

Сложение вероятностей в школьной алгебре: основные правила и примеры



Разберём, когда вероятности складываются,
а когда нужно вычитать пересечение.



Зачем в 10 классе изучать сложение вероятностей

Это правило помогает находить вероятность события «хотя бы одно», оценивать случайные ситуации и решать задачи, где важно учитывать не только отдельные исходы, но и их общие части.



Случайный опыт, пространство исходов и событие

Случайный опыт

Это действие, результат которого заранее нельзя предсказать точно: бросок кубика, вытягивание карты или выбор ученика из списка. Важно лишь то, что исходы можно перечислить.

Пространство исходов

Так называют множество всех возможных результатов опыта. Например, для игрального кубика пространство исходов состоит из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Событие

Событием называют любое подмножество пространства исходов. Если нас интересуют, например, чётные числа, то событие включает исходы 2, 4 и 6, но не остальные.

Вероятность события

Вероятность $P(A)$ показывает, насколько событие возможно, и принимает значения от 0 до 1. При равновероятных исходах она равна отношению благоприятных исходов к общему числу исходов.

Как читать запись

Обозначения $A \cup B$, $A \cap B$ и противоположное событие помогают точно описывать условия задачи. Они нужны, чтобы не путать объединение событий с их одновременным выполнением.

Несовместные события и их признак



1

События не пересекаются

Несовместные события не могут произойти в одном и том же испытании. Если одно уже наступило, второе в этом же опыте исключается.

3

Признак через пересечение

Для несовместных событий пересечение пусто, то есть $A \cap B = \emptyset$. Это означает, что общих исходов у них нет и ничего вычитать не нужно.

2

Простой пример

При одном броске кубика события «выпало 2» и «выпало 5» несовместны: один и тот же результат не может одновременно быть двумя разными числами.

4

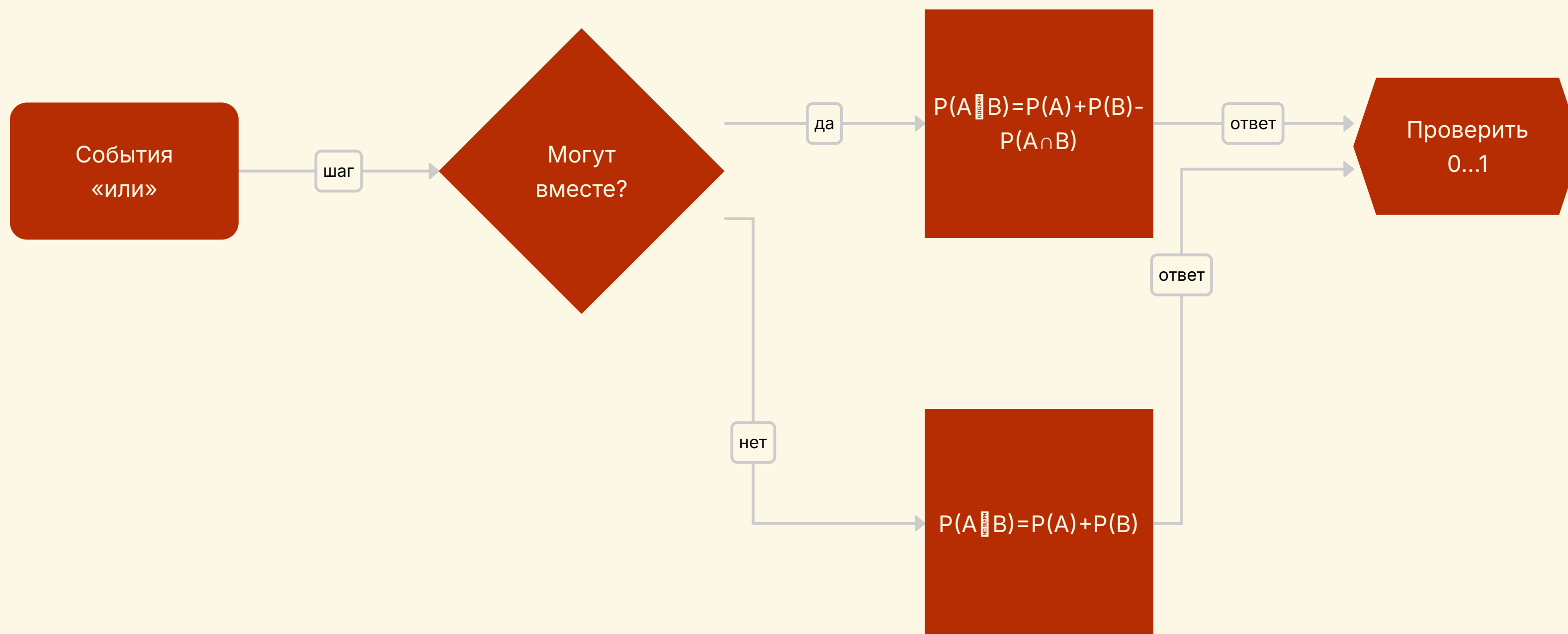
Следствие для формулы

В таком случае правило сложения упрощается: вероятность объединения равна сумме вероятностей отдельных событий. Это самый удобный вид формулы для первых задач.



Как выбрать формулу сложения вероятностей

Алгоритм для задач со словом «или» и проверкой совместимости событий



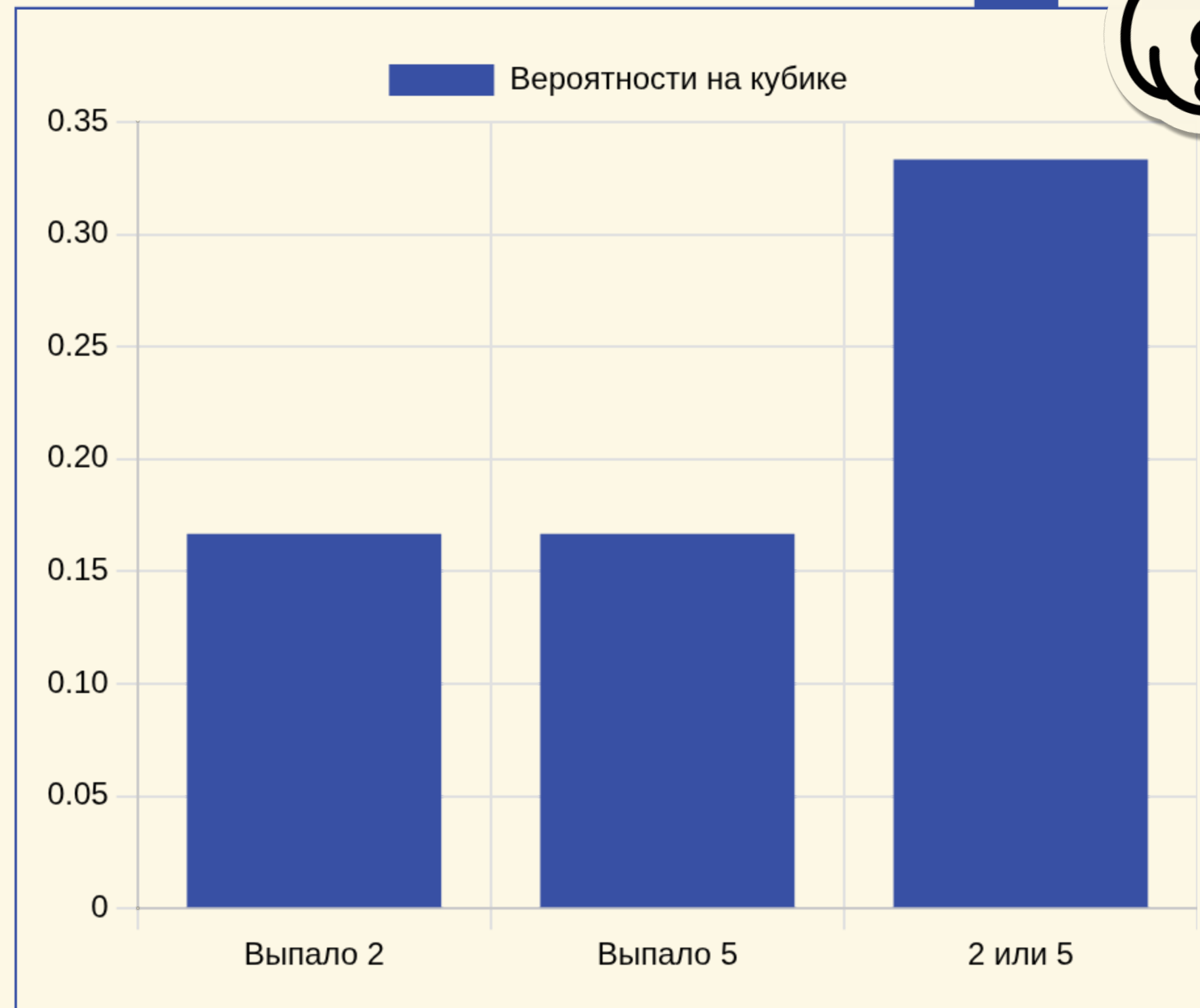
Пример на кубике: как складываются вероятности



Два исхода на кубике одинаково вероятны, поэтому сумма двух одиночных вероятностей совпадает с вероятностью их объединения.

Объединение несовместных событий равно сумме вероятностей: $1/6 + 1/6 = 2/6$.

Игральный кубик с шестью равновозможными исходами



$2/3$

— это вероятность
события «выпало чётное
число или 1» при броске
кубика.

Здесь пересечение отсутствует, поэтому
вероятность объединения равна простой сумме:
 $3/6$ и $1/6$ дают $4/6$, то есть $2/3$.

Равновозможные исходы игрального кубика



Совместимые события и пересечение

Могут совпасть

Совместимые события способны произойти одновременно в одном испытании. Это значит, что один и тот же исход может входить сразу в оба события.

Типичный пример

События «выпала красная карта» и «выпала дама» совместимы: красная дама одновременно является и красной картой, и дамой.

Опасность двойного счёта

Если просто сложить вероятности таких событий, общие исходы будут учтены дважды. Поэтому сумма сама по себе не даёт правильный ответ.

Зачем вычитать пересечение

Чтобы убрать повторный счёт общих исходов, из суммы вычитают вероятность пересечения. Именно это делает формулу точной для совместимых событий.

Пример с картами: красная карта, дама и красная дама

Таблица показывает, как работает формула для стандартной колоды из 52 карт.

Пересечение вычитается один раз, чтобы не считать красные дамы дважды; итоговая вероятность равна $7/13$.

Стандартная колода из 52 карт

Событие		Вероятность				Смысл								
A		1/2				красная карта								
B		1/13				дама								
A∩B		1/26				красная дама								
A∪B		7/13				A или B								

Общая формула сложения вероятностей

1 Универсальная запись

Для любых двух событий используют формулу $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Она корректно работает и для совместимых, и для несовместимых случаев.

2 Частный случай

Если события не могут произойти вместе, то пересечение равно нулю. Тогда общая формула сразу превращается в привычное правило сложения без вычитания.

3 Почему это важно

Эта запись позволяет избежать двойного счёта общих исходов и служит основной формулой для решения школьных задач на объединение событий.

Диаграмма Венна: объединение и пересечение событий

Область объединения

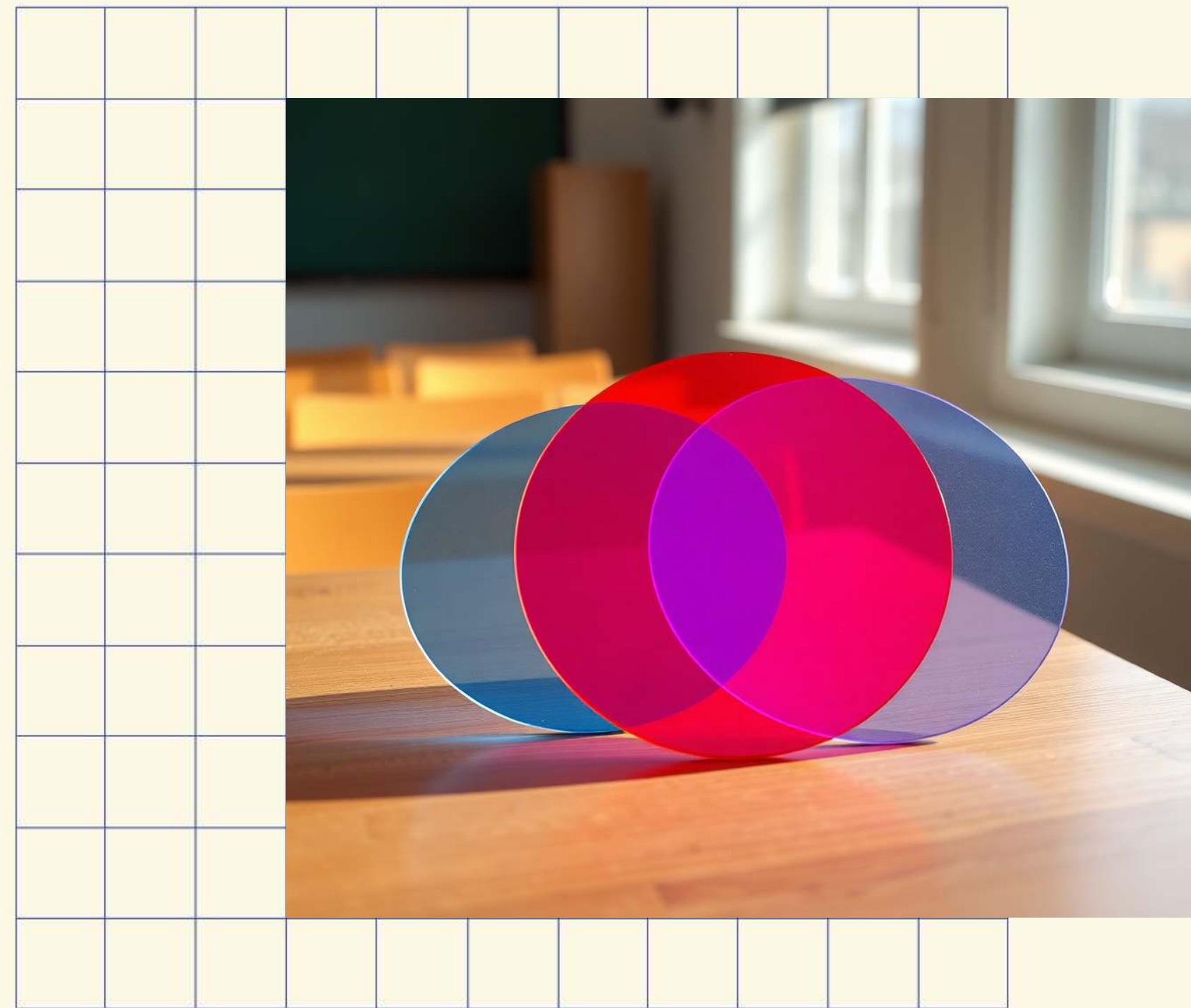
Объединение $A \cup B$ включает все исходы, которые попадают хотя бы в один из двух кругов. На диаграмме это вся закрашенная часть обоих множеств вместе с общей областью.

Пересечение событий

$A \cap B$ показывает исходы, удовлетворяющие сразу двум условиям. Именно эта центральная часть важна при совместимых событиях, потому что она учитывается в сумме вероятностей дважды.

Смысл вычитания

Если общую часть не вычесть, одно и то же событие будет посчитано два раза. Диаграмма Венна наглядно объясняет, почему в общей формуле появляется вычитание пересечения.



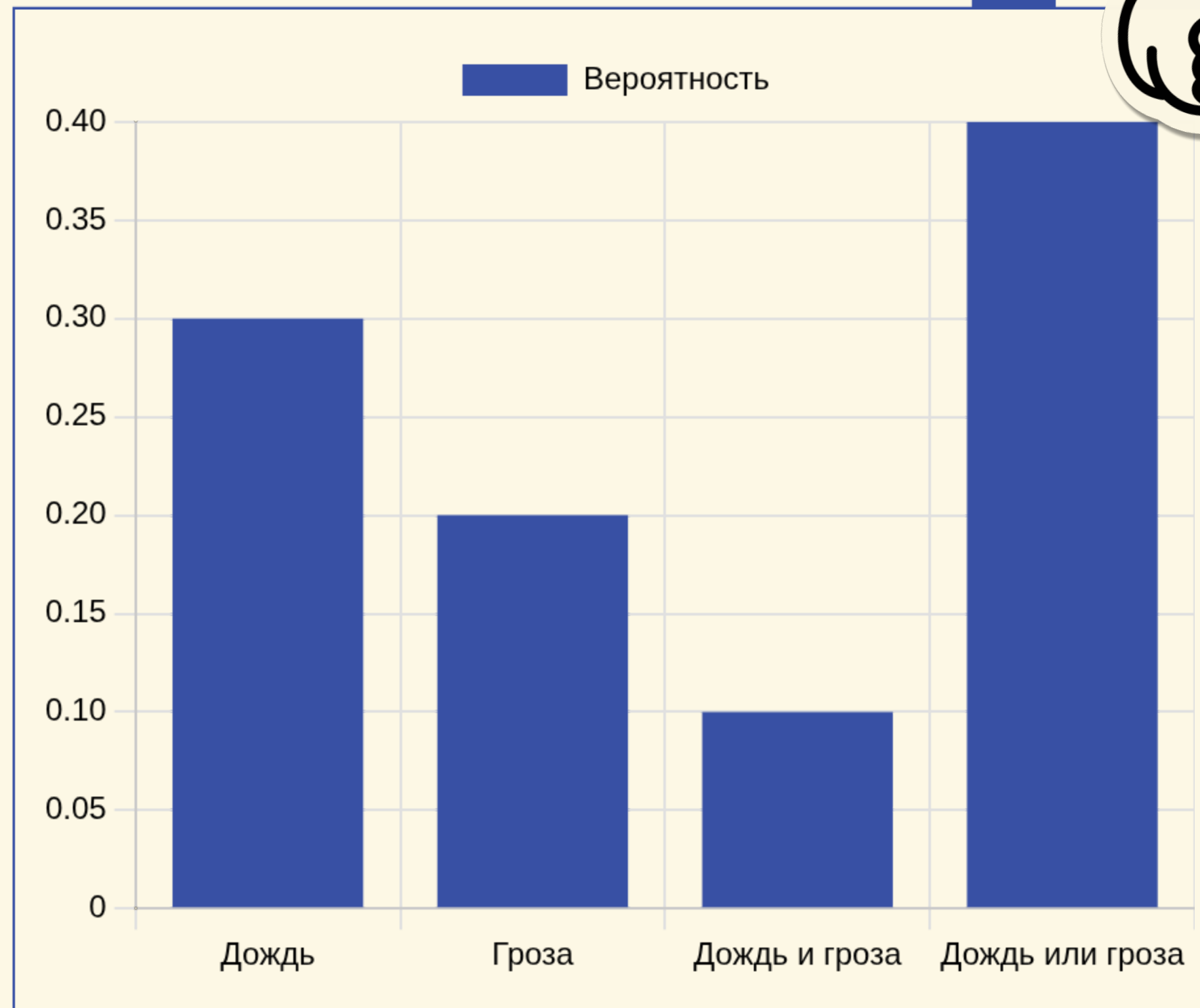
Погода как пример совместимых событий



Пример показывает, что «или» в вероятности означает объединение событий, а не простую сумму всех перечисленных случаев.

Общая вероятность меньше суммы отдельных вероятностей на величину пересечения, поэтому совместимые события требуют корректировки.

Условие задачи; значения заданы для учебного примера.



Сложение вероятностей для трёх событий



1 Запиши все события

Сначала выделяют три события, объединение которых требуется найти. Важно точно понимать, что означают A , B и C , иначе формула будет применена к неверным условиям.

2 Учи попарные пересечения

Затем вычитают $A \cap B$, $A \cap C$ и $B \cap C$, потому что эти области уже вошли в сумму отдельных вероятностей. Так устраняют повторный счёт общих исходов.

3 Верни общую часть

Область $A \cap B \cap C$ добавляют обратно, поскольку при вычитании попарных пересечений она была удалена слишком много раз. Это обеспечивает точный подсчёт объединения всех трёх событий.

4 Используй в задачах

Формула особенно полезна, когда нужно учесть несколько признаков одновременно: три варианта ответа, три группы учеников или три независимых условия в одной задаче.



Типичные ошибки при решении задач на сложение вероятностей

Таблица помогает быстро распознать наиболее частые сбои в рассуждении и проверить ответ по смыслу.

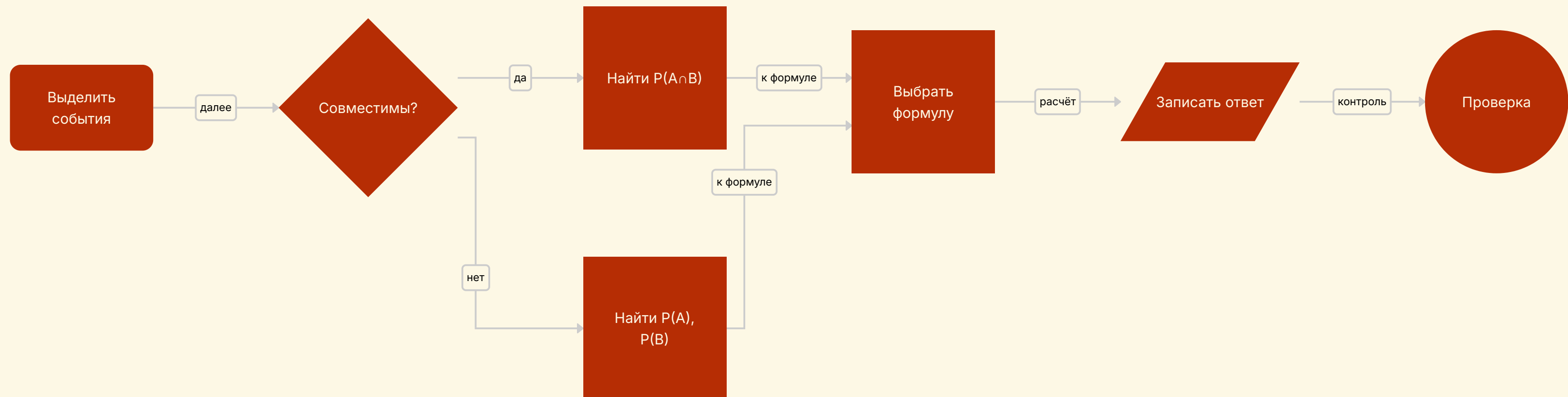
Большинство ошибок связано не с вычислениями, а с неверным пониманием операции объединения и пересечения; итог всегда нужно сверять с диапазоном от 0 до 1.

Правила школьного курса теории вероятностей

Ошибка	Как избежать
Не вычли пересечение	Проверь $A \cap B$
Путаница $A \cup B$ и $A \cap B$	Смотри на смысл

Как решать задачи на событие «или»

Последовательность действий для выбора правильной формулы сложения вероятностей.



Учебная ситуация: вероятность выполнить одно или оба дела



Проект и контрольная в один день

Ученик планирует сдать проект сегодня, а затем успеть на контрольную работу. Вероятности каждого дела известны, как и вероятность выполнить оба. Это позволяет посчитать шанс успеть хотя бы с одним обязательным заданием без лишних перечислений.

Когда расписание перегружено

В другой день дела могут пересекаться по времени: подготовка к уроку, сдача работы и дополнительные задания. Иллюстрация с дневником или расписанием помогает увидеть, что формула объединения применима не только в абстрактных задачах, но и в реальной учебной нагрузке.

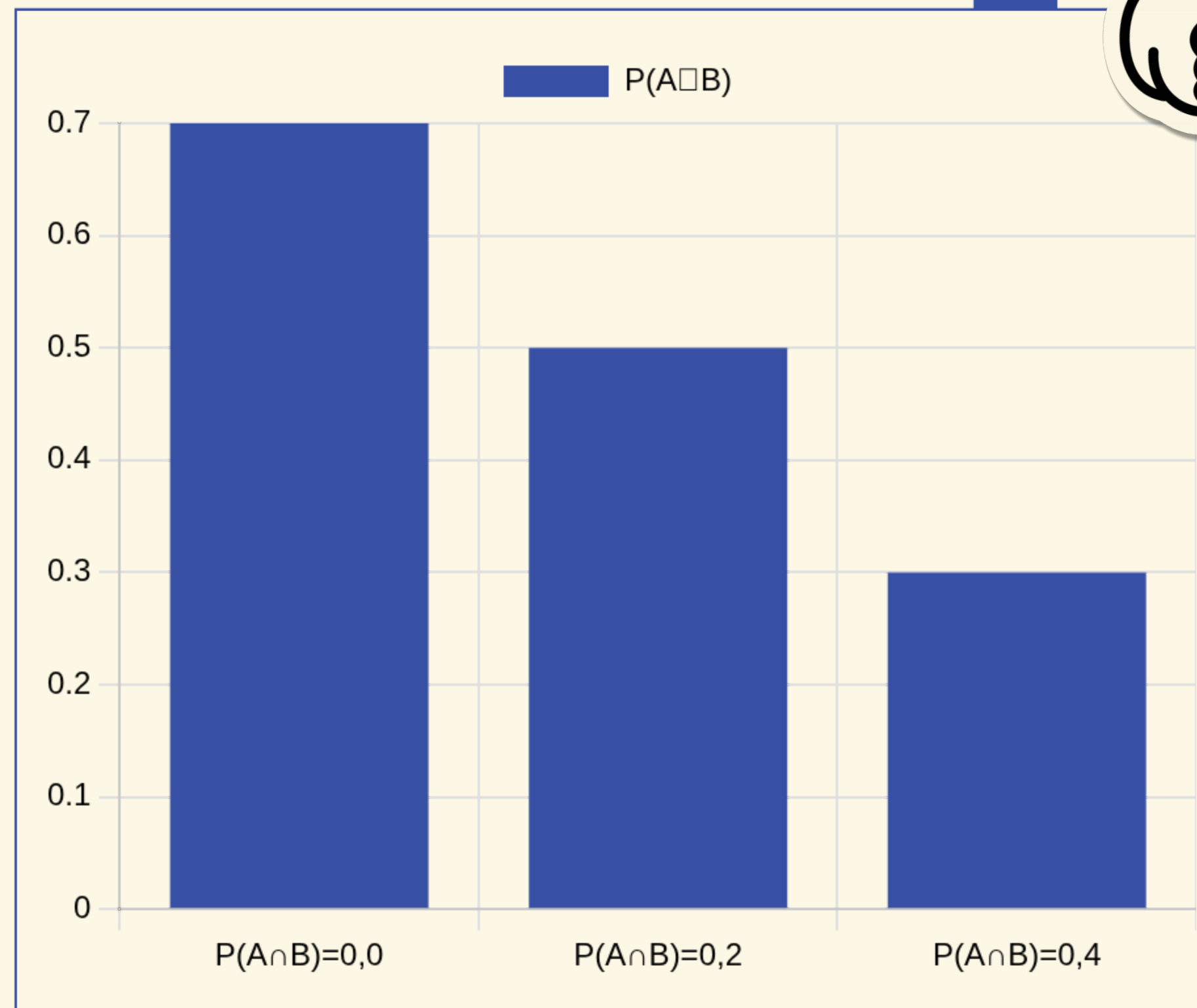
Как пересечение влияет на итоговую вероятность



При фиксированных $P(A)$ и $P(B)$ меняется только величина общей части, поэтому удобно сравнивать случаи на одном графике.

Чем больше пересечение, тем меньше объединение: общие исходы уменьшают итоговую вероятность ровно на величину $P(A \cap B)$.

Условные значения заданы в учебном примере.



Противоположное событие как удобный способ счета



Считать через дополнение

Если прямой подсчёт события «хотя бы одно» слишком громоздкий, находят вероятность противоположного события «ни одно», а затем вычитают её из единицы.



Меньше перечислений

Этот приём особенно полезен, когда вариантов много и легко ошибиться в сумме. Вместо длинного списка благоприятных исходов достаточно посчитать один более простой случай.



Надёжная проверка

Способ через противоположное событие часто снижает риск арифметических ошибок. Он помогает быстрее получить ответ и проверить, согласуется ли он с условием задачи.

Проверка ответа и смысловая интерпретация

Диапазон вероятности

Любой результат должен лежать между 0 и 1. Если число выходит за эти пределы, в формуле, дробях или определении события допущена ошибка, которую нужно найти и исправить.

Смысл величины

Значение, близкое к 1, означает почти неизбежное событие; значение, близкое к 0, указывает на редкий случай. Такая интерпретация помогает почувствовать правдоподобность ответа.

Проверка пересечения

Если событие совместимое, важно убедиться, что пересечение учтено только один раз. Иначе ответ получится завышенным и не будет соответствовать смыслу объединения.

Самоконтроль решения

После вычислений полезно перечитать условие и проверить, верно ли выделены события. Этот быстрый шаг часто помогает заметить путаницу между «или», «и» и противоположным событием.



Итог урока: правило сложения вероятностей

Сегодня вы увидели, как объединять вероятности для несовместимых и совместимых событий, когда можно просто сложить, а когда нужно вычесть пересечение. Это базовый инструмент для решений в 10 классе.

