

Область определения и множество значений в тригонометрии

Разберём, где тригонометрические функции определены и какие значения принимают.



Зачем изучать тригонометрические функции

- Тригонометрия связывает угол, положение точки на окружности и форму графика. Чтобы уверенно решать задачи, нужно различать: где выражение имеет смысл и какие значения оно может принимать.



ОДЗ и множество значений: две разные идеи

1. Сначала — допустимость

Область определения отвечает на вопрос, при каких x формула допустима. Если выражение содержит только $\sin$ или $\cos$, ограничений по x нет; если есть дробь, проверяют знаменатель.

2. Потом — диапазон

Множество значений описывает все возможные y , которые может выдавать функция. У базовых $\sin x$ и $\cos x$ диапазон ограничен от -1 до 1 , что удобно помнить заранее.

3. Где возникают запреты

У тангенса, котангенса, $\sec$ и $\csc$ появляются запреты, связанные с нулём в знаменателе. Поэтому для них важно не только вычислить формулу, но и проверить, не возникает ли деление на ноль.

Единиичная окружность и смысл $\sin$, $\cos$

Координаты точки

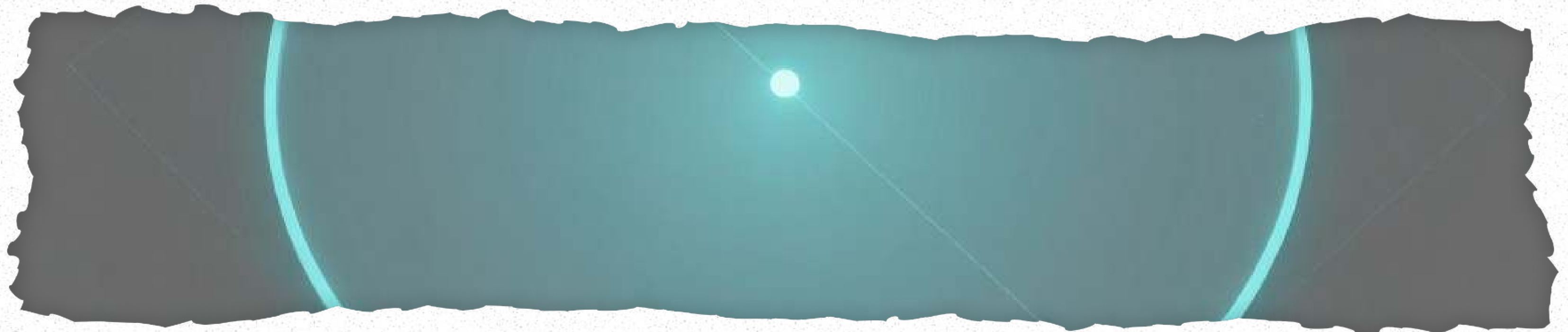
На единичной окружности точка, соответствующая углу x , имеет координаты $(\cos x, \sin x)$. Это делает обе функции геометрически наглядными и позволяет сразу видеть их связь с положением точки.

Почему значения ограничены

Так как любая точка окружности лежит внутри квадрата со стороной 2, значения $\sin x$ и $\cos x$ не выходят за пределы от -1 до 1 . Именно этим объясняется их ограниченный диапазон.

Где они определены

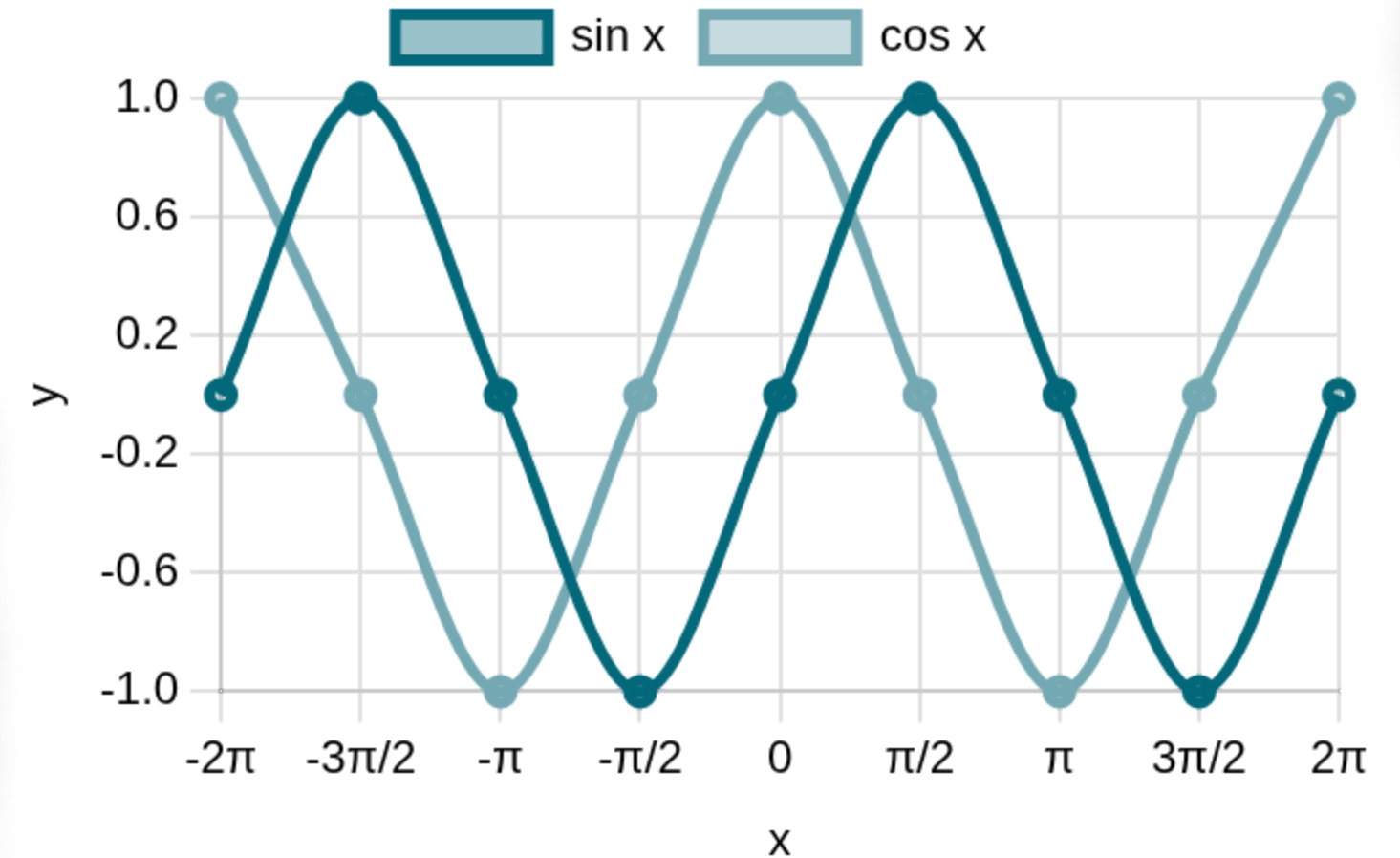
Для любого угла x на окружности существует и $\cos x$, и $\sin x$. Поэтому у этих функций область определения совпадает со всей числовой прямой, без исключений и особых точек.



Диапазон $\sin$ и $\cos$ по графику

Колебания видны одинаково чётко на обоих графиках: они симметричны относительно оси x .

Оба графика принимают только значения от -1 до 1 и повторяются с периодом 2π .



Стандартные свойства графиков $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Как $kx+b$ влияет на график и ограничения

Преобразование аргумента

Запись $y=f(kx+b)$ изменяет только аргумент функции: график сжимается или растягивается по горизонтали и затем смещается. Для $\sin x$ и $\cos x$ это не создаёт новых запретов по x .

ОДЗ не сужается

Если исходная функция определена при всех x , как $\sin$ и $\cos$, то после замены $kx+b$ область определения остаётся всей $\mathbb{R}$. Меняются лишь положение и частота повторения волны.

Запреты сдвигаются

Для $\tan$ и $\cot$ замена аргумента переносит точки, где знаменатель обращается в ноль. Поэтому сначала находят новые запрещённые x , а уже потом строят график и анализируют его поведение.

Сжатие по горизонтали

Чем больше $|k|$, тем ближе друг к другу расположены одинаковые элементы графика. Это особенно заметно у функций с периодом π , где нули и асимптоты тоже сближаются.

Тангенс как отношение $\sin$ и $\cos$

1. Определение через дробь

Тангенс вводят как отношение $\sin x$ к $\cos x$. Из-за этого он определён только там, где $\cos x$ не обращается в ноль, иначе возникает деление на ноль.

2. Точки запрета

Нули $\cos x$ имеют вид $x = \pi/2 + \pi n$, где n — целое число. Именно эти точки нужно исключить из области определения тангенса, а при замене аргумента — пересчитать заново.

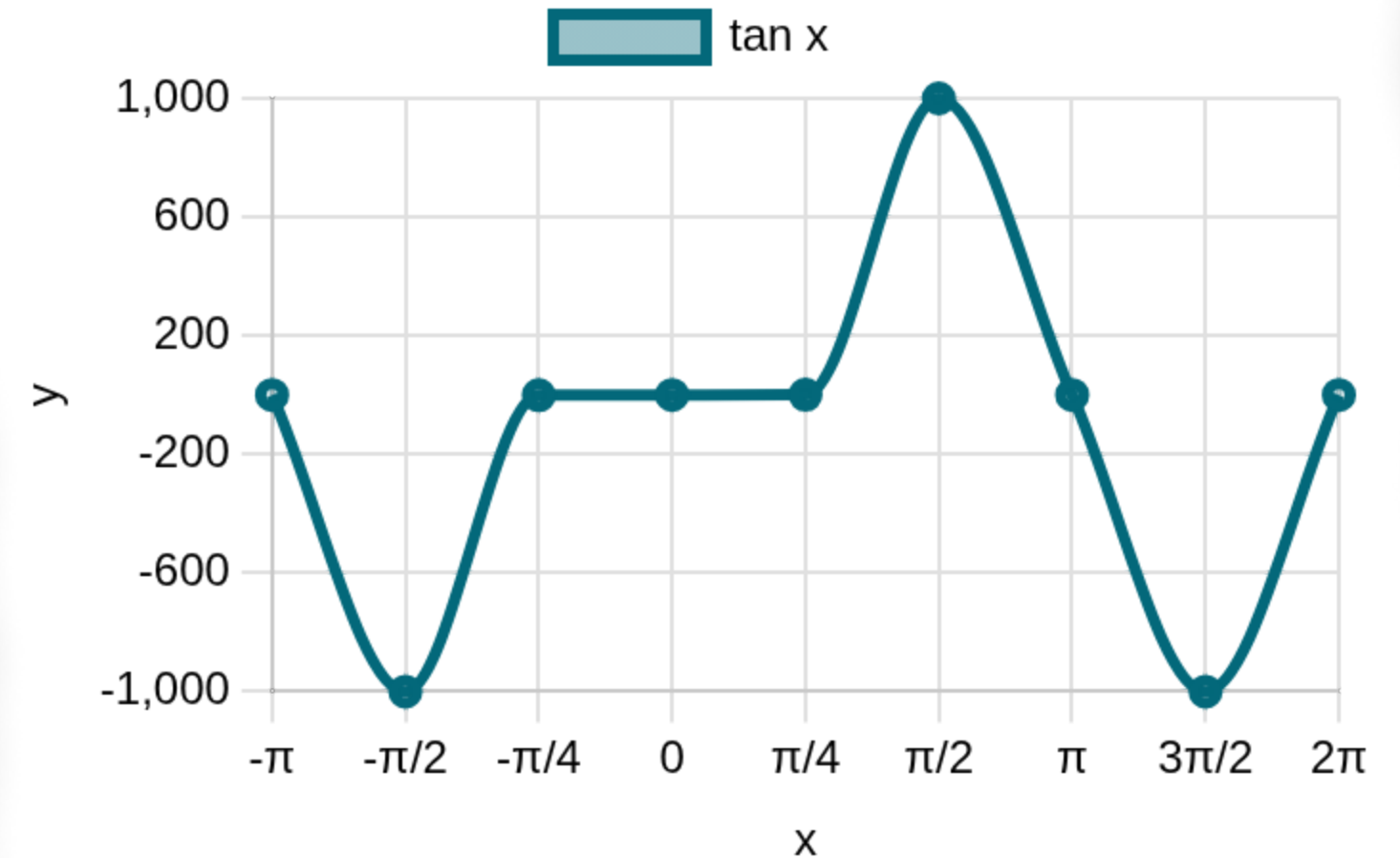
3. Как решать примеры

Для выражения $y = \tan(2x - \pi/3)$ сначала рассматривают аргумент $2x - \pi/3$ и находят, когда $\cos(2x - \pi/3) = 0$. Это удобный и надёжный порядок действий при любых похожих задачах.

График $\tan$ и его значения

Между асимптотами каждая ветвь $\tan x$ проходит через ноль и быстро возрастает.

Тангенс принимает любые действительные значения и повторяется с периодом π , разрываясь в точках $\cos x = 0$.



Стандартные свойства графика $y = \tan x$

Котангенс: условие на $\sin x$

Определение и ОДЗ

Котангенс задаётся отношением $\cos x$ к $\sin x$, поэтому он существует только при $\sin x \neq 0$. Это главное условие области определения, которое нельзя пропускать при решении задач.

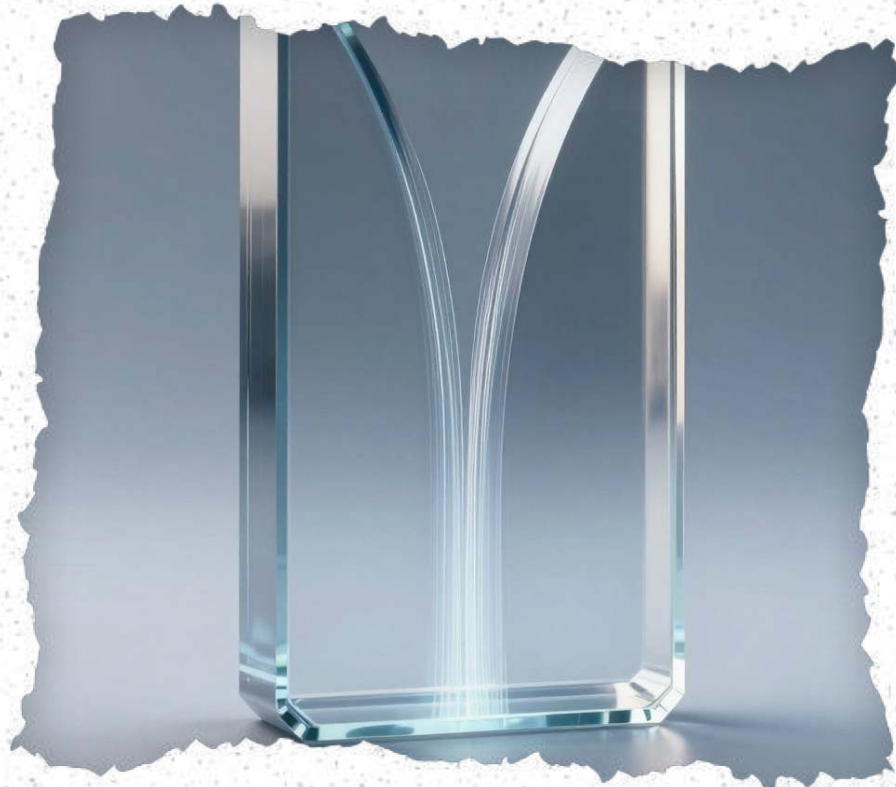
Где стоят асимптоты

Нули $\sin x$ расположены в точках $x = \pi n$, где n — целое число. В этих точках график котангенса имеет вертикальные асимптоты, а между ними проходит непрерывными ветвями.

Диапазон и период

Как и тангенс, котангенс имеет период π и может принимать любые действительные значения. Это делает его удобным для сравнения с тангенсом, но с другим набором запрещённых точек.

Sec и csc как обратные тригонометрические



Почему они выделяются

Функции $\sec x$ и $\csc x$ вводят как обратные к $\cos x$ и $\sin x$ соответственно. Они сразу показывают, что если знаменатель приближается к нулю, значение быстро уходит по модулю вверх и остаётся вне интервала между -1 и 1 .

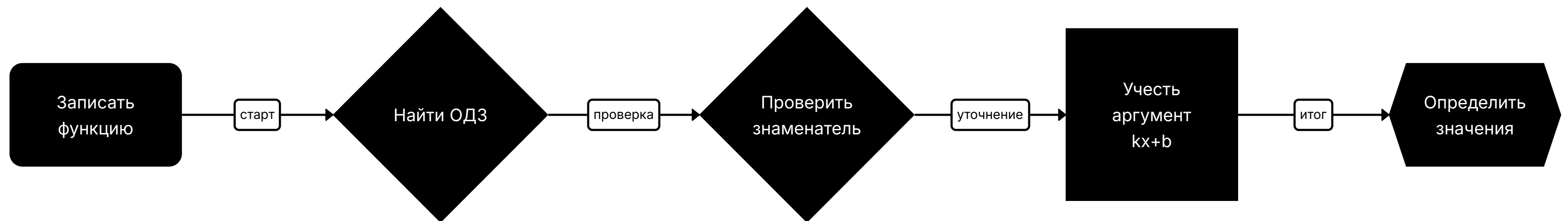


Ограничения и значения

Для $\sec x$ запрещены те же значения x , что и для $\cos x$, то есть точки, где $\cos x = 0$. Для $\csc x$ исключаются нули $\sin x$. Поэтому их множество значений состоит из двух неограниченных лучей: $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

Алгоритм: от ОДЗ к множеству значений

Последовательность действий для $\sin(kx+b)$, $\cos(kx+b)$, $\tan(kx+b)$ и $\cot(kx+b)$



Типовые преобразования: быстрые ответы

Быстрые ответы для типовых преобразований

У $\sin$ и $\cos$ линейный аргумент не меняет ОДЗ, а у $\tan$ и $\cot$ точки запрета просто смещаются и масштабируются.

Функция	ОДЗ	Множество значений
$\sin(3x-\pi/2)$		$[-1; 1]$
$\cos(2x+1)$		$[-1; 1]$
$\tan(5x)$	$x \neq \pi/10 + \pi n/5$	
$\cot(2x-\pi)$	$x \neq \pi n/2 + \pi/2$	

Стандартные свойства тригонометрических функций и их преобразований

Дробь и сдвиги: три ключевых примера

1. Обратная дробь

Для функции $y=1/\cos x$ сначала ищут, где $\cos x$ обращается в ноль. Именно там выражение не определено, а все остальные точки допустимы. Значения лежат вне интервала $(-1; 1)$.

2. Сокращение к тангенсу

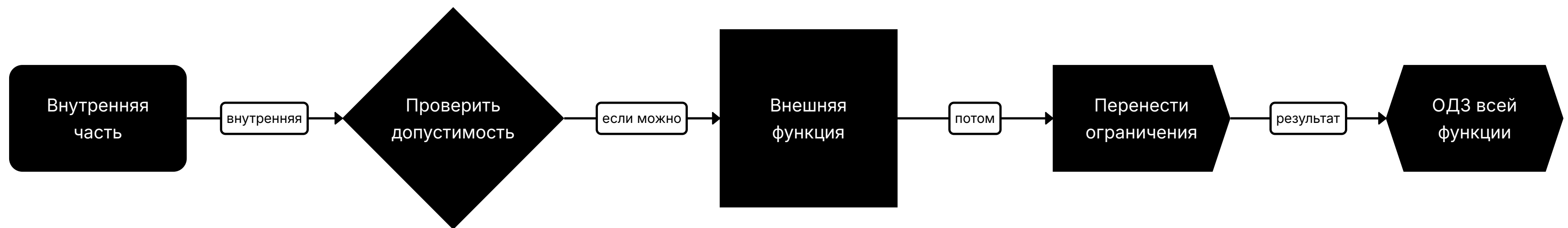
Если записать $y=\sin x/\cos x$, формально это отношение двух функций, но по определению оно совпадает с $\tan x$. Поэтому область значений остаётся всей $\mathbb{R}$, а ограничения задаёт $\cos x \neq 0$.

3. Сдвиг по y

В выражении $y=\tan(2x)+3$ прибавка 3 лишь сдвигает график вверх. ОДЗ при этом не меняется: нужно исключить точки, где $\cos(2x)=0$, а не анализировать сам сдвиг.

Составная функция: порядок проверки

Сначала анализируется аргумент, затем формула снаружи



От диапазона к решению

Шаг 1. Диапазон

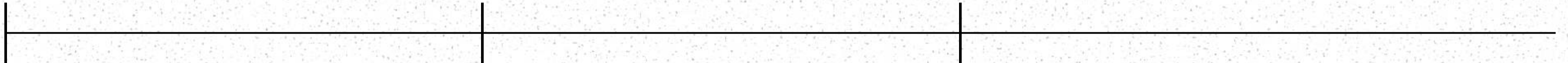
Сначала определяют, какие значения вообще могут принимать $\sin x$ и $\cos x$: только от -1 до 1 . Это сразу задаёт границы для любых неравенств.

Шаг 2. Сравнение

Затем сравнивают правую часть с этим интервалом. Если число лежит внутри него, решения возможны; если выходит за пределы, ответ пуст.

Шаг 3. Ответ

После этого описывают множество решений по периодичности функции. Так, $\cos x > \frac{1}{2}$ имеет бесконечно много ответов, а $\sin x \geq 2$ не имеет ни одного.



Типовые ошибки при решении

1. Путаница понятий

ОДЗ отвечает на вопрос, где функция определена, а множество значений — какие числа она может принимать. Эти два множества нельзя подменять друг другом, даже если график выглядит знакомо.

2. Забытый знаменатель

В дробных тригонометрических выражениях нули знаменателя запрещены всегда. Пропуск хотя бы одной такой точки ведёт к неверному ответу, особенно в задачах с $\tan$, $\cot$, $\sec$ и $\csc$.

3. Сдвиг по u

Вертикальный сдвиг вида $+3$ или -2 не расширяет ОДЗ. Он меняет только значения функции, но не устраняет и не создаёт запретов в аргументе.

4. Неверный перенос

При замене $x \rightarrow kx+b$ запреты не исчезают, а переходят в новые точки на оси x . Их нужно находить заново, а не копировать без пересчёта.

5. Период π

У $\tan$ и $\cot$ период равен π , поэтому асимптоты и точки запрета повторяются чаще, чем у $\sin$ и $\cos$. Если это забыть, легко пропустить целые семейства решений.

Мини-таблица: функция, ОДЗ, значения

Функция	ОДЗ	Значения
$\sin x$		$[-1; 1]$
$\cos x$		$[-1; 1]$
$\tan x$	$x \neq \pi/2 + \pi n$	
$\cot x$	$x \neq \pi n$	
$1/\cos x$	$x \neq \pi/2 + \pi n$	$(-\infty, -1] \quad [1, \infty)$

Основные свойства тригонометрических функций

Краткая сводка по базовым функциям

Синус и косинус ограничены единичной окружностью, а дробные и отношения функций дают исключения в точках нулевого знаменателя.

Самостоятельная работа: уровень 1

Задание 1

Для $y = \cos(4x + \pi/6)$ линейный аргумент не влияет на допустимость значений: ОДЗ остаётся $\mathbb{R}$, а множество значений — $[-1; 1]$. Проверьте, как это связано с графиком косинуса.

Задание 2

Для $y = 1/\sin(x - \pi/4)$ сначала находят нули $\sin(x - \pi/4)$, потому что именно они запрещают выражение. Затем фиксируют значения: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Самостоятельная работа: уровень 2

1. Задание 3

В выражении $y = \tan(2x) - 1$ сдвиг на -1 не меняет область определения, а только смещает график по вертикали. Запреты задаёт $\cos(2x) \neq 0$, поэтому множество значений остаётся $\mathbb{R}$.

2. Задание 4

Функцию $y = (\sin x) / (\cos x) + 2$ удобно сначала упростить до $\tan x + 2$. Тогда ОДЗ определяется условием $\cos x \neq 0$, а значения снова охватывают всю $\mathbb{R}$.

Главный вывод: сначала область, потом значения

Чтобы уверенно решать такие задачи, держите три опоры:
сначала находите ОДЗ, затем определяйте диапазон
по окружности или графику, а преобразования аргумента
анализируйте отдельно от сдвигов по y .