

# Объём шара

Поймём, откуда берётся формула объёма шара и как её проверить.



# Почему эта тема важна

Шар встречается в задачах на объём, сечения и измерение размеров. Здесь важнее понять смысл формулы, чем просто запомнить её запись.



Куб радиуса показывает, что объём  
зависит от трёх измерений сразу.

Формула объёма шара

$R^3$

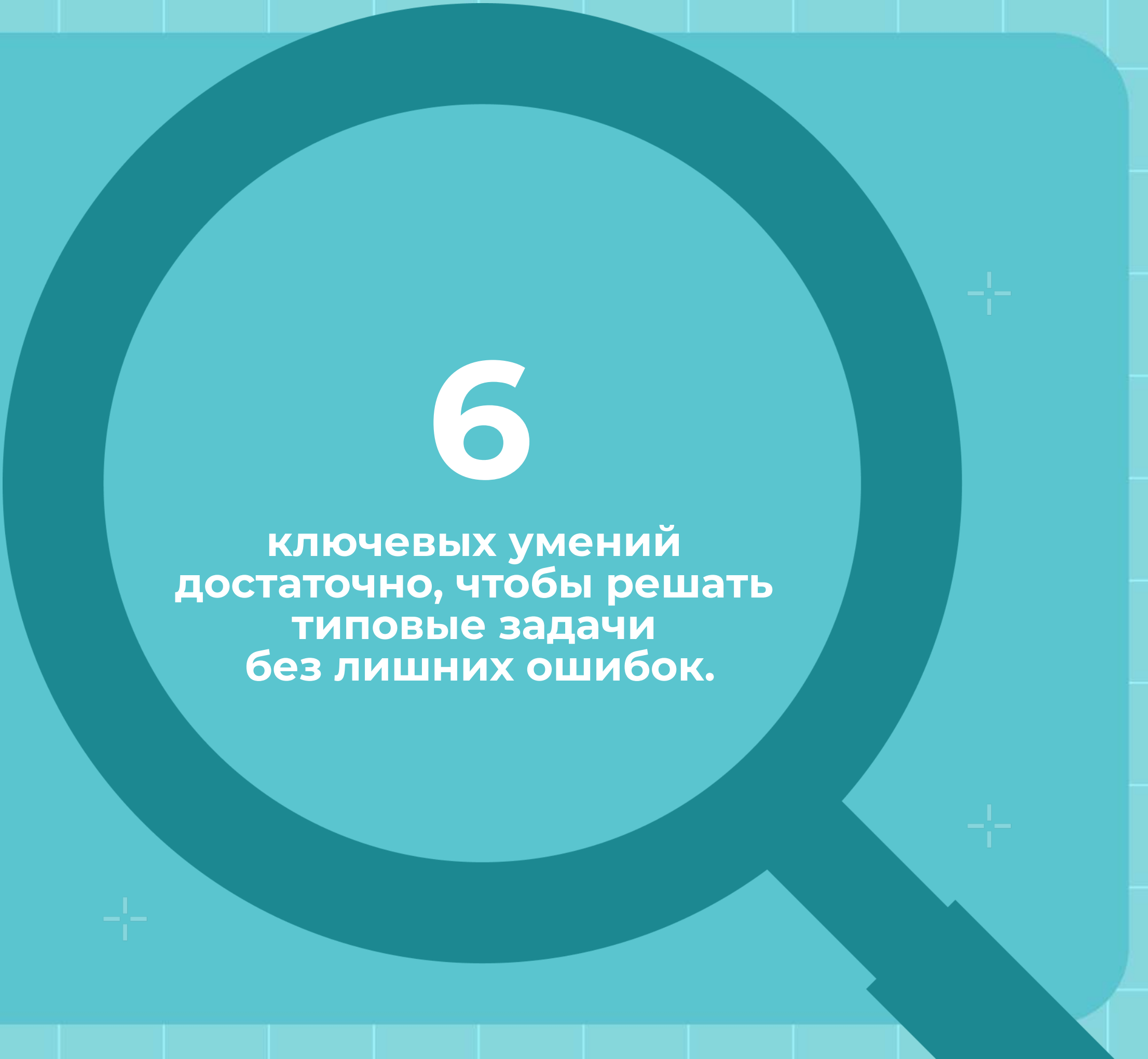
поэтому даже небольшое  
изменение радиуса  
сильно меняет объём.


$$4\pi R^2$$

**такой площадью  
измеряют поверхность  
сферы, а не её объём.**

**У шара есть объём, а у сферы — только  
поверхность. Эта разница часто приводит  
к ошибкам в вычислениях.**

*Формула площади поверхности сферы*



6

**ключевых умений  
достаточно, чтобы решать  
типовые задачи  
без лишних ошибок.**

После темы ученик уверенно применяет  
формулу, работает с единицами  
и проверяет ответ на здравый смысл.

Структура темы урока

Если подставить диаметр вместо радиуса,  
ошибка в объёме станет восьмикратной из-  
за куба.

Свойство формулы  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

8

во столько раз меняется  
объём при удвоении  
линейного размера.

Слова «вместимость», «ёмкость» и «объём»  
обычно указывают на нужную формулу  
и верные единицы.

Алгоритм анализа текстовой задачи

**3**  
**ВОЗМОЖНЫХ величины**  
**нужно различать в задаче:**  
**V, R или d.**

# Идея разбиения на тонкие слои

## Тонкие диски

Шар удобно мысленно разбить на очень тонкие диски. Каждый слой почти плоский, поэтому его объём можно оценивать по знакомой идее площади основания и малой толщины.

## Идея приближения

Чем меньше толщина слоёв, тем точнее сумма их объёмов. Такой подход переводит сложную пространственную фигуру в набор простых элементов.

## Связь с формулой

Именно через слой за слоем становится видно, как геометрия сечений превращается в итоговую формулу объёма шара.



# Объём элементарного слоя

## 1. Радиус сечения

Возьмём сечение на расстоянии  $x$  от центра. Его радиус равен  $\sqrt{R^2 - x^2}$ , поэтому площадь круга выражается через  $\pi(R^2 - x^2)$ .

## 2. Малый объём

Если умножить эту площадь на малую толщину  $dx$ , получится элементарный объём слоя:  $dV \approx \pi(R^2 - x^2)dx$ .

## 3. Суммирование по высоте

Теперь задача сводится к суммированию таких слоёв по всей высоте шара от  $-R$  до  $R$ .

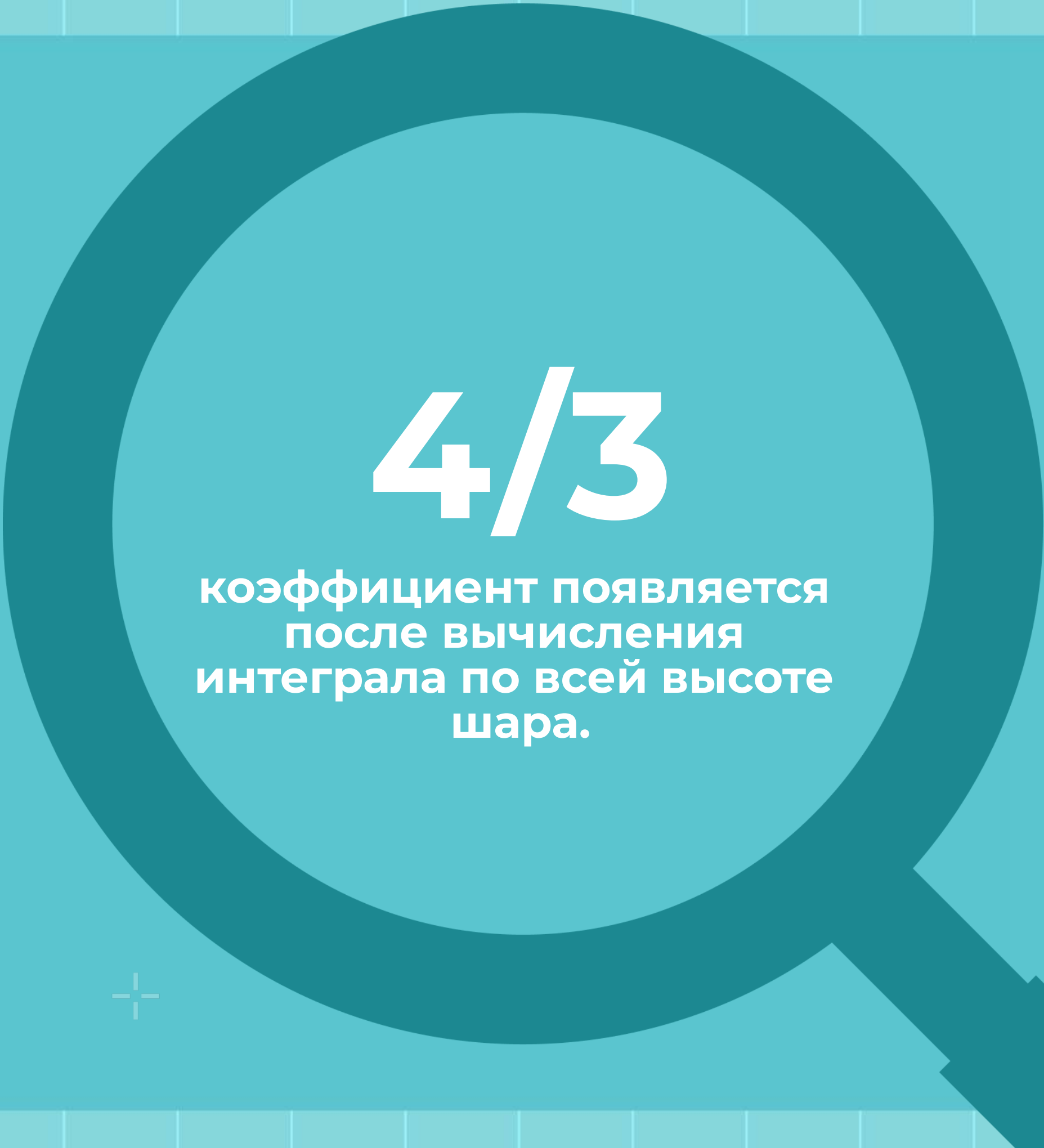


Предел суммы слоёв приводит к формуле  
объёма шара и делает её понятной.

*Школьный вывод формулы объёма шара*

**—R до R**

**ПО ЭТОЙ ВЫСОТЕ  
УЧИТЫВАЮТСЯ ВСЕ ТОНКИЕ  
СЛОИ ШАРА.**


$$4/3$$

**коэффициент появляется  
после вычисления  
интеграла по всей высоте  
шара.**

**Число  $4/3$  появляется после точного  
суммирования всех слоёв по высоте шара,  
а не как произвольный коэффициент.**

*Вывод формулы через суммы тонких слоёв и интеграл площади  
сечений*

Третья степень радиуса нужна, чтобы итог имел кубические единицы измерения и соответствовал объёму тела.

*Проверка размерности формулы объёма шара*

3

**показывает, что объём  
должен зависеть  
от третьей степени  
радиуса.**

Если радиус увеличить вдвое, объём  
вырастает не в 2 раза, а в 8; это быстрый  
контроль вычислений.

*Свойство кубической зависимости объёма от радиуса*

8

так меняется объём  
при двукратном  
увеличении радиуса.

Шар занимает две трети объёма цилиндра  
с теми же радиусом и высотой  $2R$ .

*Сравнение шара с вписанным цилиндром*

**$2/3$**

**именно такая доля объёма  
цилиндра соответствует  
шару того же радиуса.**

Площадь кругового сечения включает  $\pi$ ,  
а сравнение слоёв объясняет, почему  
объём шара выводится через  
суммирование сечений.

*Анализ площадей сечений шара по высоте*

**$\pi$**   
**ВХОДИТ В ПЛОЩАДЬ  
КАЖДОГО КРУГОВОГО  
СЕЧЕНИЯ ШАРА.**

# Пример 1: объём по радиусу



| Дано               | Формула                         | Ответ                   |
|--------------------|---------------------------------|-------------------------|
| $R = 5 \text{ см}$ | $V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$ | $500\pi/3 \text{ см}^3$ |
|                    | $\approx 523,6 \text{ см}^3$    |                         |

Подстановка в формулу  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

Подстановка радиуса даёт точный ответ и сразу показывает, в каких единицах записывать объём.

Объём удобно сначала записать точно, а затем при необходимости округлить.



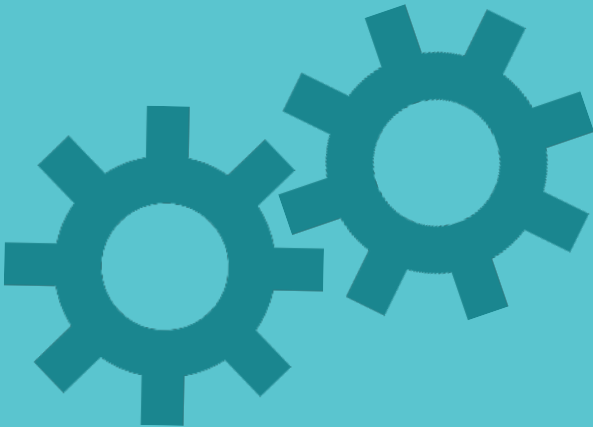
# Пример 2: радиус по объёму

| Дано                  | Шаг             | Ответ              |
|-----------------------|-----------------|--------------------|
| $288\pi \text{ см}^3$ | $R^3 = 216$     | $R = 6 \text{ см}$ |
|                       | сокращаем $\pi$ |                    |

Если известен объём, формулу можно обратить и найти радиус через кубический корень.

Сначала сокращают одинаковые множители, затем извлекают кубический корень.

Обратное применение формулы объёма шара



## Пример 3: перевод единиц



| Дано  | Перевод             | Радиус    |
|-------|---------------------|-----------|
| 2,5 л | 2,5 дм <sup>3</sup> | ≈ 0,84 дм |
|       | ≈ 8,4 см            |           |

Соотношение 1 л = 1 дм<sup>3</sup>

Перевод литров в дм<sup>3</sup> выполняют до вычислений, чтобы не потерять точность и не запутаться в единицах.

Правильный перевод единиц делает расчёт прозрачным и даёт реалистичный ответ.



## Пример 4: оценка по порядку величины

| R     | V                           | В литрах                |
|-------|-----------------------------|-------------------------|
| 10 см | $\approx 4189 \text{ см}^3$ | $\approx 4,2 \text{ л}$ |

Оценка по порядку величины помогает понять, реалистична ли вместимость шара в бытовых единицах.

Даже без точного калькулятора можно быстро проверить, что ответ выглядит правдоподобно.

Подстановка  $R = 10 \text{ см}$  в формулу объёма шара



# Итог: формула, смысл и проверка



Формула объёма шара показывает, что решают радиус, единицы и проверка масштаба. Если понять смысл кубической зависимости, задачи становятся гораздо проще и надёжнее.