

Делимость нацело и её свойства

Как делимость помогает считать быстрее, проверять ответы
и находить закономерности?

Где делимость встречается каждый день

Делимость нужна не только в алгебре: она помогает делить числа без остатка, сокращать дроби, находить НОД и НОК, а также решать бытовые задачи про группы, упаковки и расписания.



Определение делимости нацело

Делитель числа

- 2** Если a делится на b , то число b называют делителем числа a . Это значит, что b входит в состав a как множитель и позволяет получить исходное число умножением.

Без остатка

- 4** Деление без остатка означает, что после деления ничего не остаётся: остаток равен 0. Именно это и показывает запись $a : b = k$, когда k — натуральное число.

Запись делимости

- 1** Число a делится нацело на b , если существует натуральное число k , для которого $a = b \cdot k$. Тогда деление выполняется без остатка, а результат тоже является натуральным числом.

Кратное числа

- 3** В этой же ситуации число a называют кратным числа b . Любое кратное получается умножением b на натуральное число, поэтому кратных у каждого числа бесконечно много.

Делители и кратные на примере числа 12

Все делители

У числа 12 делители легко перечислить: 1, 2, 3, 4, 6 и 12. Каждый из них делит 12 без остатка и образует с ним точную пару множителей.

Первые кратные

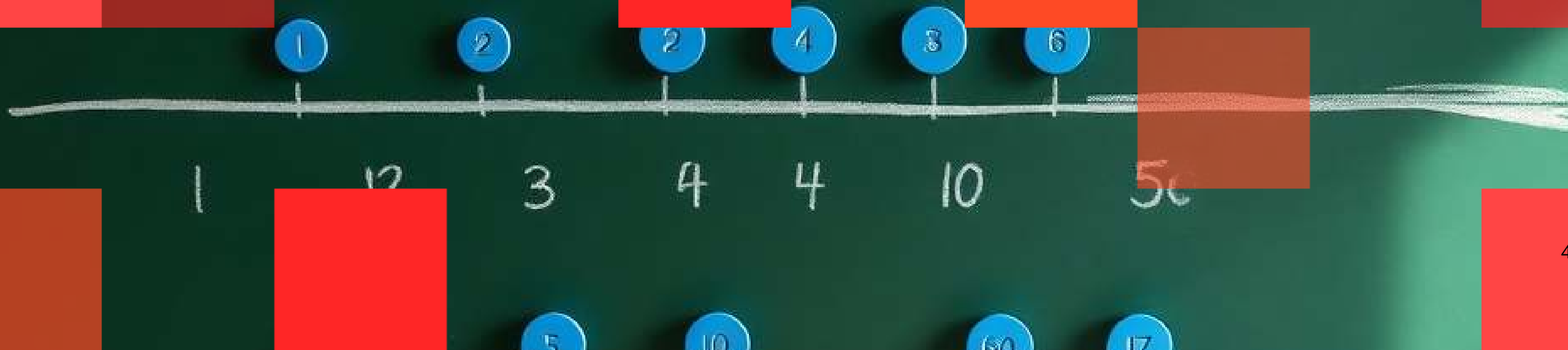
Кратные числа 12 удобно получать по порядку: 12, 24, 36, 48, 60. Каждое следующее число отличается на 12, потому что оно получается умножением на натуральное число.

Пары множителей

Для 12 можно составить пары множителей: 1 и 12, 2 и 6, 3 и 4. Такие пары помогают быстрее находить делители и проверять, не пропущено ли число.

Шаг на прямой

На числовой прямой кратные 12 располагаются через одинаковый промежуток. Это наглядно показывает повторение шага и помогает увидеть связь между делителями и произведением.



Сравнение делителей разных чисел

Сравним несколько чисел по числу делителей и увидим, как устроены простые и составные числа.

Составные числа обычно имеют больше двух делителей, а простые — только два.

Составлено по определению делителей натуральных чисел

Число	Делители	Кол-во
8	1,2,4,8	4
12	1,2,3,4,6,12	6
15	1,3,5,15	4
18	1,2,3,6,9,18	6

Основные свойства делимости

1

Переход к делителю

Если a делится на b , а b делится на c , то a делится на c . Это свойство позволяет сразу делать вывод о делимости через уже известный делитель.

2

Делимость произведения

Если число a делится на b , то произведение $a \cdot m$ тоже делится на b при любом натуральном m . Значит, умножение сохраняет делимость и не нарушает её.

3

Общее кратное

Если a делится на b и на c , то a является общим кратным этих чисел. Такое свойство удобно, когда нужно сравнить несколько делителей одного и того же числа.

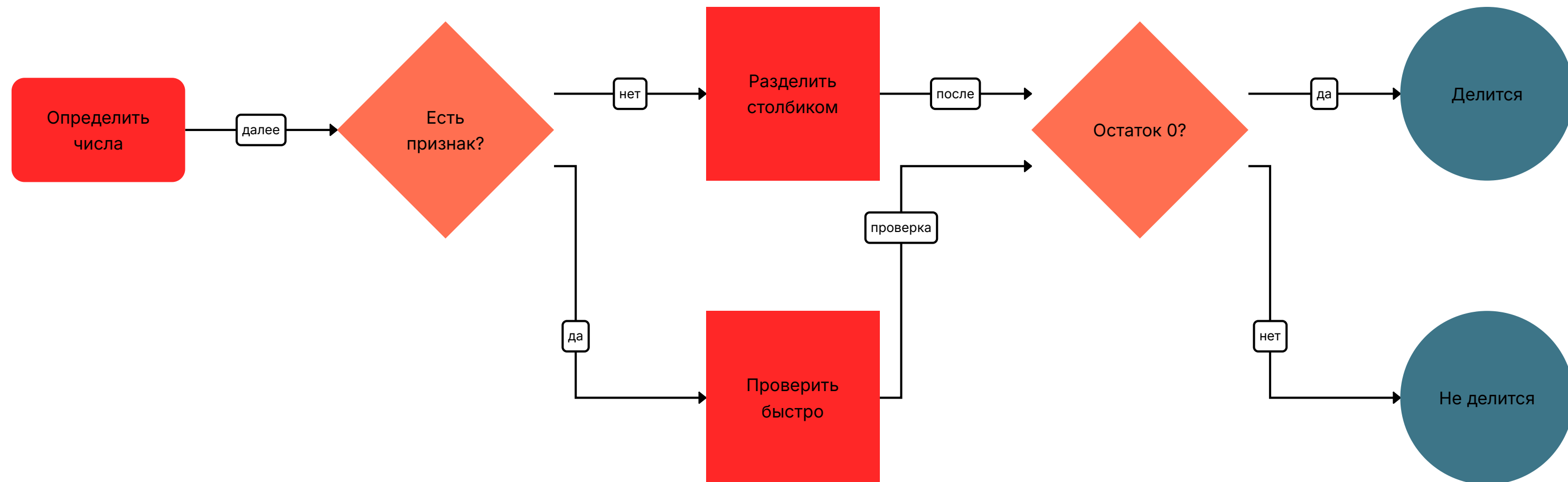
4

Связь с множителями

Если число делится на один из своих делителей, оно делится и на все делители, входящие в его разложение на множители. Это помогает быстрее проверять вычисления.

Как проверить делимость нацело

Схема проверки числа по признаку делимости и делению с остатком



Признаки делимости и их удобство

Признаки на 2, 5 и 10 опираются на последнюю цифру, а признаки на 3 и 9 — на сумму цифр.

Проверки по последней цифре обычно быстрее, но признаки на 3 и 9 дают более глубокую проверку числа.

Сводка школьных признаков делимости

Признаки делимости на 2, 5 и 10

На 2

На 2 делятся все чётные числа. Достаточно посмотреть на последнюю цифру: если она 0, 2, 4, 6 или 8, число делится на 2 без полного деления.

На 10

На 10 делятся только числа с последней цифрой 0. Такой проверкой часто пользуются при работе с деньгами, измерениями и округлёнными значениями.

На 5

На 5 делятся числа, которые оканчиваются на 0 или 5. Этот признак особенно удобен, когда нужно быстро выбрать числа в списке или проверить ответ.

Признаки делимости на 3 и 9

Правило для 3

- 1 Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Например, у 483 сумма цифр равна 15, а 15 делится на 3, значит и 483 делится на 3.

Правило для 9

- 2 Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9. У числа 729 сумма цифр 18, а 18 делится на 9, значит число тоже делится на 9.

Связь двух признаков

- 3 Если число делится на 9, то оно обязательно делится и на 3. Это происходит потому, что каждое число, делящееся на 9, делится и на 3.

Удобная проверка

- 4 Чтобы не ошибиться, сначала находят сумму цифр, а потом проверяют её делимость. Такой способ помогает быстро анализировать большие числа без письменного деления.

Почему работают признаки делимости



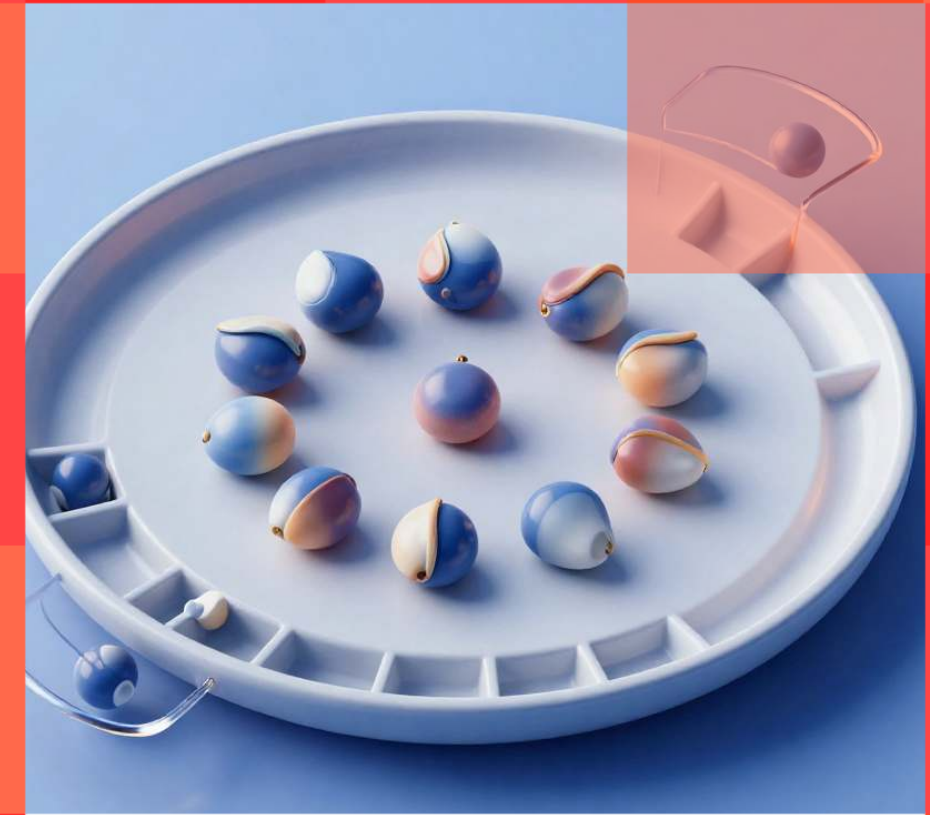
Разряды складываются в число

Любое число в десятичной записи состоит из разрядов: единиц, десятков, сотен и дальше. Поэтому его можно представить как сумму разрядных слагаемых. Именно это разложение помогает увидеть, какие цифры влияют на делимость, а какие меняют только величину числа.



Последняя цифра для 10

При делении на 10 учитываются только единицы, потому что десять единиц образуют один десяток. Если последняя цифра равна 0, число делится на 10 без остатка. На рисунке это удобно показать как движение по разрядам к правому краю числа.



Сумма цифр для 3 и 9

Для делимости на 3 и 9 важна сумма цифр: разрядные слагаемые складываются, а на остаток влияет не само расположение цифр, а их общий вклад. Поэтому числа 483 и 729 легко проверить устно, не выполняя длинное деление.

Типичные ошибки при проверке делимости

Диаграмма показывает не сами правила, а места, где ученики чаще всего ошибаются при устной проверке и записи ответа.

Чаще всего сбои возникают в работе с признаками на 3 и 9: правило помнят, но неправильно выбирают делитель или число для проверки.

Иллюстративная оценка по типичным ошибкам при изучении делимости; точные статистические данные не использовались.

Свойства делимости в примерах

Таблица показывает, как свойства делимости работают на коротких числовых примерах и помогают делать быстрый вывод.

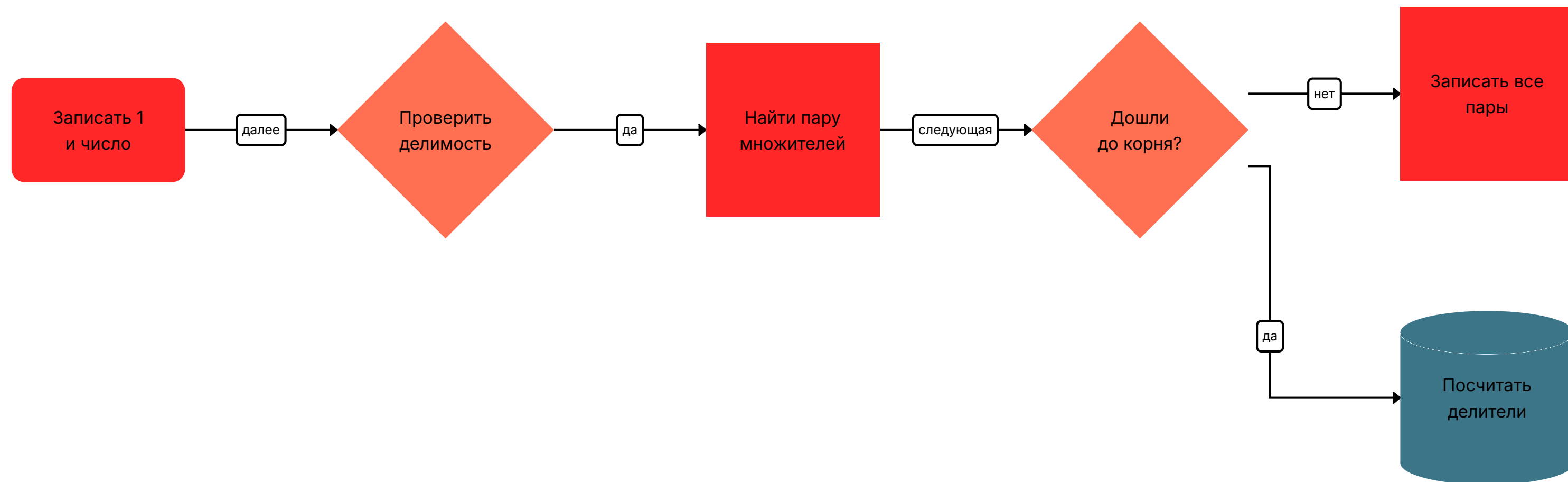
Свойство	Пример	Вывод
Транзитивность	$24 \rightarrow 6 \rightarrow 3$	24 делится на 3
Следствие делимости	18 делится на 9	18 делится на 3
Произведение	$7 \cdot 4$	Произведение делится на 7
Общий делитель	4 и 6	Число делится на 2

Свойства позволяют не проверять каждый случай отдельно: достаточно заметить цепочку делимости, произведение или общий делитель.

Свойства делимости натуральных чисел; учебные числовые примеры.

Как найти все делители числа

Алгоритм поиска делителей на примере числа 36



Простые и составные числа

Что такое простое число

Простое число имеет только два делителя: 1 и само число. К таким числам относятся 2, 3, 5, 7, 11 и 13, и именно они часто становятся «кирпичиками» для разложения.

Что такое составное число

Составное число имеет больше двух делителей, поэтому его можно разложить на множители не единственным способом. Например, 12 делится на 2, 3, 4 и 6, что сразу показывает его составную природу.

Почему 1 особое

Число 1 не считают ни простым, ни составным. Если бы его включили в одну из групп, многие правила о разложении на множители и подсчёте делителей стали бы неудобными и неточными.

Зачем различать их

Различие между простыми и составными числами помогает понимать строение натурального ряда. Оно особенно важно при поиске делителей, разложении на множители и дальнейшем изучении НОД и НОК.

Разложение числа на простые множители

Начинаем с деления

Число 60 удобно делить на простые числа по очереди: сначала на 2, затем снова на 2, потом на 3 и 5. Так видно, из каких простых множителей оно состоит.

Записываем результат

Получается разложение $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, или короче $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Такая запись показывает не только ответ, но и структуру числа.

Чем полезно разложение

По простым множителям легче находить все делители числа, проверять делимость и сравнивать числа при поиске НОД и НОК. Это один из самых удобных способов работы с натуральными числами.

Как выглядит дерево

На дереве разложения каждое деление ведёт к следующему шагу, пока не останутся только простые числа. Визуально это помогает не пропустить ни один множитель и не запутаться в вычислениях.



Делимость в практических задачах

В повседневных задачах делимость помогает быстро понять, можно ли разделить количество предметов или время на равные части без остатка.

Наиболее полезна делимость там, где важны равные группы и повторяющиеся интервалы: упаковка, расписание и подсчёт наборов.

Иллюстративные примеры повседневных задач по теме делимости; точные статистические данные не использовались.

Связь делимости с НОД и НОК

1

НОД — общий делитель

НОД показывает наибольшее число, на которое все данные числа делятся без остатка. Это удобный способ найти самый крупный общий «шаг» для нескольких натуральных чисел.

2

НОК — общее кратное

НОК — наименьшее число, которое делится на все данные числа без остатка. Оно помогает находить первый общий момент или повторение, например в расписаниях и циклах.

3

Оба понятия связаны с делимостью

Чтобы найти НОД или НОК, нужно понимать, какие числа являются делителями, а какие — кратными. Поэтому тема делимости становится основой для этих двух важных понятий.

4

Пример для 12 и 18

У чисел 12 и 18 наибольший общий делитель равен 6, а наименьшее общее кратное равно 36. Этот пример хорошо показывает, как делимость работает на практике.

Краткие правила для запоминания

Таблица помогает быстро вспомнить самые нужные признаки делимости и сразу проверить число устно.

Самые быстрые проверки опираются на последнюю цифру, а признаки на 3 и 9 требуют суммировать цифры числа.

Стандартные признаки делимости для натуральных чисел.

Признак	Правило	Пример
На 2	чётная последняя цифра	48
На 3	сумма цифр кратна 3	126
На 5	оканчивается на 0 или 5	235
На 9	сумма цифр кратна 9	729
На 10	оканчивается на 0	140

Делимость, которая помогает считать быстрее

Делимость нацело показывает, можно ли разделить число без остатка, а делители, кратные и признаки делимости делают вычисления быстрее и надёжнее. Эти идеи нужны для НОД, НОК и разложения чисел на множители.