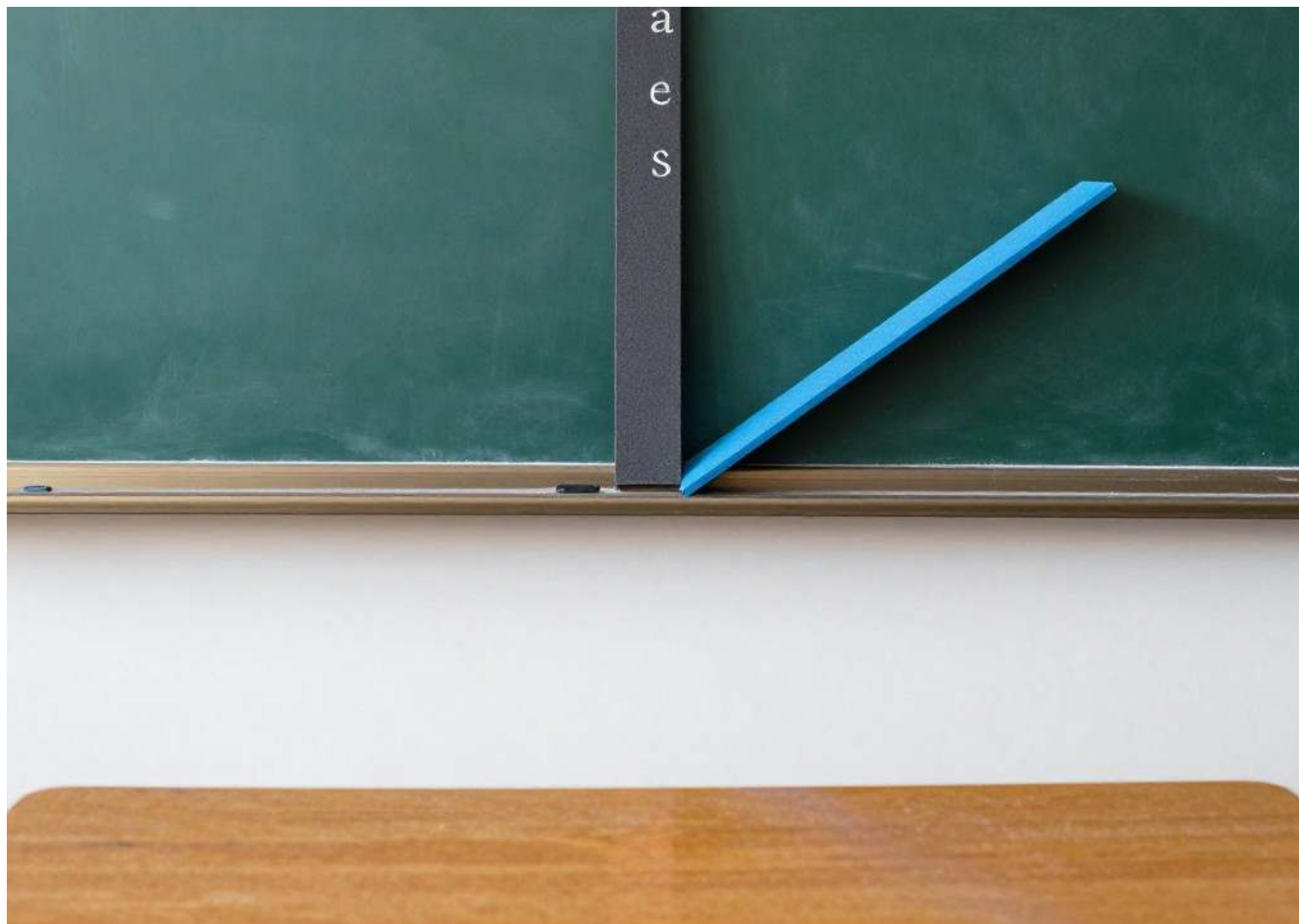
Дополнительная точка помогает убедиться, что вычисления выполнены верно. Если она тоже лежит на прямой, построение и таблица значений согласованы.

Точность построения



Когда координаты записаны правильно и точки отмечены без ошибок, график получается точно. Ошибка в одной паре чисел сразу меняет положение всей прямой.

Угловой коэффициент и свободный член



1

Что означает k

В записи $y=kx+b$ число k показывает, на сколько изменится y , если x увеличить на 1. Это называют угловым коэффициентом.

2

Что означает b

Число b — свободный член. Оно показывает значение y при $x=0$, то есть точку пересечения графика с осью y .

3

Когда прямая растёт

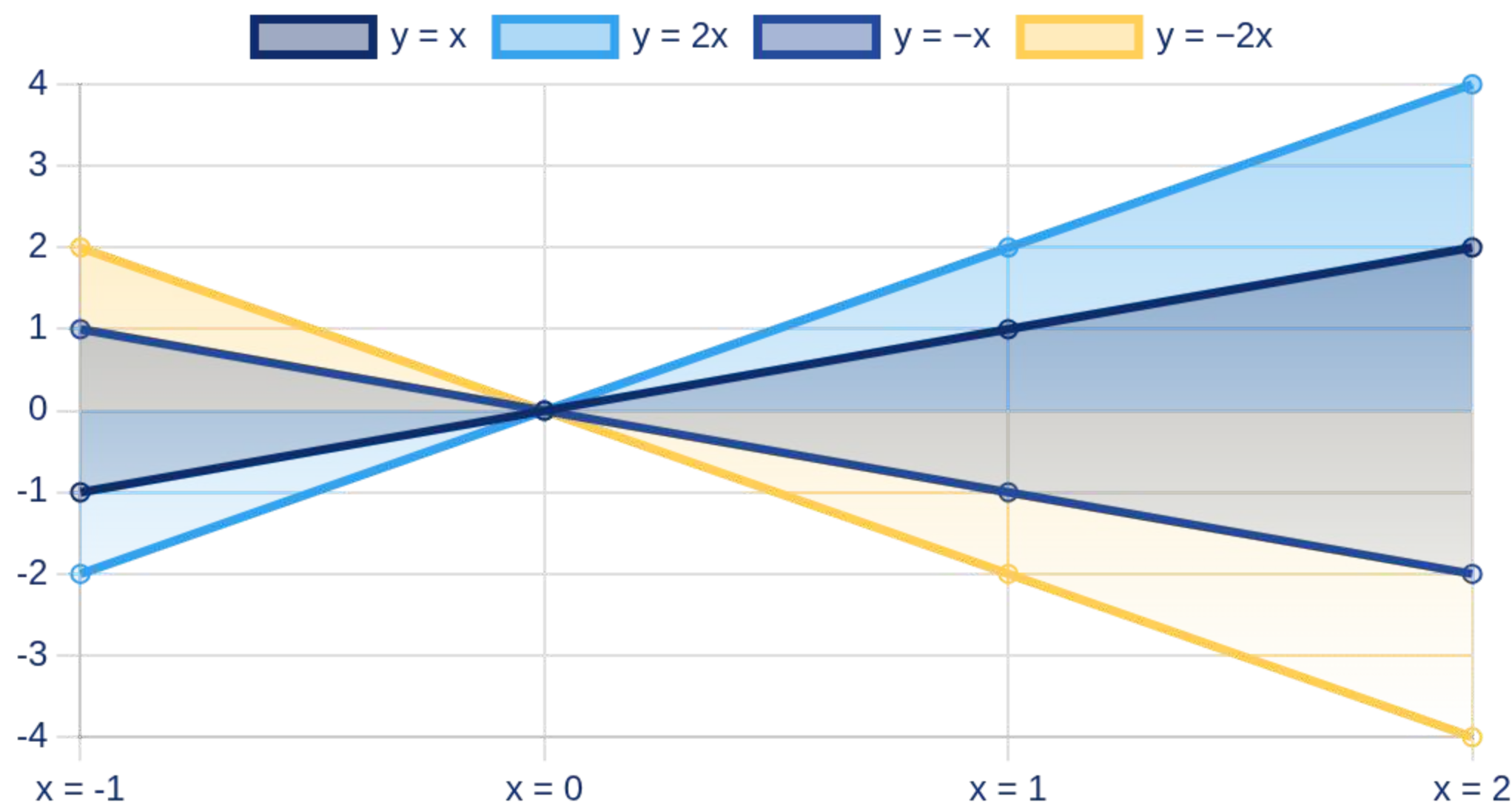
Если k положительное, прямая идёт вверх слева направо. Чем больше модуль k , тем сильнее наклон и быстрее изменение значения y .

4

Когда прямая убывает

Если k отрицательное, прямая опускается слева направо. В этом случае при увеличении x значение y уменьшается.

Как коэффициент k меняет наклон прямой



При одинаковом $b = 0$ все прямые проходят через начало координат, а знак и модуль k определяют направление и крутизну.

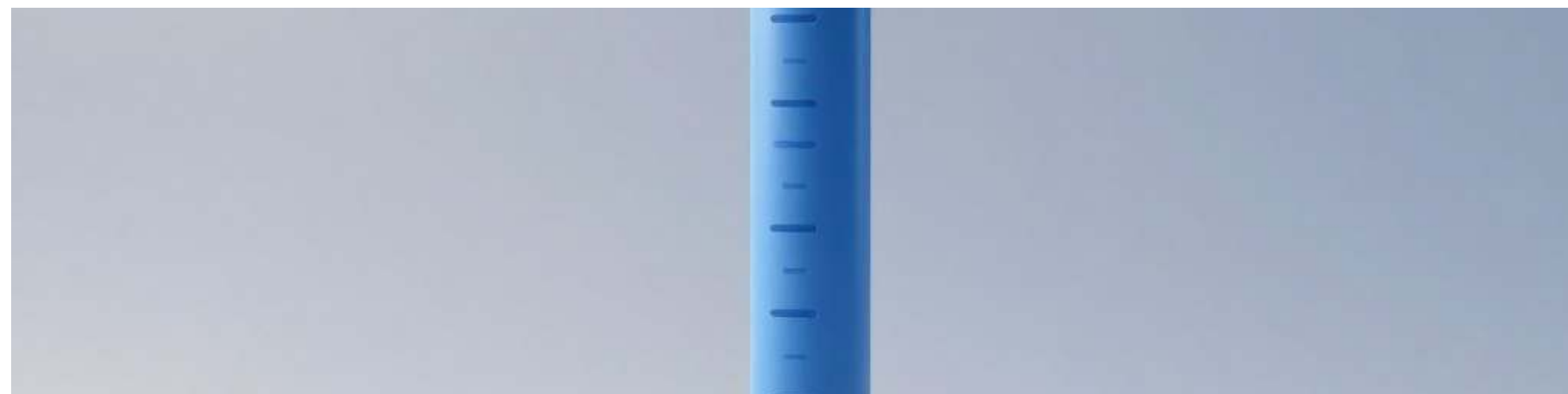
Чем больше $|k|$, тем круче наклон; положительный k даёт рост, отрицательный — убывание.

Составлено по уравнениям $y=x$, $y=2x$, $y=-x$ и $y=-2x$.

Точки пересечения прямой с осями

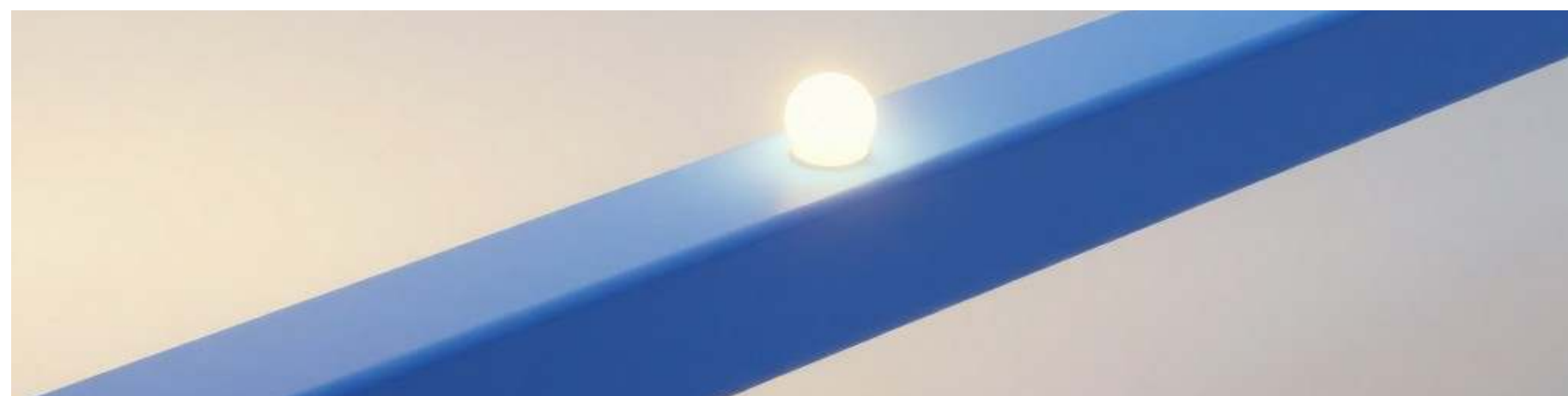
Когда x равен нулю

Чтобы найти пересечение с осью y , в уравнение подставляют $x = 0$. Полученная точка показывает, где прямая стартует на вертикальной оси. Для уравнения $3x + 2y = 6$ это точка $(0; 3)$, и её удобно отметить первой.



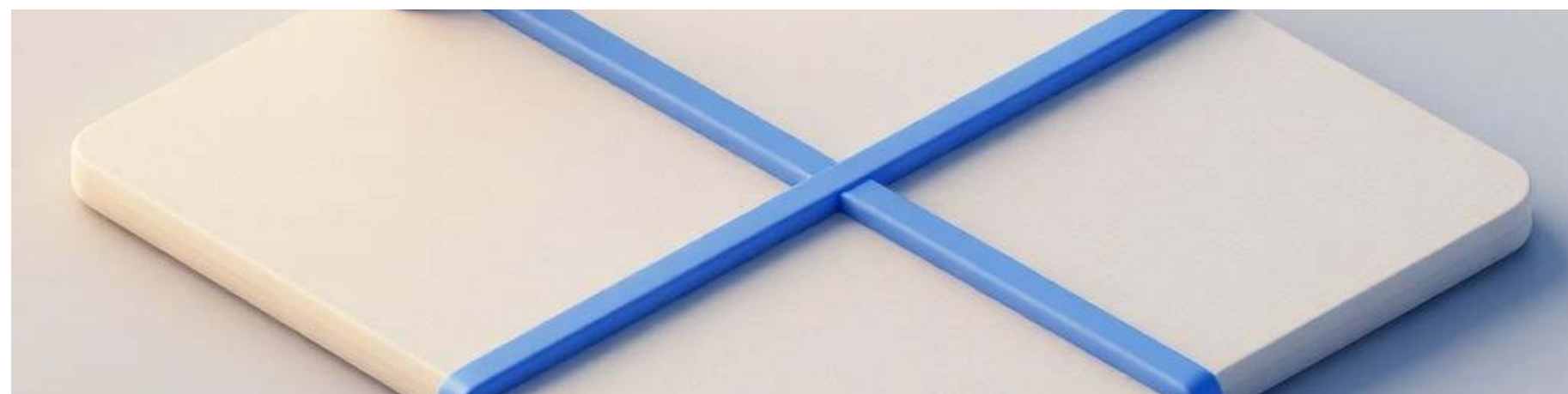
Когда y равен нулю

Пересечение с осью x находят, если положить $y = 0$. Так получают точку, в которой прямая проходит через горизонтальную ось. Для $3x + 2y = 6$ выходит $(2; 0)$, поэтому уже есть вторая точка для построения графика.



Два быстрых ориентира

Две точки пересечения часто позволяют построить прямую без большой таблицы значений. Этот способ особенно полезен в задачах, где важно быстро увидеть положение графика. Он помогает сразу понять, как прямая расположена относительно обеих осей координат.



Сколько решений у линейного уравнения

Каждое линейное уравнение с двумя переменными задаёт бесконечное множество решений, а все эти решения образуют одну прямую.

Одно уравнение описывает не отдельную точку, а целую прямую из всех подходящих пар чисел.

Факт	Что это значит	Пример
Бесконечно много	Подходит много пар (x; y)	(1; 2), (2; 1)
Каждая точка — решение	Точка лежит на прямой	Да
Вся прямая — решения	Нет лишних точек	Только они

Особые виды прямых на плоскости



$$x = a$$

Уравнение вида $x = a$ задаёт вертикальную прямую. Все её точки имеют одинаковую абсциссу, поэтому линия идёт параллельно оси y и не наклоняется.



$$y = b$$

Уравнение вида $y = b$ задаёт горизонтальную прямую. У всех точек одна и та же ордината, значит линия параллельна оси x и остаётся ровной.

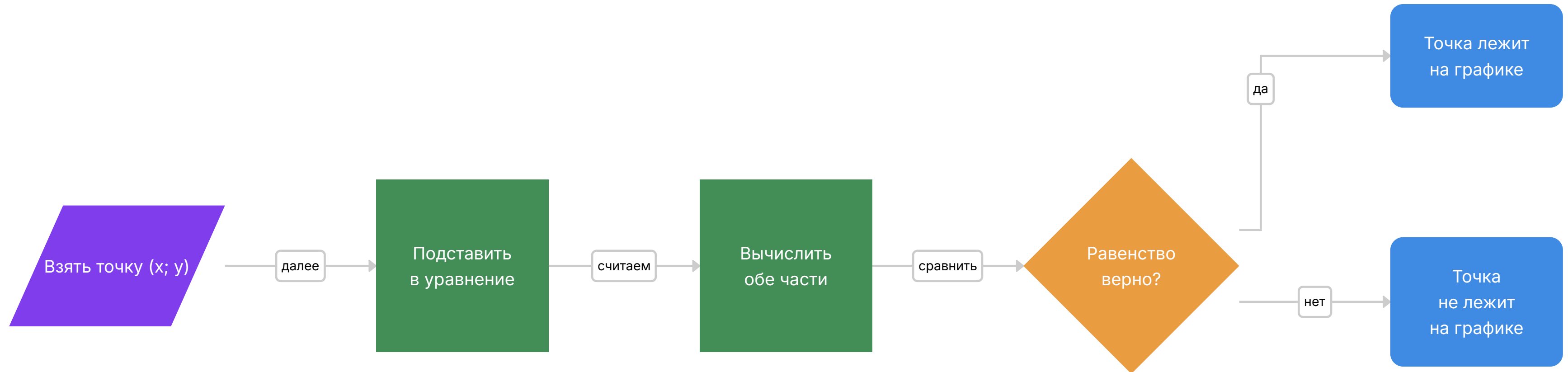


Сравнение с наклонной прямой

Обычная линейная запись $ax + by = c$ чаще даёт наклонную прямую. Особые случаи $x = a$ и $y = b$ помогают увидеть, как коэффициенты влияют на положение графика.

Проверка: лежит ли точка на графике?

Алгоритм подстановки координат в линейное уравнение и сравнения левой и правой частей.



Типичные ошибки при построении

1 Путают порядок координат

Сначала записывают x , потом y . Если поменять их местами, точка окажется в другом месте плоскости, и весь график может получиться неверным.

2 Теряют знак минус

При вычислениях легко забыть минус перед числом. Из-за такой ошибки точка смещается в противоположную сторону, а прямая перестаёт соответствовать уравнению.

3 Неправильно округляют

Если значения получаются дробными, важно аккуратно округлять их только при необходимости. Слишком грубое округление может изменить положение точки и исказить рисунок.

4 Рисуют не прямую

Для линейного уравнения график всегда является прямой линией. Соединять точки кривой недопустимо, даже если они расположены близко друг к другу.

Линейные зависимости вокруг нас

Покупки и стоимость

Если цена одного предмета известна, общая стоимость зависит от количества покупок линейно. К такому описанию подходит модель $y = kx + b$, где k показывает цену за единицу.

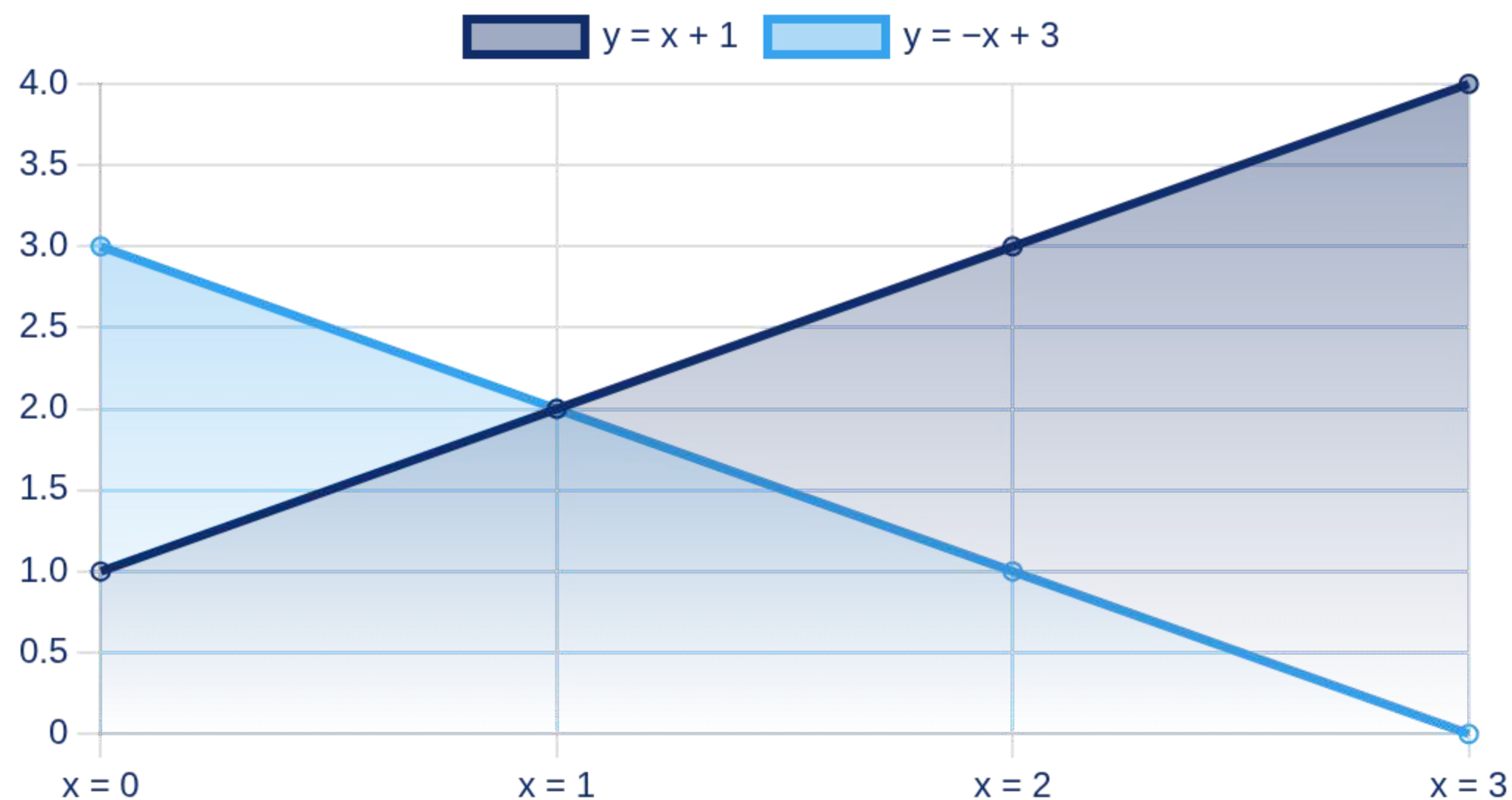
Путь и время

При постоянной скорости путь увеличивается равномерно с течением времени. Здесь x можно считать временем, а y — пройденным расстоянием, поэтому график получается прямой линией.

Изменение температуры

Если температура меняется одинаково через равные промежутки времени, удобно использовать линейную модель. Начальное значение задаёт b , а величина изменения за шаг — коэффициент k .

Сравнение двух прямых $y = x + 1$ и $y = -x + 3$



Обе прямые можно построить по одинаковым значениям x , чтобы сразу увидеть различие в направлении и высоте графиков.

Положительный k задаёт рост, отрицательный — спад, а число b смещает прямую вверх или вниз.

Составлено по уравнениям $y = x + 1$ и $y = -x + 3$.

Как решают задачи с графиком линейного уравнения

1. Обозначают величины

Сначала выясняют, что в задаче обозначают x и y . Это помогает правильно выбрать смысл каждой переменной и не перепутать данные.

2. Записывают уравнение

Затем составляют линейное уравнение по условию. Важно, чтобы оно отражало связь между величинами и было удобно для вычислений.

3. Строят график

После этого находят несколько точек, отмечают их на координатной плоскости и проводят через них прямую. Так становится видна вся зависимость.

4. Проверяют ответ

В конце подставляют найденные значения обратно в уравнение или в условие задачи. Это помогает убедиться, что решение верное и логичное.



Линейное уравнение: прямая, которую можно читать

График линейного уравнения показывает все его решения сразу. Если уверенно находить точки, понимать коэффициенты k и b и проверять ответы, задача становится наглядной и понятной.