

Разложение вектора по трём некомпланар ным векторам

Научимся представлять
любой вектор в пространстве
как линейную комбинацию
трёх направляющих.



Место темы в геометрии 10 класса

В 10 классе это часть векторной алгебры и стереометрии. Уже известно, как работать с векторами на плоскости. В пространстве же для описания положения и направления нужны три независимых направления: тогда любой вектор выражается через них единственным образом.



Что означает некопланарность

1

Три вектора некопланарны, если они не лежат в одной плоскости. Тогда нельзя «сжать» их описание до двумерного случая: векторы требуют именно трёхмерного пространства.

2

Для некопланарных векторов невозможно выразить один из них через два других, оставаясь в той же плоскости. Это и есть признак наличия трёх независимых направлений.

3

Если же хотя бы два вектора коллинеарны или все три лежат в одной плоскости, пространство по этим направлениям описывается неполно. Разложение теряет возможность быть корректным для произвольного вектора.

Геометрическая модель разложения в пространстве

1

Формула и смысл коэффициентов

Любой вектор a можно записать как $a = x \cdot a_1 + y \cdot a_2 + z \cdot a_3$, где a_1 , a_2 , a_3 — некопланарные векторы. Числа x , y , z показывают, «какую долю» каждого направления нужно добавить, чтобы получить a .

2

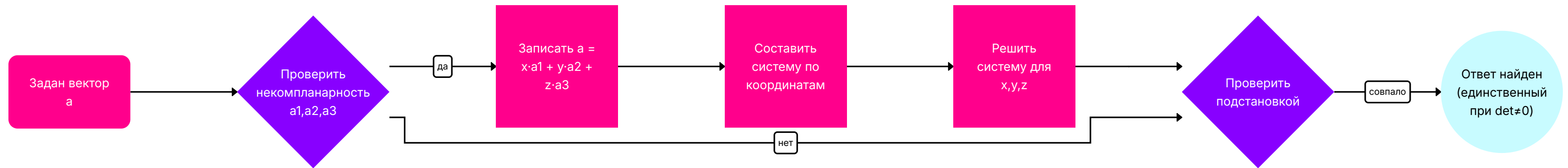
Параллелепипед как наглядность

Если на этих векторах построить параллелепипед, то вектор a соответствует его диагонали. Такая модель соединяет алгебраическую запись с геометрией: коэффициенты становятся мерой вклада каждого направления в итоговую диагональ.



Как найти разложение: от проверки к ответу

Пошаговый алгоритм решения для трёх некомпланарных направляющих



Почему разложение единственно

1

Единственность связана с линейной независимостью трёх некомпланарных векторов: если $x \cdot a_1 + y \cdot a_2 + z \cdot a_3 = 0$, то обязательно $x = y = z = 0$.

2

Когда это условие выполняется, выбранные векторы образуют базис пространства. Тогда любой вектор имеет единственные координаты в этом базисе.

3

Если же векторы линейно зависимы, возможны два сценария: один и тот же вектор записывается разными способами или разложение для него не существует. Это сразу проявляется при проверке решений.

Определитель как признак некомпланарности



Если $\det(a_1, a_2, a_3)=0$, тройка не задаёт базис: разложение произвольного вектора по этим векторам становится невозможным.

Ненулевой определитель означает некомпланарность и наличие базиса; нулевой — компланарность или зависимость, что разрушает однозначность.

Сводное правило из теории линейных определителей (точных чисел для конкретной задачи нет).

Система уравнений для координат

1

Пусть $a_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $a_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $a_3 = (x_3, y_3, z_3)$, а $a = (x, y, z)$. Тогда из $a = x \cdot a_1 + y \cdot a_2 + z \cdot a_3$ мы переводим задачу в координатную форму.

3

Каждое из этих равенств отвечает «своей» координате: первое — по первой координате векторов, второе — по второй, третье — по третьей.

2

Сравниваем координаты по осям и получаем три уравнения: $x \cdot x_1 + y \cdot x_2 + z \cdot x_3 = x$, $x \cdot y_1 + y \cdot y_2 + z \cdot y_3 = y$, $x \cdot z_1 + y \cdot z_2 + z \cdot z_3 = z$.

4

Решив систему относительно x, y, z , мы находим коэффициенты разложения. При ненулевом определителе ответ получается единственным.

Алгоритм решения задачи на разложение вектора

Последовательно проверьте возможность базиса, составьте систему по координатам и обязательно выполните проверку подстановкой.

При $\det \neq 0$ система имеет одно решение; подстановка подтверждает корректность и выявляет ошибки в вычислениях или в порядке векторов.

Обобщённый учебный алгоритм решения по базису из трёх векторов.

Шаг	Действие	Контроль
1	Проверить некомпланарность	$\det \neq 0$?
2	Записать a как комбинацию	x, y, z — неизвестны
3	Составить систему	3 уравнения
4	Решить систему	Крамер или подстановка
5	Подставить найденные x, y, z	совпали координаты?

3

В системе из трёх уравнений коэффициенты x , y и z выражаются через определители, поэтому ответ получается аналитически.

Для системы из трёх уравнений коэффициенты разложения можно находить по формулам Крамера: в знаменателе — определитель матрицы координат векторов a_1, a_2, a_3 , а в числителе заменяется нужный столбец координатами вектора a .

Классический метод Крамера для решения квадратной системы линейных уравнений (3×3 в нашем случае).

Простейший пример в декартовом базисе



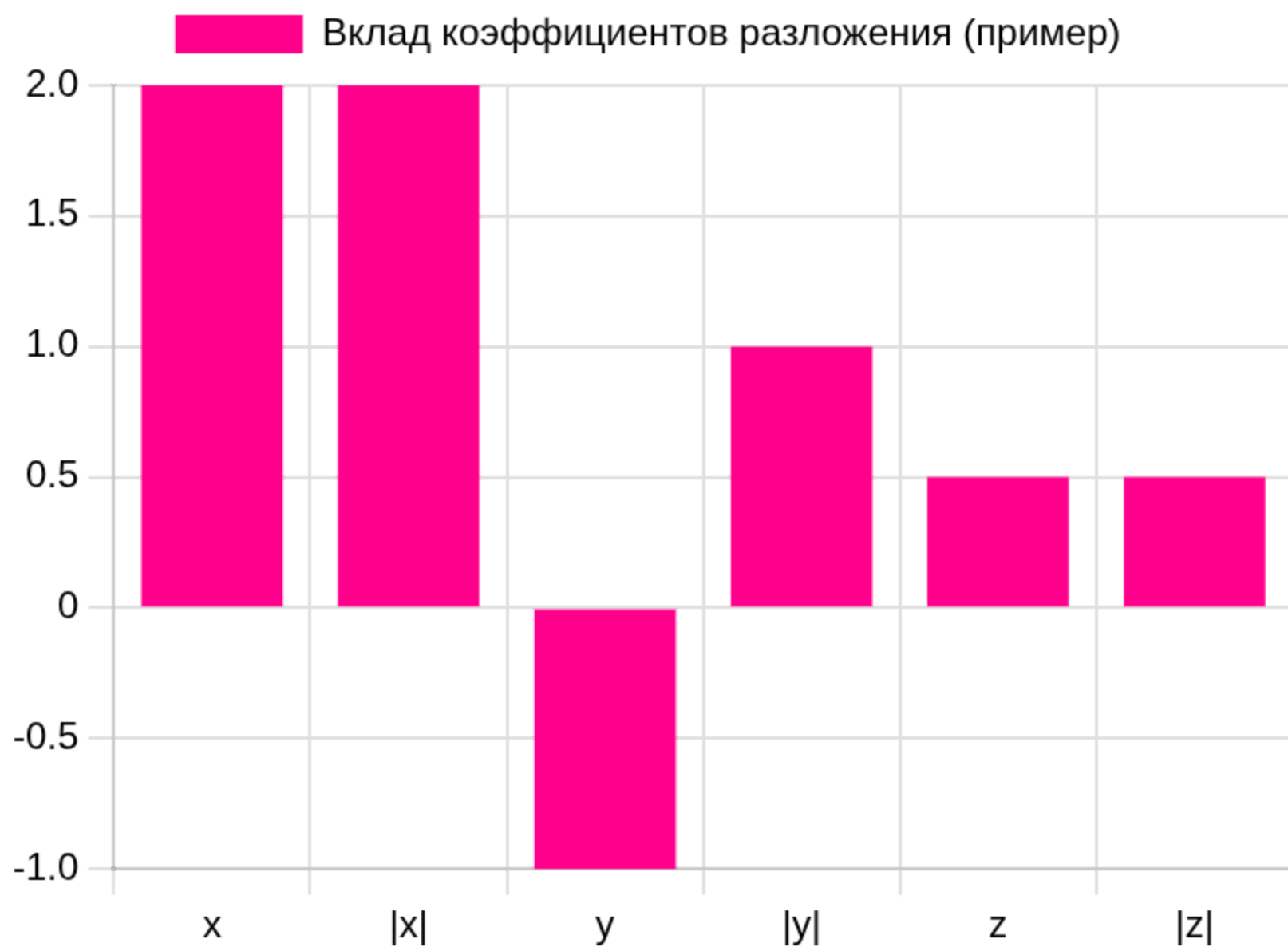
В стандартном декартовом базисе берём векторы $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Тогда любой вектор $a = (x, y, z)$ однозначно раскладывается по этим трём направлениям.



Коэффициенты разложения становятся просто координатами: x — “сколько” направлено вдоль OX , y — вдоль OY , z — вдоль OZ . На рисунке удобно показать оси и диагональ к точке (x, y, z) .



Сравнение вкладов коэффициентов разложения



Если по модулю один коэффициент заметно больше остальных, соответствующее направление определяет “главный поворот” вектора в пространстве.

По диаграмме видно, что вклад по направлению x самый сильный, а по z — наименьший. Знак указывает сторону, а модуль — величину влияния.

Данные для иллюстрации: $x = 2$, $y = -1$, $z = 0,5$ (выбор примера).

Геометрический смысл коэффициентов



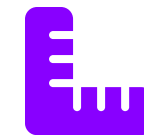
Положительный коэффициент

Если коэффициент, например x , положителен, то составляющая вектора идёт в ту же сторону, что и соответствующий базисный вектор. Геометрически это “шаги” вдоль выбранного направления OX .



Отрицательный коэффициент

Отрицательный коэффициент означает движение в противоположную сторону относительно базисного направления. Например, $y < 0$ показывает, что составляющая направлена против оси OY , хотя величина зависит от $|y|$.

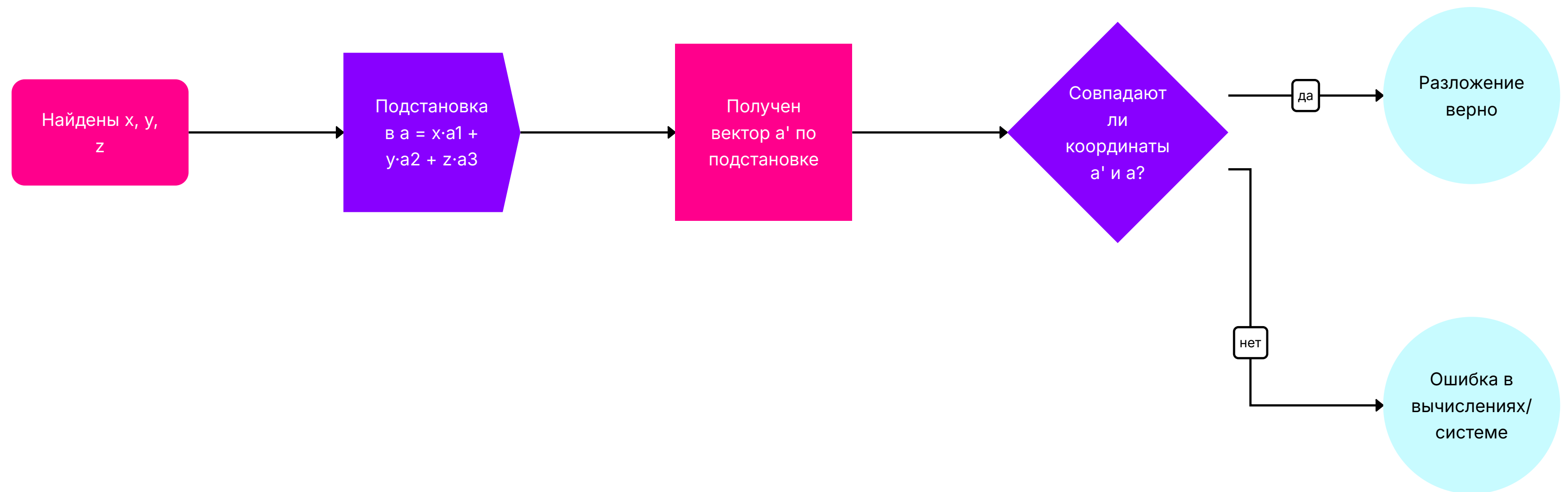


Модуль и диагональ параллелепипеда

Модуль коэффициента определяет масштаб вклада соответствующей составляющей вектора. При суммировании трёх направленных “отрезков” получается диагональ параллелепипеда, построенного на базисных векторах.

Проверка разложения через подстановку координат

Схема описывает обязательную проверку после вычисления коэффициентов x , y , z .



Связь разложения с координатами в пространстве

Запись в виде суммы

Далее любой вектор a записывают как $a = x \cdot a_1 + y \cdot a_2 + z \cdot a_3$. Коэффициенты x, y, z и есть координаты вектора в выбранном базисе.

Выбор базиса

Сначала фиксируют три некомпланарных вектора a_1, a_2, a_3 . Они задают “систему координат направлений”, то есть пространство раскладывается по трём независимым осям.

Переход между базисами

Если поменять базис, числа x, y, z изменятся, но сам геометрический объект — вектор a — останется тем же. Меняются только его координаты, а не направление и длина.

Типичные ошибки при решении задач

Таблица показывает, какие огрехи чаще всего встречаются при разложении и почему они “ломают” решение уже на этапе проверки.

Надёжность решения обеспечивают две проверки: корректность базиса (некомпланарность/определитель) и подстановка найденных коэффициентов в исходное равенство.

Обобщение типовых задач по разложению вектора в 10 классе.

Ошибка	Последствие
Перепутан порядок векторов	Система составлена неверно, коэффициенты получаются “не к тем” направлениям и не проходят проверку подстановкой.
Не проверена некомпланарность	Три вектора не образуют базис: разложения для произвольного вектора не существует или оказывается неединственным.
Ошибки в знаках при составлении системы	Решение системы выдаёт неверные x, y, z , поэтому координаты полученного a' не совпадают с исходным a .
Неверно вычислен определитель	Метод Крамера даёт ошибочный результат, а подстановка выявляет несоответствие координат.
Пропущена проверка подстановкой	Даже небольшая ошибка остаётся незамеченной, и неверный ответ может быть принят как правильный.

Применение метода в школьных и практических задачах

1

Разложение вектора помогает решать задачи стереометрии, где требуется перейти от фигур к вычислениям: найти недостающие направления, выразить диагонали через рёбра и связать геометрию с координатами.

2

Метод полезен при анализе равнодействующей нескольких векторов: сначала выбирают удобный базис, затем выражают каждый вектор через базисные направления и складывают коэффициенты.

3

В более широком смысле эта идея встречается в инженерных расчётах, физике сил и компьютерной графике: любое перемещение или влияние удобно описывать как комбинацию трёх независимых направлений.

Где встречаются разложения векторов

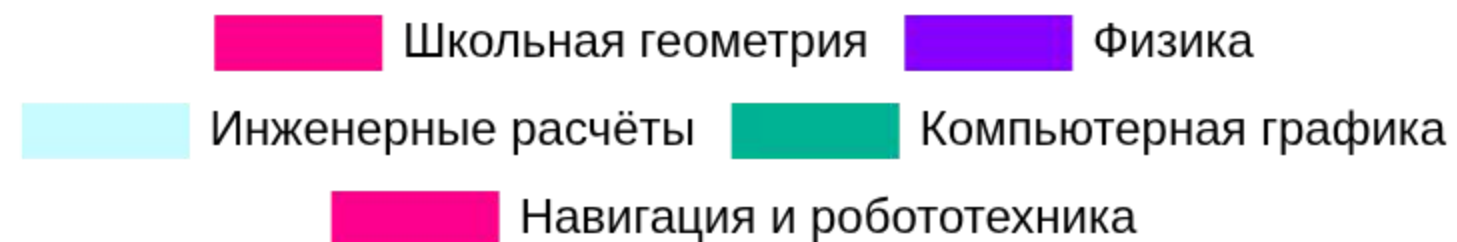


Диаграмма показывает не “точные доли”, а структуру смыслового интереса: где легче всего увидеть связь между направлением и координатами в пространстве.

Больше всего применений оказывается рядом с учебными темами и физическими задачами, где вектора естественно складываются и раскладываются на независимые компоненты.

Иллюстрация по структуре тем в учебных курсах (оценка для визуализации, не статистика).

Главные свойства разложения

1

Разложение существует, когда три вектора некомпланарны и образуют базис: именно это гарантирует возможность представить любой вектор как линейную комбинацию выбранных направлений.

2

Коэффициенты определяются единственным образом: если базис выбран правильно, то система для x, y, z имеет единственное решение и не допускает разных “толкований” одного и того же вектора.

3

Алгебраическая проверка опирается на ненулевой определитель: он служит сигналом, что выбранные векторы действительно дают независимые направления в пространстве.

4

Геометрический смысл связан с параллелепипедом и его диагональю: составляющие вдоль базисных векторов “собирают” итоговый вектор, а практический смысл — в удобном описании положения и направления.

Итог урока

Разложение вектора по трём некомпланарным векторам — ключевой способ описывать векторы в пространстве: три вектора задают базис, а любой вектор выражается через него единственным образом. Эта связка объединяет геометрию, координаты и линейную алгебру.

