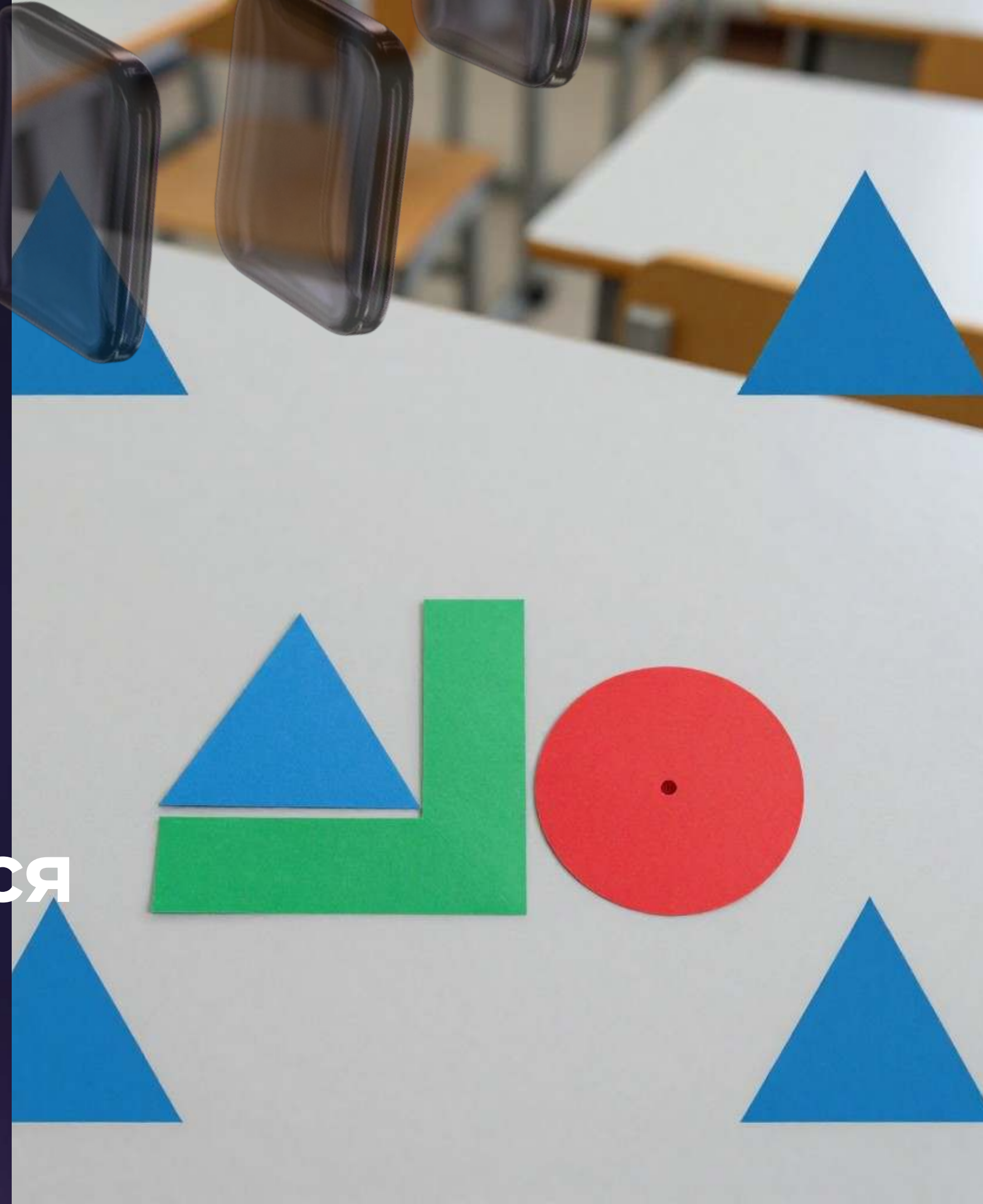


Разберём переносы, повороты, отражения и гомотетию: что остаётся неизменным, а что меняется.

Преобразования плоскости: как меняются фигуры на уроке геометрии





Почему тема преобразований важна в 7 классе

Преобразования плоскости помогают понимать симметрию и «движение» фигур. Их применяют в орнаментах, чертежах, мозаиках, архитектурных мотивах и задачах по координатам. На уроках особенно важно: какие свойства сохраняются, а какие меняются.

Основные виды преобразований плоскости

01 Параллельный перенос, поворот и отражение относительно прямой относятся к движениям. При любом из них расстояния между точками и величины углов не меняются, поэтому фигуры сохраняют «геометрический размер».

02 Поворот выполняется вокруг центра и переводит точки на заданный угол. Каждая точка оказывается на том же расстоянии от центра, что и в исходной фигуре, а углы при этом остаются равными.

03 Гомотетия меняет размеры фигуры. При коэффициенте увеличения или уменьшения сохраняются форма и пропорции сторон, поэтому результатом становятся подобные фигуры, а не равные.

Симметрия в окружающем мире и в геометрии



Бабочки и «зеркальный» рисунок

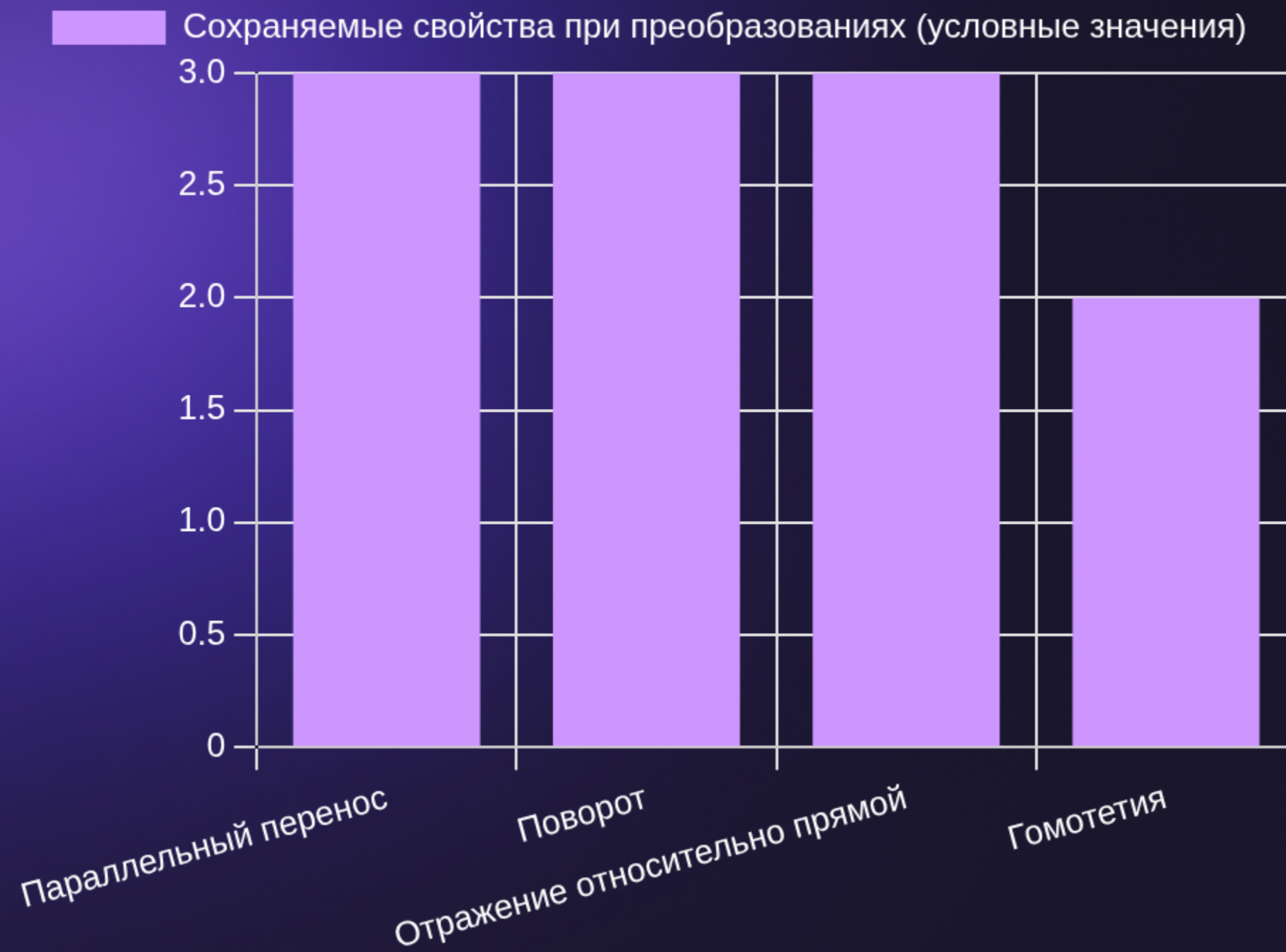
Одна половина узора как будто повторяет другую, только перевернуто. Если мысленно провести ось, точки узора окажутся на равных расстояниях по обе стороны от неё. Так легко объяснить осевую симметрию на примере природы.



Снежинки и архитектурные фасады

Снежинка часто выглядит одинаково при отражении: её элементы повторяются по обе стороны воображаемой прямой. Похожий принцип используют и архитекторы: фасады и орнаменты строят, чтобы композиция «сходилась» по симметрии. Это делает рисунок строгим и узнаваемым.

Какие свойства сохраняют разные преобразования



У движений сохраняются и длины, и углы, и площадь: фигура остаётся равной. У гомотетии сохраняются углы и пропорции, но меняются размеры.

Диаграмма показывает разницу между движениями и гомотетией: при движениях фигура остаётся той же «по величине», а при гомотетии — только похожей.

Обобщение школьных свойств преобразований из курса геометрии (без внешних статистических данных).

Свойства преобразований плоскости

Преобразование	Сохраняет	Изменяет
Параллельный перенос	расстояния, углы, площадь, ориентацию	—
Поворот	расстояния, углы, площадь, ориентацию	—
Отражение относительно прямой	расстояния, углы, площадь	ориентацию
Гомотетия	углы и пропорции	длины и площадь (если $k \neq 1$)

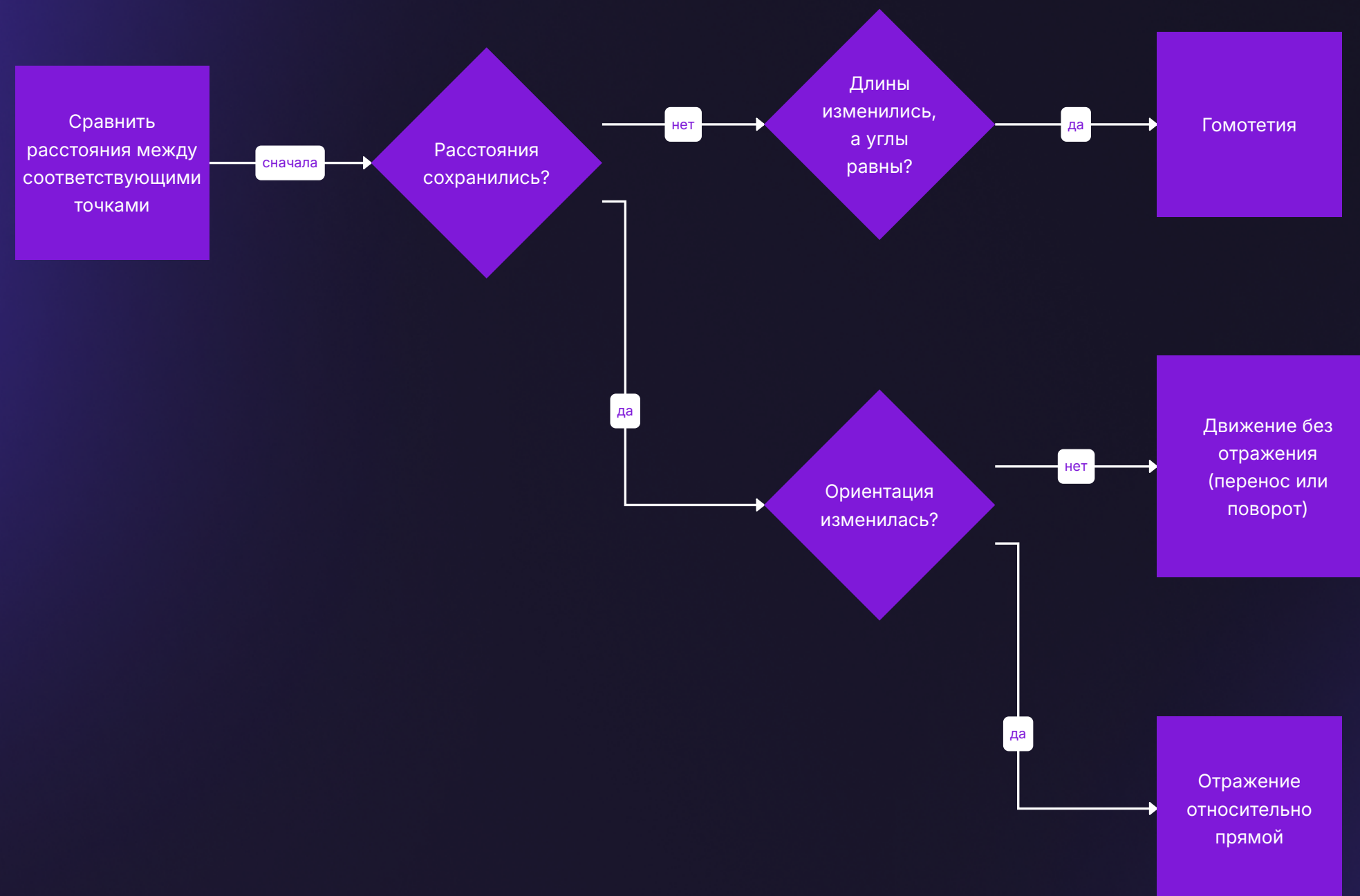
Сопоставим преобразования по признакам: что сохраняется (величины и свойства фигуры) и что может измениться. Ключевая идея: движения дают равенство, а гомотетия — подобие.

Все движения сохраняют равенство фигур (включая ориентацию), а гомотетия сохраняет форму частично: углы и пропорции остаются, размеры — нет.

Обобщённые формулировки из школьной программы по преобразованиям плоскости.

Как определить вид преобразования

Логика различения по результатам построения: сначала проверяем расстояния, затем ориентацию, затем характер изменения длин.



Параллельный перенос

01 При параллельном переносе все точки фигуры смещаются одинаково, по одному и тому же вектору. Фигура не «закручивается» и не «переворачивается», а просто переезжает на новое место на плоскости.

02 Если есть точка $A(x, y)$, то её образ становится $A(x + a, y + b)$, где (a, b) — координаты вектора переноса. Такое преобразование легко проверять по координатам: изменения у всех точек одинаковые.

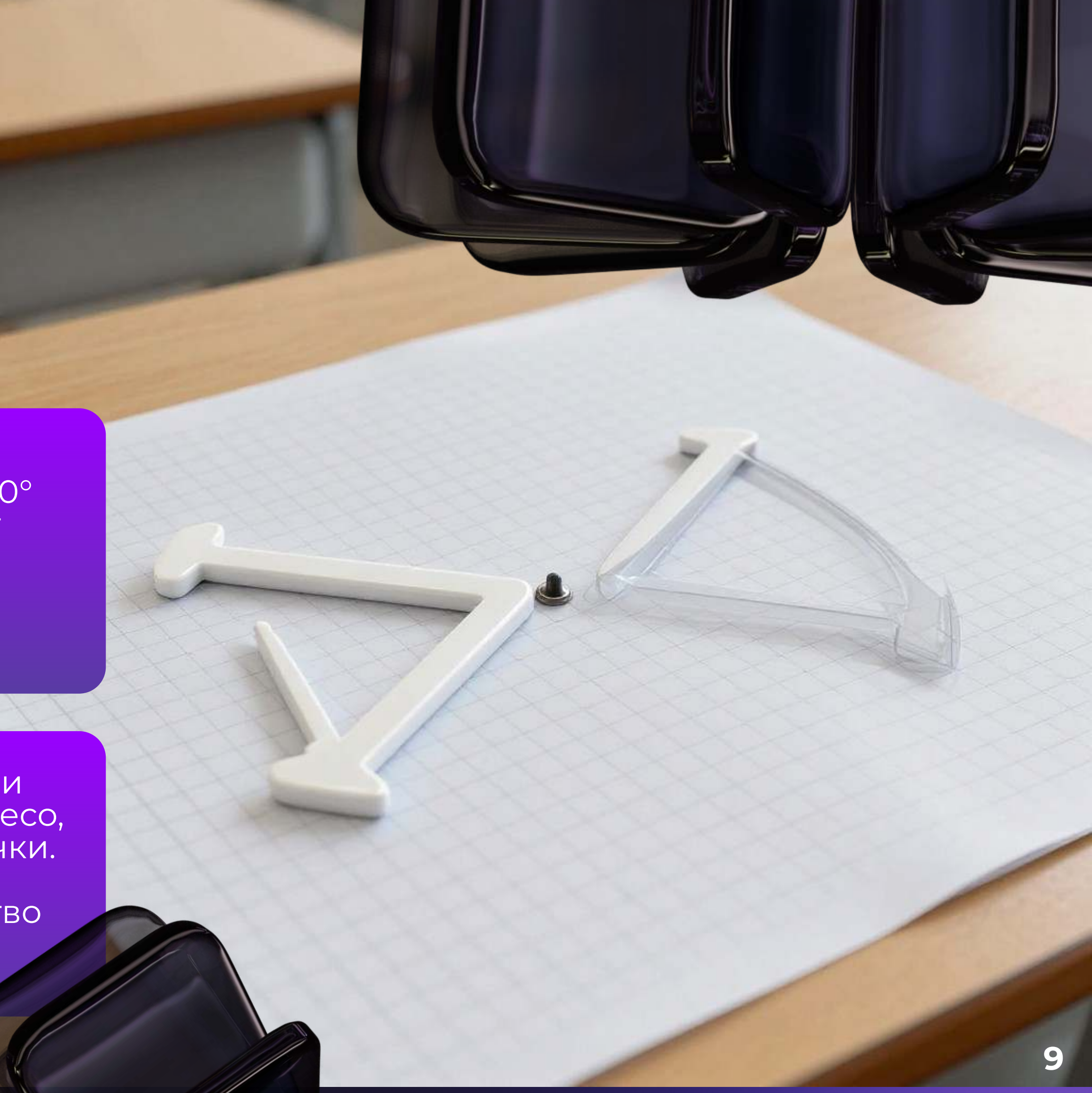
03 Параллельный перенос сохраняет расстояния между точками и величины углов. Поэтому отрезки остаются равными по длине, а прямые, которые были параллельны, остаются параллельными.

04 На координатной сетке удобно строить образ так: выбираем вектор переноса, «отмечаем» его по клеткам, а затем переносим каждую вершину фигуры одинаковым шагом.

Поворот фигуры вокруг точки

Поворот выполняется вокруг выбранного центра на заданный угол, например 90° , 180° или 270° . При этом каждая точка сохраняет расстояние до центра поворота, а значит, «геометрический масштаб» не меняется.

Такое преобразование встречается в быту и моделях: стрелки часов, вращающееся колесо, узоры, которые поворачиваются вокруг точки. На клетчатой бумаге поворот удобно выполнять по шагам, контролируя равенство расстояний до центра.



Отражение относительно прямой

01

При отражении относительно прямой каждая точка и её образ находятся на равных расстояниях от оси симметрии. Точки исходной фигуры и соответствующие им точки располагаются по разные стороны от оси.

02

Чтобы построить отражение, через точку исходной фигуры проводят перпендикуляр к оси и откладывают на нём одинаковое расстояние до образа. Соответствующие точки соединяются отрезками, которые перпендикулярны оси.

03

Некоторые фигуры после отражения совпадают сами с собой — это означает осевую симметрию. Так бывает у квадрата, прямоугольника и у равнобедренного треугольника, если ось проходит через подходящую линию.

Сохранение формы при разных преобразованиях



В движениях фигура остаётся равной самой себе: меняется положение, но не геометрический «рисунок» между точками. Это помогает быстро узнавать преобразование по результату.

Диаграмма подчёркивает: перенос, поворот и отражение сохраняют ключевые размеры, тогда как гомотетия меняет масштаб, сохраняя подобие.

Учебная схема: приняты условные индексы (3 — полное сохранение формы, 1.5 — только подобие)

Координатные правила для простых преобразований



Таблица задаёт, как меняются координаты точки при стандартных преобразованиях на координатной плоскости.

Чтобы построить образ точки, достаточно подставить координаты в правило: знак меняется только в тех преобразованиях, где меняется ось или направление.

Преобразование	Правило для точки (x,y)
Перенос	$(x+a, y+b)$
Отражение об Ox	$(x, -y)$
Отражение об Oy	$(-x, y)$
Поворот на 180°	$(-x, -y)$

Сведения из школьного курса геометрии (координатный метод)



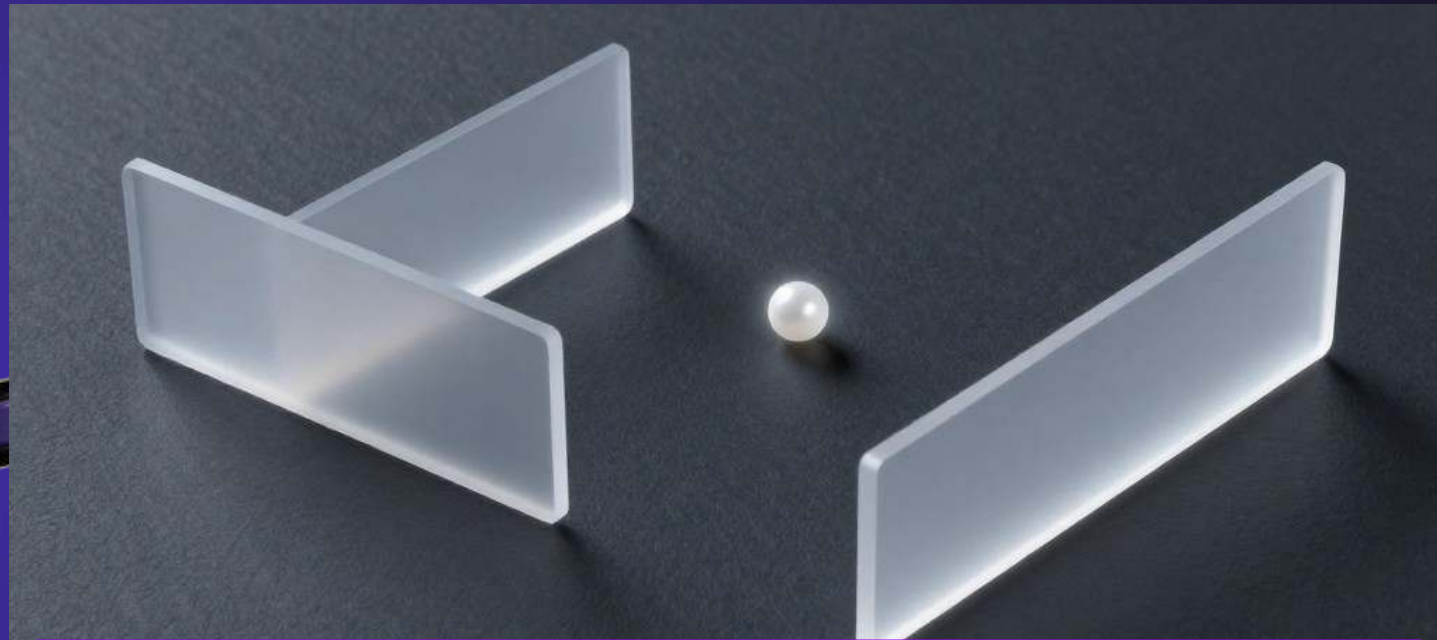
Если коэффициент гомотетии равен 2, каждая сторона образа вдвое больше соответствующей стороны исходной фигуры. Это и даёт подобие.

$$k = 2$$

При таком коэффициенте все длины увеличиваются ровно в два раза, а углы остаются теми же.

Определение гомотетии в школьной геометрии; пример для понимания ($k=2$).

Центральная симметрия: когда всё «поворачивается вокруг точки»



Параллелограмм с переворотом центра

Представьте параллелограмм и точку-центр внутри плоскости. Если повернуть фигуру на 180° вокруг центра, каждый вершинный «зеркальный» образ окажется на одинаковом расстоянии от центра, но с другой стороны. Благодаря этому новая фигура совпадает по форме, размерам и расположению сторон.

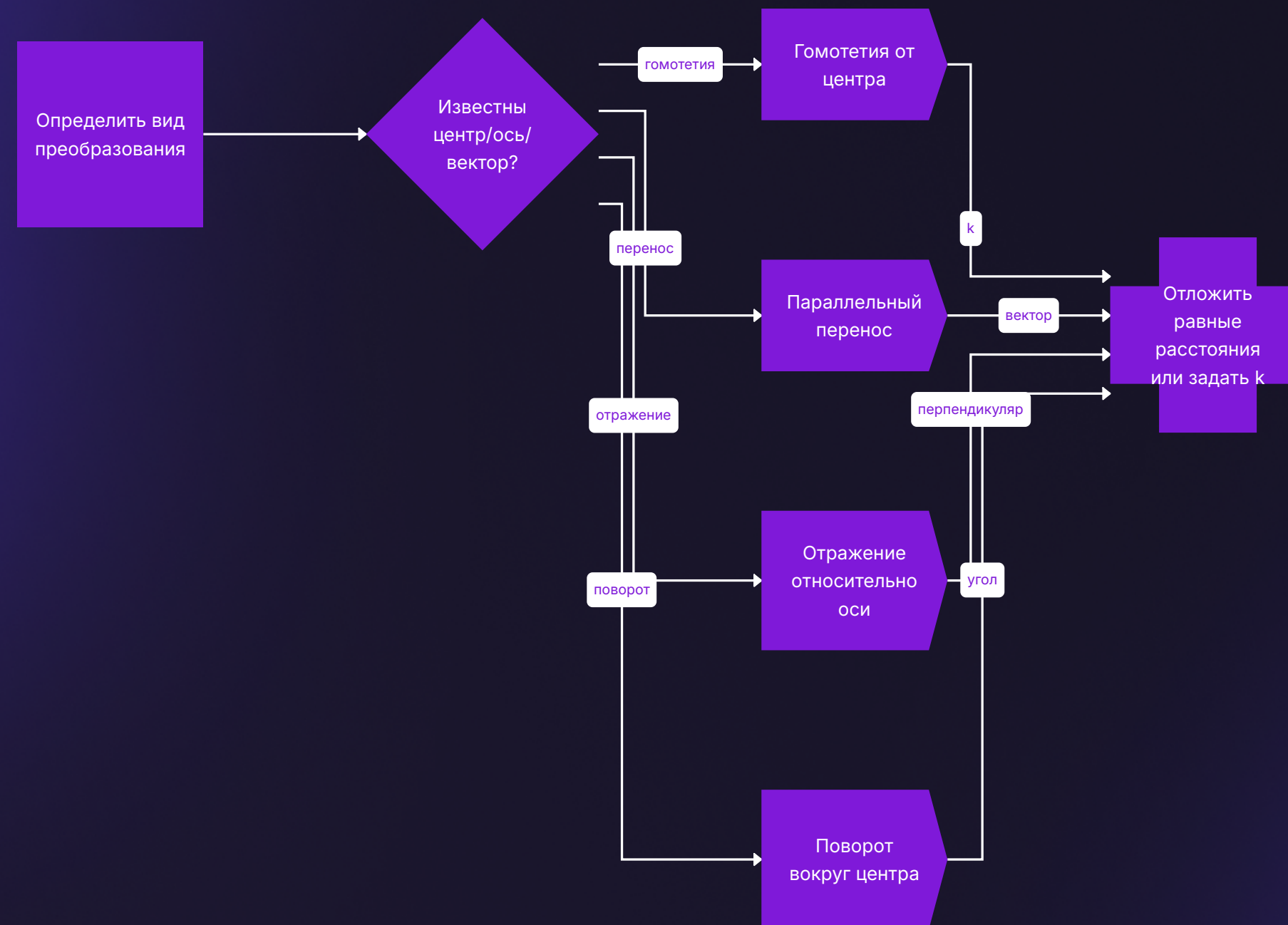


Окружность и орнамент, который не меняется

Окружность при центральной симметрии остаётся окружностью и сохраняет все точки на равных расстояниях от центра. В орнаментах часто видно, что элементы слева и справа относительно центра повторяют друг друга: один образуется поворотом на 180° . Поэтому композиция выглядит целостной даже после поворота.

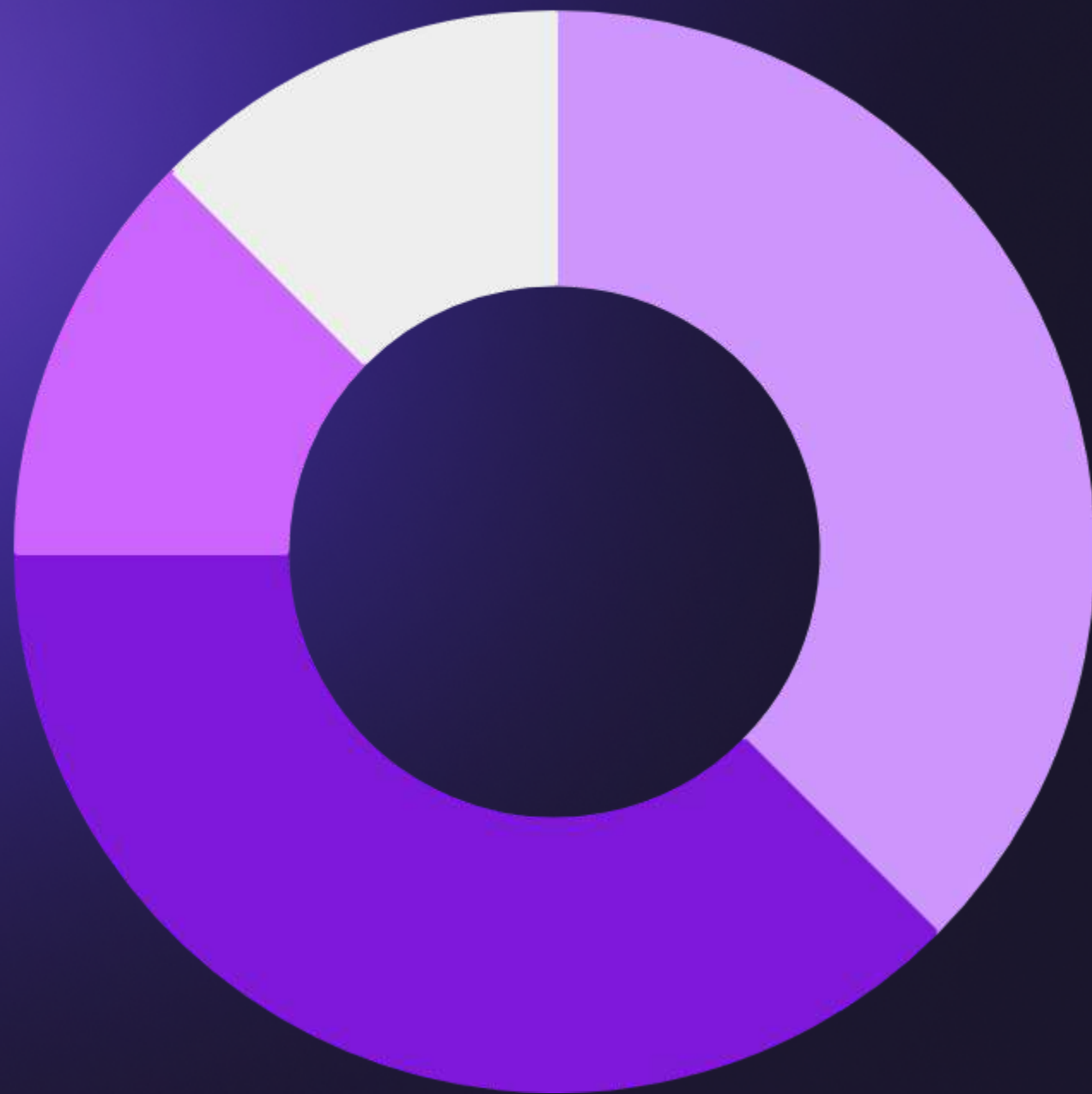
Построение образа при преобразовании

Общий алгоритм: выбираем тип преобразования и действуем по его геометрическим признакам.



Сравнение преобразований по ключевым признакам

Длина Угол Размер Ориентация



Параллельный перенос, поворот и отражение относят к движениям: они не искажают расстояния и углы. Поэтому форма остаётся «той же» только с новой позицией.

Диаграмма разделяет признаки: движения сильнее сохраняют геометрию, а гомотетия меняет масштабы, оставляя пропорции.

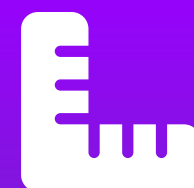
Учебная схема сравнения; условные значения отражают уровень сохранения признаков.

Где преобразования «работают» на практике



Логотипы и символы

Многие знаки строятся как набор симметричных частей. Центральная или осевая симметрия помогает располагать элементы так, чтобы композиция оставалась согласованной.



Масштабные схемы

Гомотетия используется, когда нужно изменить размер, но сохранить форму. Например, при построении модели по плану меняются длины, а углы остаются прежними.



Бордюры и плиточные узоры

Повторение одного и того же преобразования (перенос, поворот, отражение) создаёт ритм. Изображение выглядит аккуратно, потому что размеры и углы элементов сохраняются.



Чертежи на координатной сетке

Клетки и оси упрощают построение образов точек по правилам координат. Так удобно проверять, сохранились ли расстояния, параллельность и симметрия.

Типичные ошибки при преобразованиях

Ошибка	Что получится
Перепутан центр поворота	Образы точек окажутся на других расстояниях: форма «не совпадёт».
Неверная ось отражения	Симметрия нарушится: фигура окажется по другую сторону.
Ошибка в знаке координат	Поворот или отражение выполнится неверно: результат «поведёт» точки.
Разное смещение при переносе	Фигура теряет равенство: элементы разъедутся разными векторами.
Неправильный k в гомотетии	Нарушится подобие: пропорции станут неверными.

В таблице показаны частые промахи и их последствия: фигура теряет равенство, симметрию или подобие. Основная причина — невнимательное следование условию.

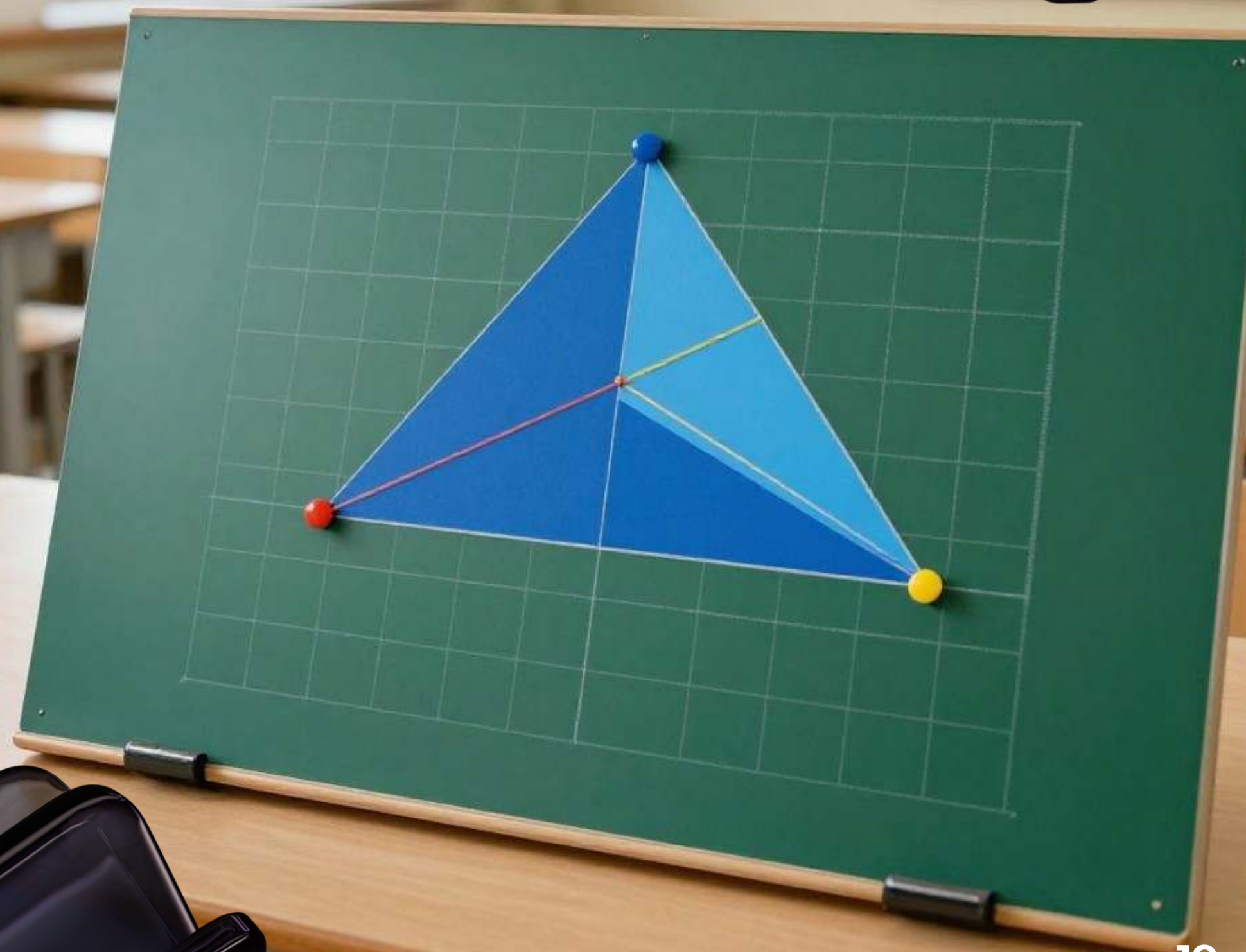
Почти все ошибки связаны с выбором параметров преобразования и переносом знаков в координатных правилах; проверка по расстояниям и пропорциям быстро выявляет их.

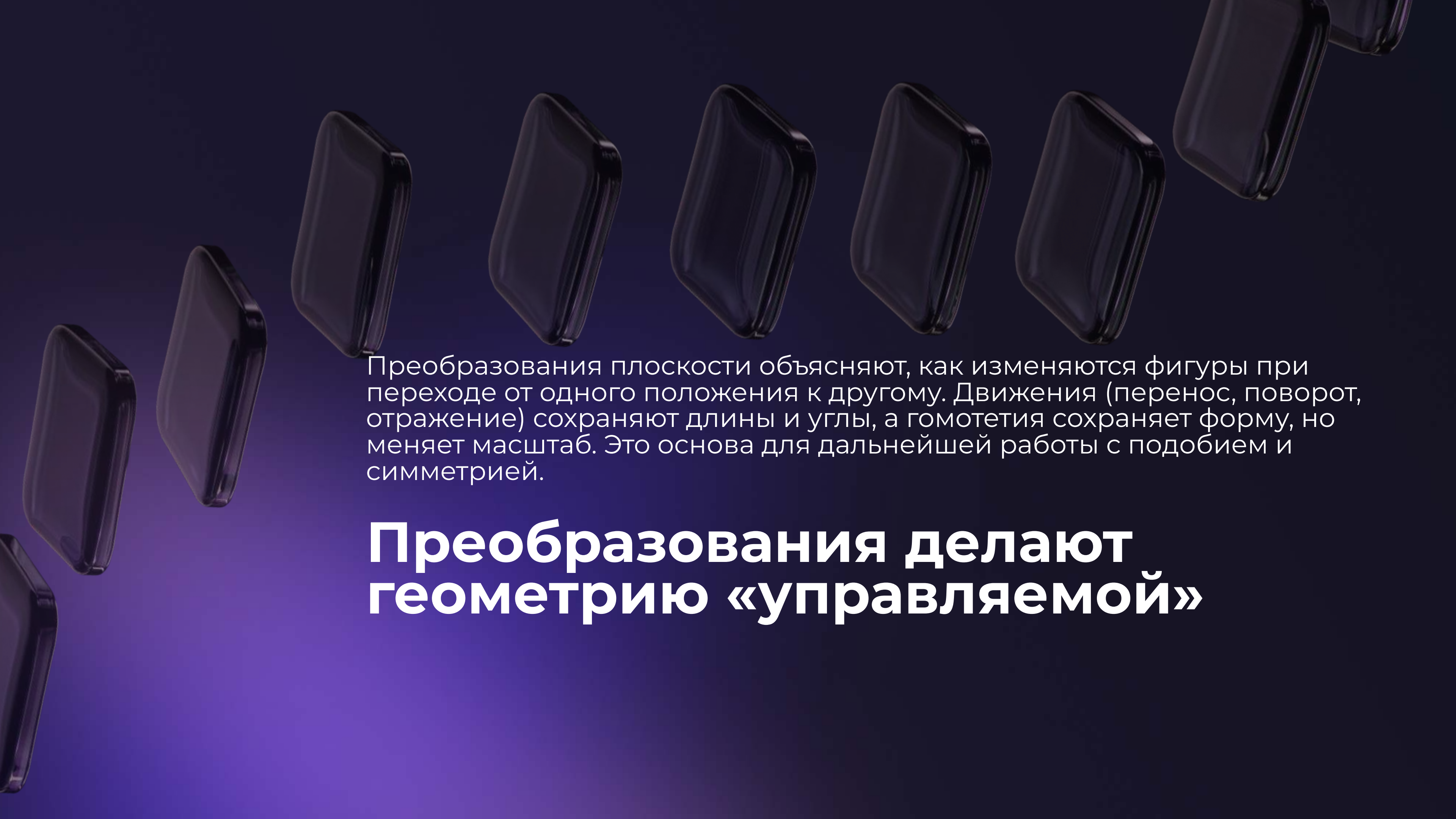
Школьная практика построений (типичные затруднения учащихся)

Проверка правильности построения

После построения сравнивают соответствующие точки: для движений расстояния между точками должны сохраниться, а сами фигуры должны совпадать при наложении. Удобно измерять отрезки между вершинами или отмечать их на сетке.

Для гомотетии отдельно проверяют пропорции: стороны образа должны отличаться во столько раз, во сколько задан коэффициент k . Также смотрят, сохраняются ли углы и общий «силуэт» подобной фигуры; координаты помогают быстро найти неточность.





Преобразования плоскости объясняют, как изменяются фигуры при переходе от одного положения к другому. Движения (перенос, поворот, отражение) сохраняют длины и углы, а гомотетия сохраняет форму, но меняет масштаб. Это основа для дальнейшей работы с подобием и симметрией.

**Преобразования делают
геометрию «управляемой»**