

Развёртки, объёмы и сечения пространственных тел

Плоское, объёмное и разрезанное — три взгляда на одну фигуру.



Зачем это изучают в 7 классе

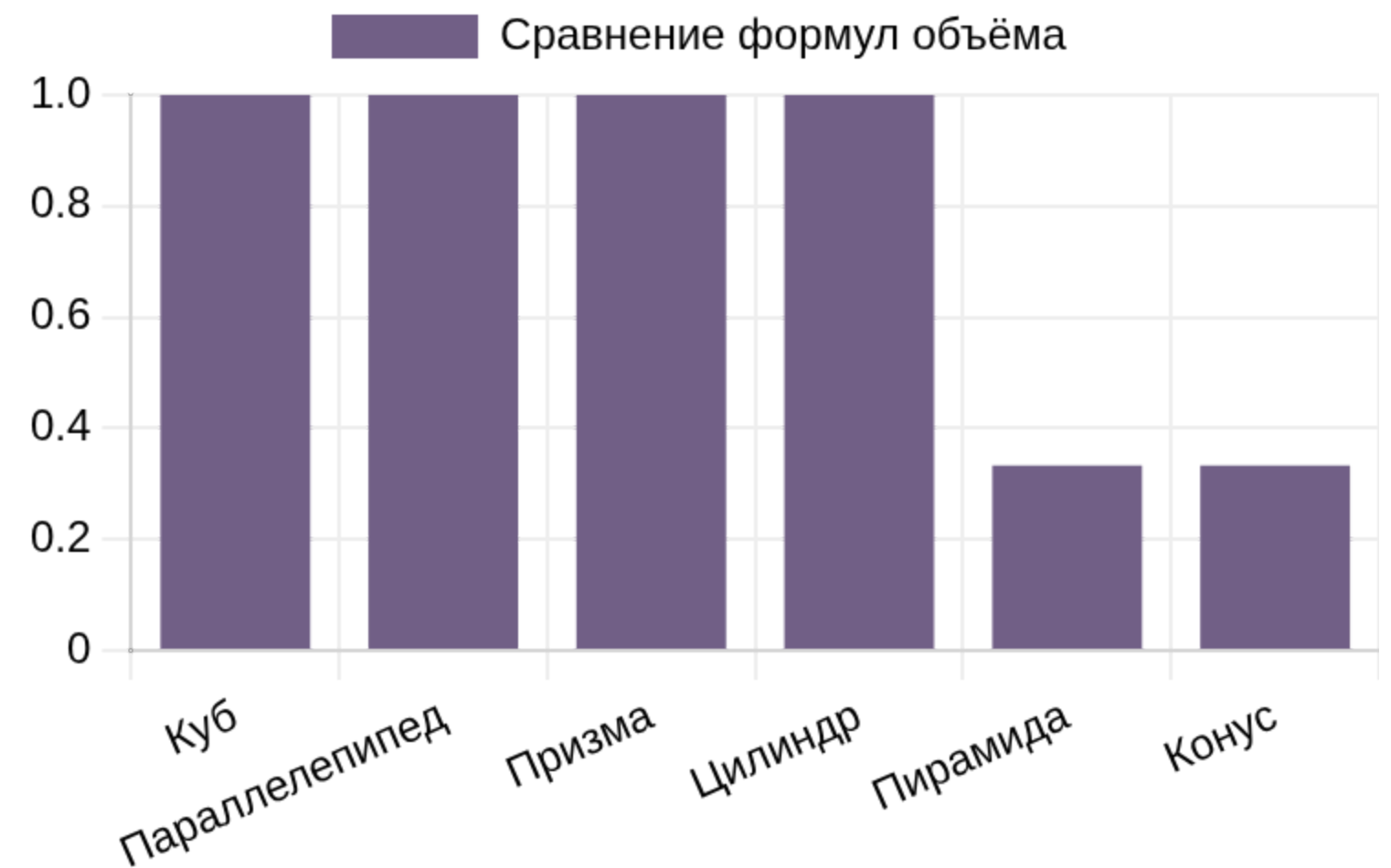
Развёртки помогают собирать модели, объём — считать вместимость, а сечения — понимать устройство тела внутри. Эти идеи нужны и в черчении, и в реальных расчётах.



Основные формулы объёма пространственных тел

Сравнение удобно читать через общий множитель: площадь основания и высота.

У пирамиды и конуса объём в три раза меньше при одинаковых основании и высоте.



Развёртка как плоский шаблон тела

Все грани на плоскости

Развёртка показывает каждую грань тела в разложенном виде. Если шаблон собран правильно, все части соединяются без наложений, а после сгибания получается исходная фигура.

Куб и параллелепипед

У куба развёртка состоит из шести одинаковых квадратов. У прямоугольного параллелепипеда вместо них шесть прямоугольников, но принцип остаётся тем же: каждая грань должна быть учтена.

Цилиндр

Для цилиндра развёртка выглядит иначе: боковая поверхность превращается в прямоугольник, а основания — в два равных круга. Так легче увидеть, из каких частей состоит тело.

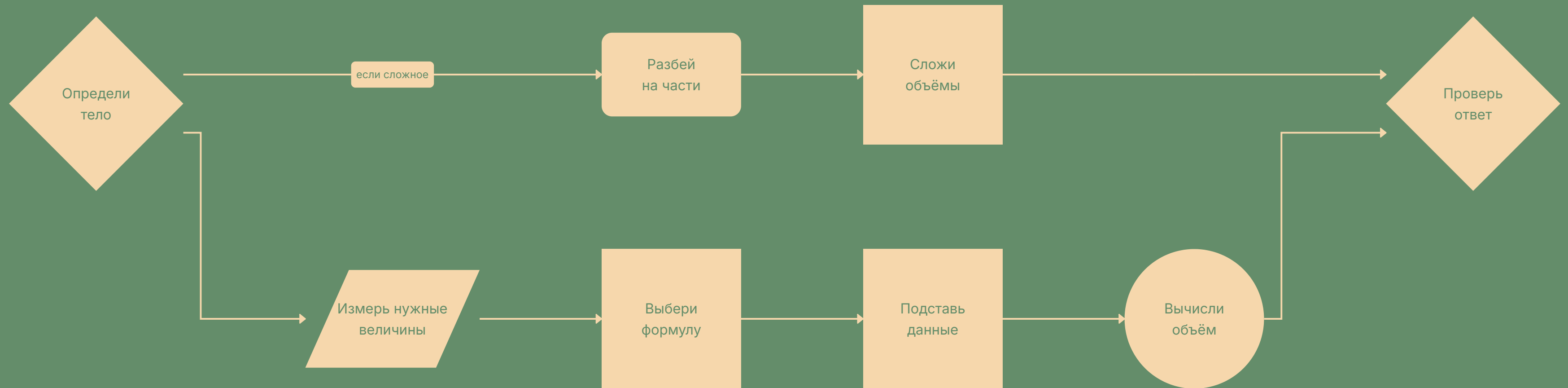
Проверка модели

Полезно мысленно представить сгибание шаблона: если есть лишняя часть или пропуск, модель не соберётся. Поэтому развёртка всегда требует точности и аккуратного расположения элементов.



Порядок нахождения объёма

Алгоритм подходит для стандартных и составных пространственных тел.



Единицы объёма и связь с литрами

Переход между кубическими единицами и литрами часто нужен в практических задачах.

Литр равен кубическому дециметру, а миллилитр — кубическому сантиметру; это помогает быстро переводить величины.

Школьные соотношения единиц объёма

Единица	Равна	Пример
1 дм ³	1000 см ³	1 л
1 м ³	1000 дм ³	1 000 000 см ³
1 см ³	1 мл	—

Куб и прямоугольный параллелепипед

1

Куб

У куба все грани одинаковые и квадратные, поэтому его легко узнавать по симметрии. Формула объёма очень короткая: достаточно знать длину одного ребра и возвести её в третью степень.

3

Почему они важны

И куб, и прямоугольный параллелепипед часто становятся первыми моделями в задачах на объём и развёртку. На них удобно учиться видеть связь между размерами тела и его вместимостью.

2

Прямоугольный параллелепипед

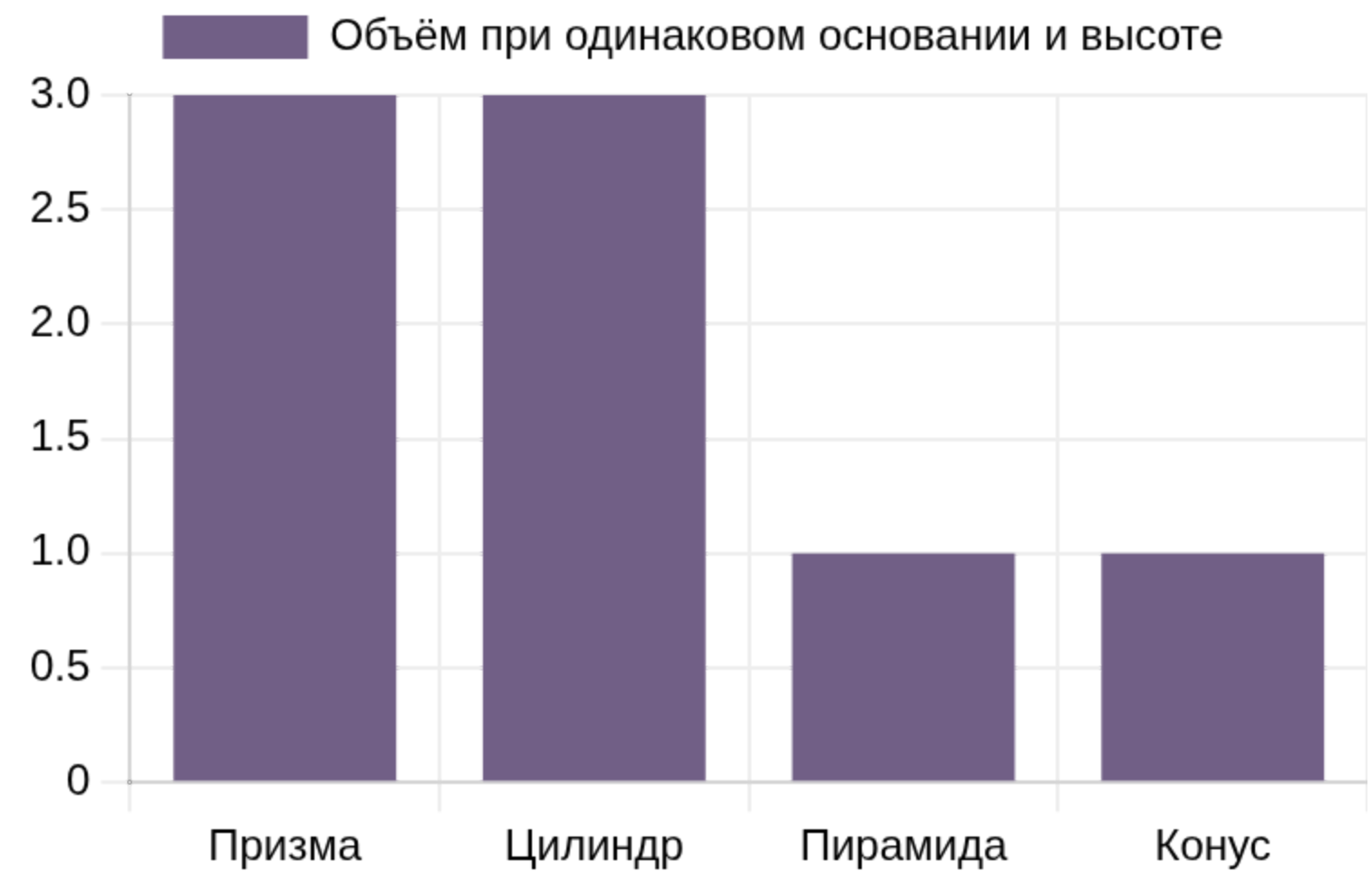
Эта фигура похожа на коробку: все грани — прямоугольники, а размеры задаются тремя измерениями. Объём находят перемножением длины, ширины и высоты, если они известны.



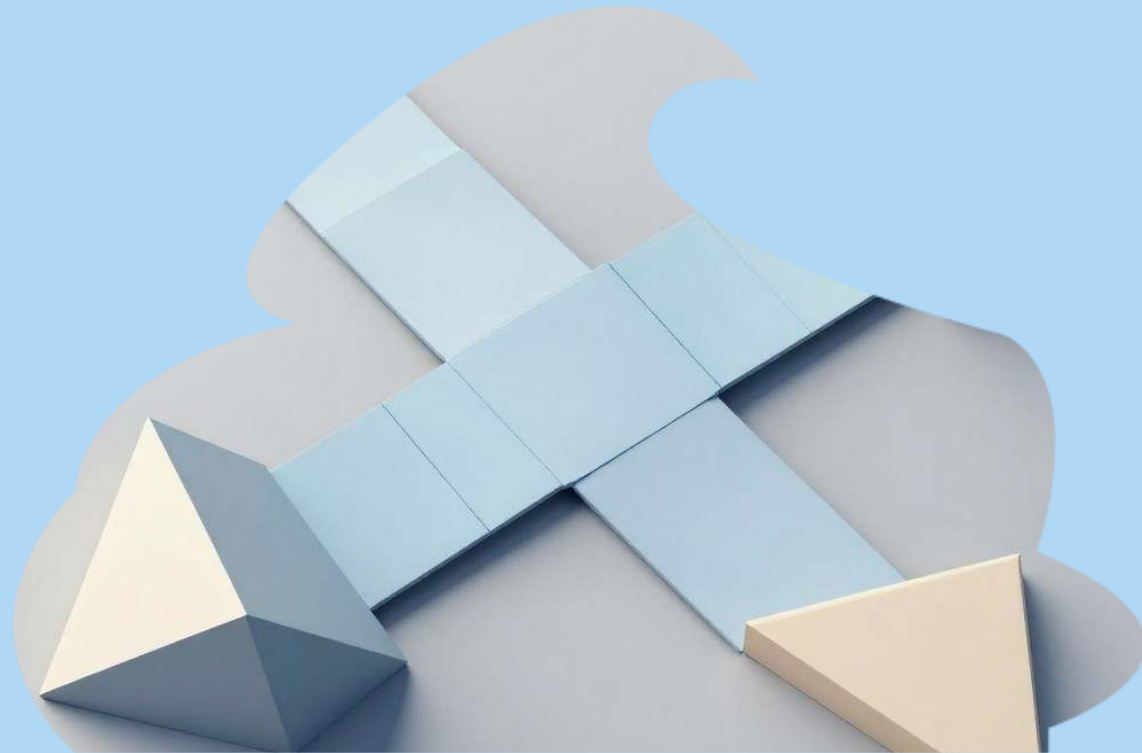
Как меняется объём при одинаковом основании

На диаграмме сравниваются тела с одинаковой площадью основания и одной высотой.

Для призмы и цилиндра объём растёт линейно, а у пирамиды и конуса он составляет треть.

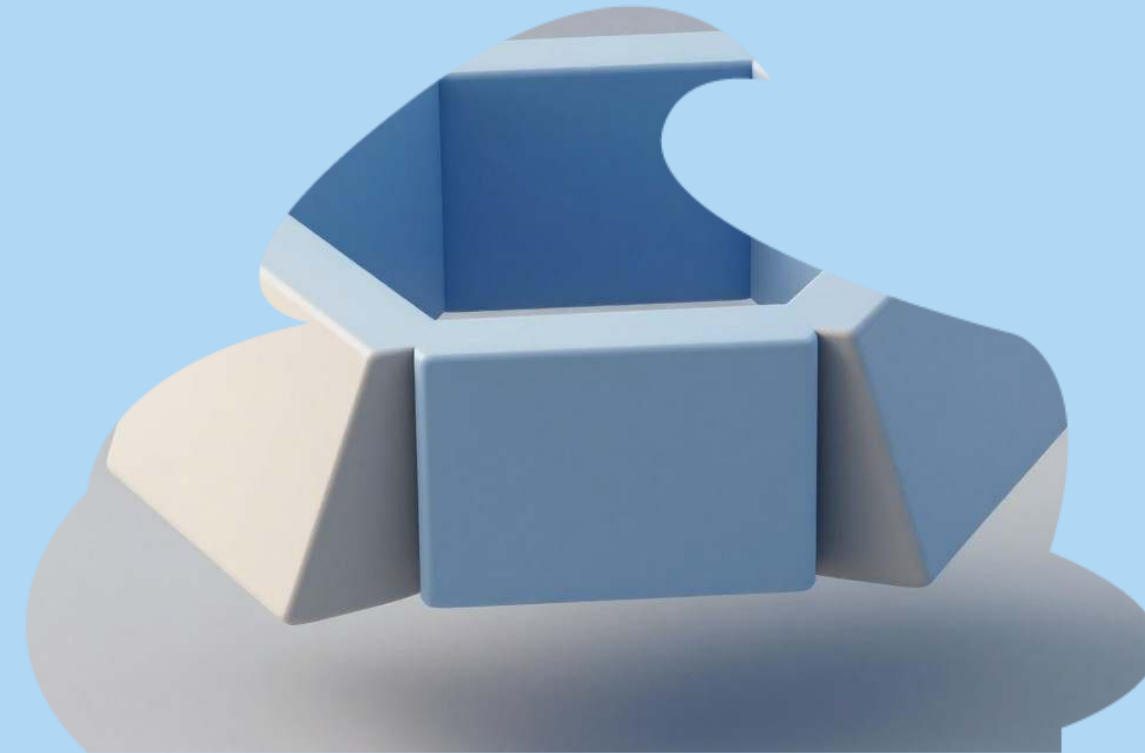


Призма и её развёртка



Плоский рисунок превращается в тело

Если аккуратно разложить призму на плоскости, её боковые грани выстраиваются в ряд, а основания остаются равными многоугольниками. Такой шаблон удобно вырезать из картона и затем сложить в объёмную модель.



Основания и боковые грани

У призмы всегда два одинаковых основания, расположенных параллельно друг другу. Между ними находятся боковые грани, которые в школьных задачах чаще всего изображают как прямоугольники, соединённые по боковым рёбрам.

Формулы объёма для тел вращения



Эти формулы помогают считать объём тел с круглым основанием и без него.



Для цилиндра и конуса нужны радиус и высота, а для шара — только радиус; коэффициент $1/3$ есть у конуса.

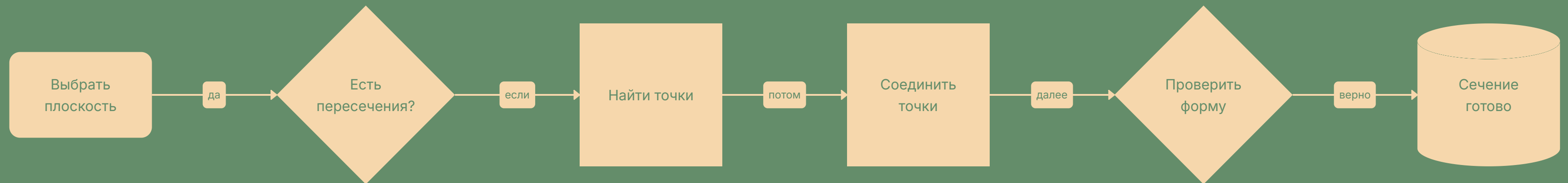


Школьный курс геометрии, 7 класс

Тело	Формула	Что нужно
Цилиндр	$V = \pi r^2 h$	r, h
Конус	$V = 1/3 \pi r^2 h$	r, h
Шар	$V = 4/3 \pi r^3$	r

Алгоритм построения сечения

Плоскость сечения, точки пересечения и проверка формы по свойствам тела



Сечения куба и призмы

Сечения куба

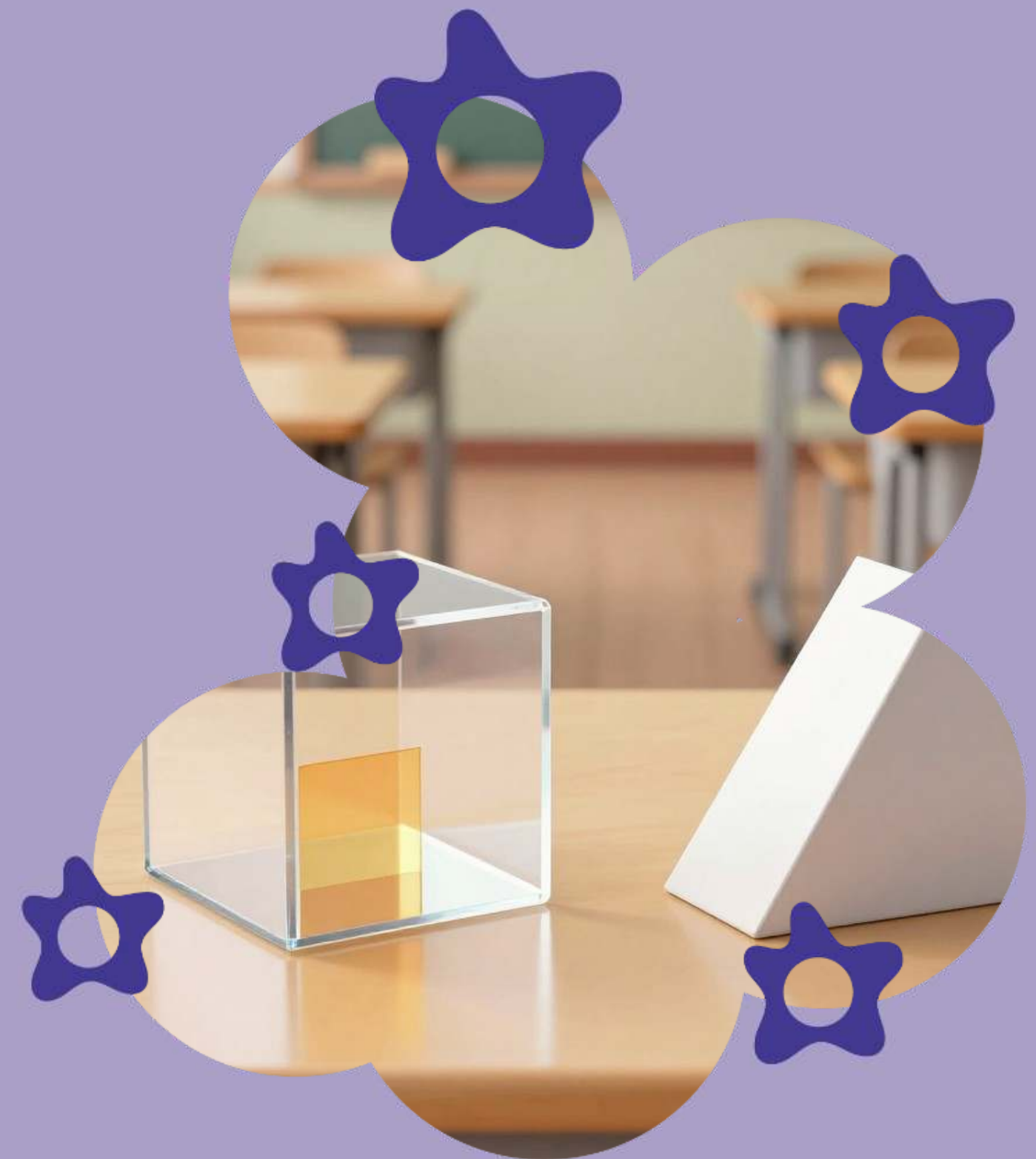
Плоскость может пересечь куб по-разному: иногда получается квадрат или прямоугольник, а при наклонном разрезе — треугольник или шестиугольник. Форма зависит от того, какие рёбра и вершины затрагивает плоскость.

Наклонный разрез

Когда плоскость проходит через вершины или рёбра, сечение меняется сильнее. Его нужно строить по точкам пересечения и затем проверять, не нарушена ли симметрия и порядок соединения.

Параллельно основанию

Если сечение призмы параллельно основанию, его форма и размеры полностью совпадают с основанием. Это удобный случай: достаточно знать вид основания, чтобы сразу представить результат разреза.

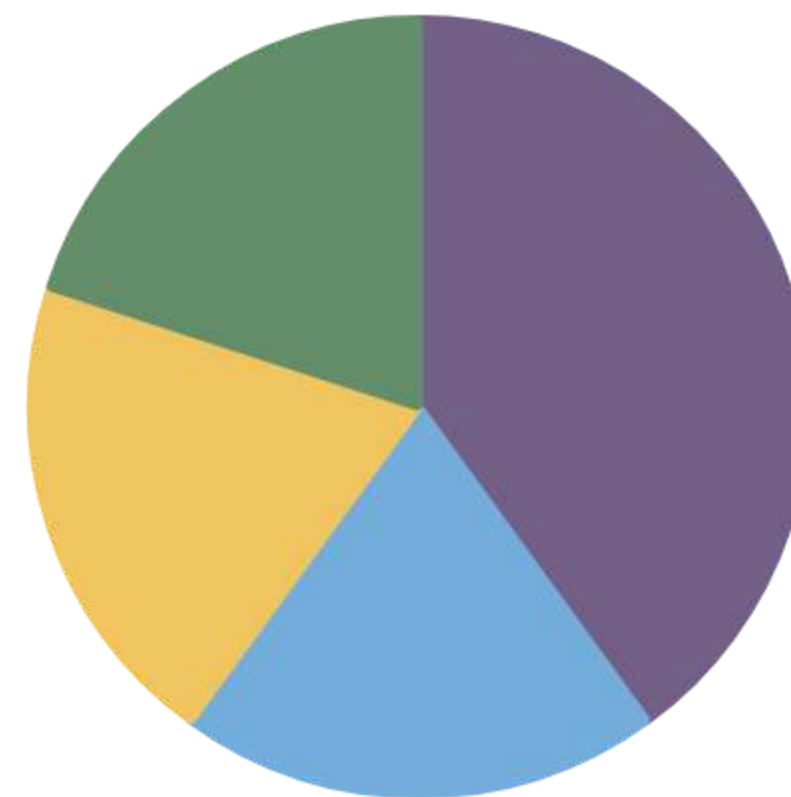


Типичные виды сечений у разных тел

Один и тот же разрез может дать разные фигуры, потому что тела отличаются основанием, рёбрами и наличием вершин.

Четырёхугольные сечения чаще связаны с телами с рёбрами, а круглые и треугольные — с телами с кривой поверхностью или одной вершиной.

Куб и призма Пирамида Цилиндр
Конус



Пирамида, конус и шар



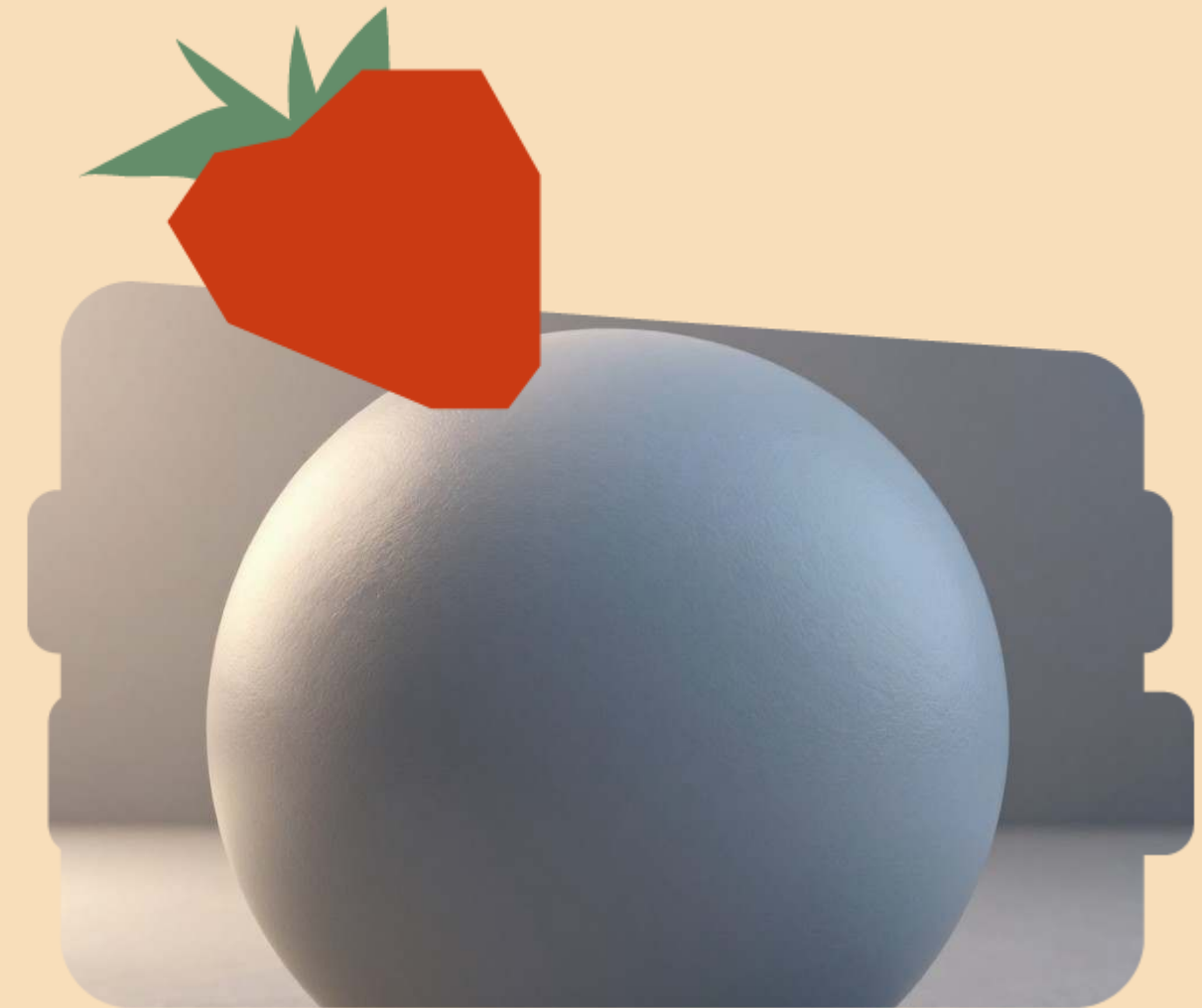
Пирамида: одна вершина и основание

Пирамида легко узнаётся по одной вершине, к которой сходятся боковые грани. Если сравнить её с призмой, становится заметно главное различие: объём пирамиды в три раза меньше при том же основании и высоте. Поэтому рисунок рядом помогает сразу увидеть связь формулы и формы.



Конус и его круглая основа

Конус напоминает пирамиду, но вместо многоугольного основания у него круг. У него тоже одна вершина, а объём выражается через треть объёма цилиндра с тем же радиусом и высотой. На изображении важно показать плавную боковую поверхность и круг основания.



Шар без рёбер и вершин

Шар отличается от всех других тел тем, что у него нет ни рёбер, ни вершин, ни граней. Его форма полностью закруглена, поэтому он воспринимается как самый «гладкий» из изучаемых объектов. Рядом с пирамидой и конусом это различие видно особенно хорошо.

Сравнение тел по основным признакам

Таблица показывает, как устройство тела связано с его объёмом и внешними элементами.

Чем проще форма поверхности, тем меньше опорных элементов для описания тела. Формула объёма всегда отражает его строение: ребра, основание или только радиус.

Школьный курс геометрии 7 класса

Тело	Признаки	Формула
Куб	6 граней; 12 рёбер; 8 вершин	$V = a^3$
Цилиндр	2 основания; боковая поверхность	$V = \pi r^2 h$
Шар	Нет граней, рёбер, вершин	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Три взгляда на одно тело

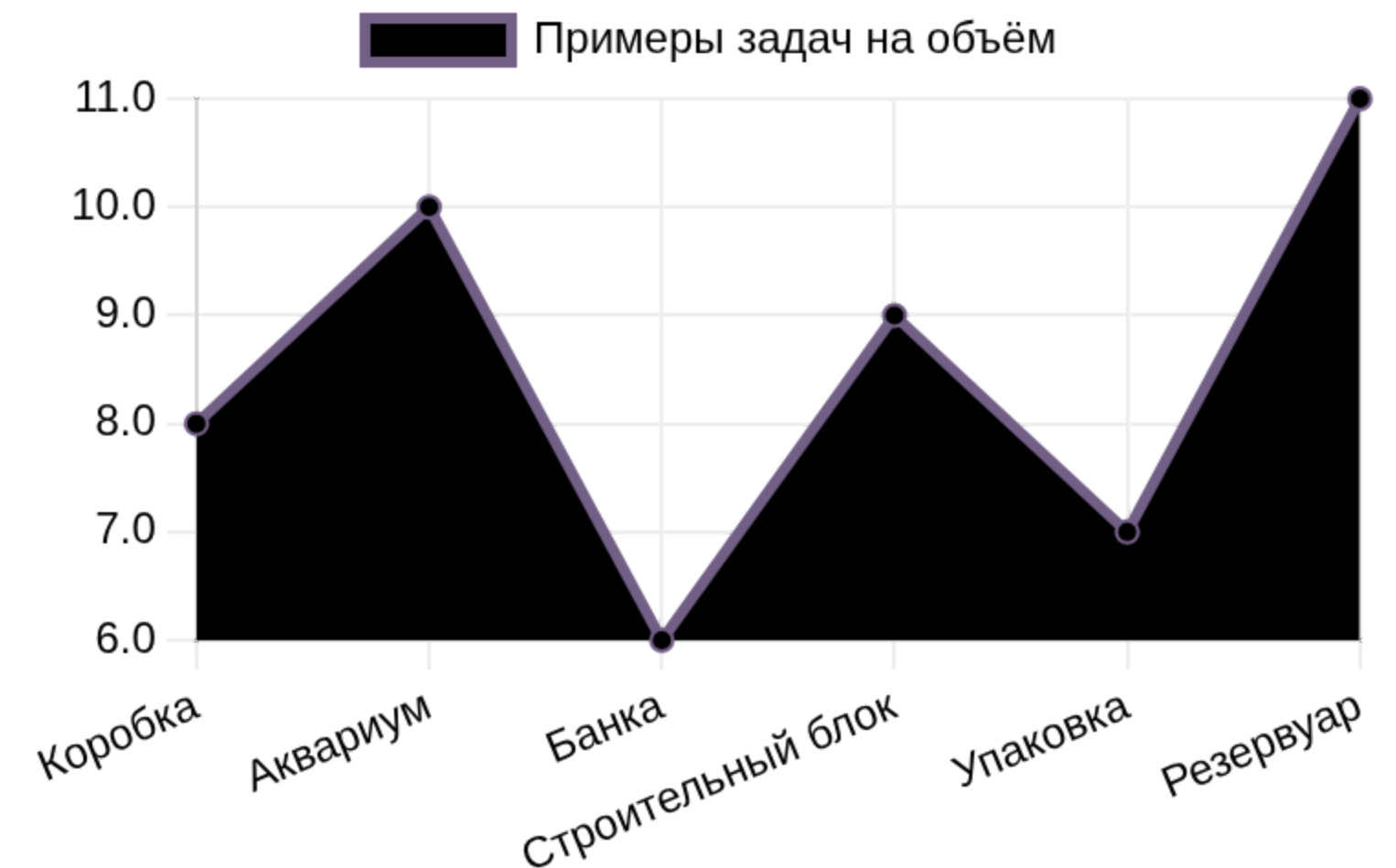
Развёртка, объём и сечение описывают пространственную фигуру с разных сторон



Где встречаются задачи на объём в жизни

В реальных задачах размеры часто нужно не только измерить, но и сравнить, чтобы выбрать подходящую ёмкость или количество материала.

Объём нужен там, где важно понять вместимость, расход или полезное пространство. Чем точнее измерения, тем надёжнее практический расчёт.



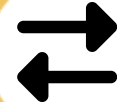
Примеры из повседневной практики; учебная подборка для 7 класса

Типичные ошибки в задачах на развёртки и объёмы



Путают площадь и объём

В ответе иногда пишут квадратные единицы вместо кубических. Это ошибка смысла: площадь показывает поверхность, а объём — то, сколько места занимает тело внутри.



Ошибаются в переводе единиц

Нужно помнить точные соотношения: $1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$, а $1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ дм}^3$. Если их перепутать, ответ получится в тысячу раз неверным.



Берут не ту высоту

Высота в формулах всегда перпендикулярна основанию. Если взять наклонный отрезок вместо высоты, вычисление объёма станет неправильным даже при верно выбранной формуле.



Неверно строят развёртку

В развёртке нельзя оставлять пропуски, добавлять лишние элементы или накладывать части друг на друга. Иначе бумажная модель не сложится в нужное тело.

Главные правила для запоминания

1

Развёртка — это шаблон

Развёртка показывает, из каких плоских частей состоит пространственное тело. Если правильно расположить все элементы, из неё можно собрать модель без разрывов и наложений.

2

Объём — это вместимость

Объём измеряет внутреннее пространство тела и всегда записывается в кубических единицах. Он помогает понять, сколько вещества или предметов поместится внутри.

3

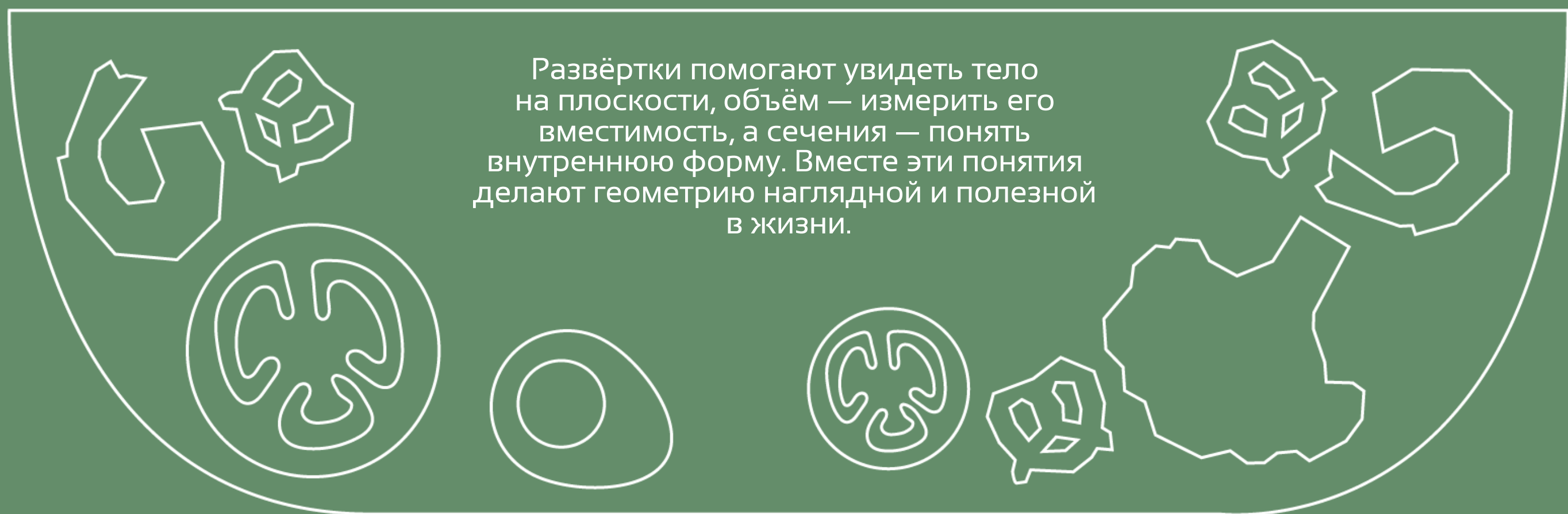
Сечение — результат разреза

Сечение показывает фигуру, которая получается при пересечении тела плоскостью. По нему можно лучше представить внутреннее строение и расположение рёбер или вершин.

4

Высота играет главную роль

Для тел с одинаковым основанием объём зависит от высоты. У пирамиды и конуса формула содержит коэффициент $1/3$, поэтому их объём меньше, чем у призмы и цилиндра.



Развёртки помогают увидеть тело на плоскости, объём — измерить его вместимость, а сечения — понять внутреннюю форму. Вместе эти понятия делают геометрию наглядной и полезной в жизни.