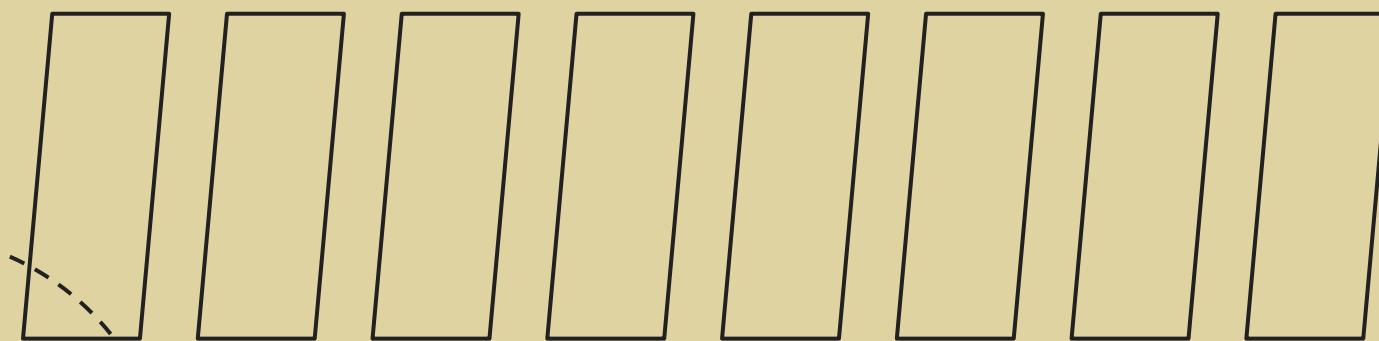


Сфера и шар: основные понятия стереометрии

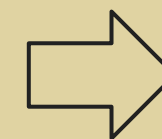
Сфера и шар — ключевые пространственные фигуры, которые связывают формулы, сечения и задачи ЕГЭ.



Место темы в курсе геометрии 11 класса



Сфера и шар объединяют идеи планиметрии и стереометрии: расстояния, радиус, диаметр и сечения. Эти фигуры особенно важны для задач на площадь поверхности и объём, а также на определение типа сечения. Тема систематизирует формулы и развивает пространственное воображение, что необходимо для ЕГЭ.



Определение сферы

01

Сфера — множество всех точек пространства, которые находятся на одинаковом расстоянии от одной точки, называемой центром. Это расстояние — радиус, его обычно обозначают r .

02

У сферы нет внутренней области: она существует как замкнутая поверхность. Именно поэтому сфера выступает границей, отделяющей точки «на расстоянии r » от остальных.

03

В задачах сфера помогает переводить геометрические условия в строгие соотношения: достаточно контролировать расстояние от центра до рассматриваемой точки.

Определение шара

01

Шар — это множество точек пространства, расстояние от центра которых не превышает радиус r . Тем самым учитываются и точки на границе, и все внутренние точки.

02

Поверхность шара совпадает со сферой, то есть представляет собой набор точек на расстоянии ровно r от центра. Внутренняя область — всё, что лежит ближе к центру.

03

В школьной геометрии обычно рассматривают замкнутый шар: вместе с его границей. Это важно для корректного задания «принадлежности» точек фигуре.

04

Связь со сферой помогает решать задачи о сечениях и вычислять площадь поверхности и объём по одной и той же величине — радиусу.

Сфера и шар: основные различия

Сфера задаёт границу (поверхность), а шар включает и эту границу, и внутреннее пространство. Поэтому их измеряют разными величинами: площадью и объёмом соответственно.

Один и тот же радиус задаёт и границу, и объём: площадь растёт как r^2 , а объём — как r^3 .

Параметр	Сфера	Шар
Геометрический объект	Поверхность	Тело
Что измеряем	Площадь S	Объём V
Формула	$S = 4\pi r^2$	$V = 4/3\pi r^3$
Единицы измерения	см ² и т.п.	см ³ и т.п.

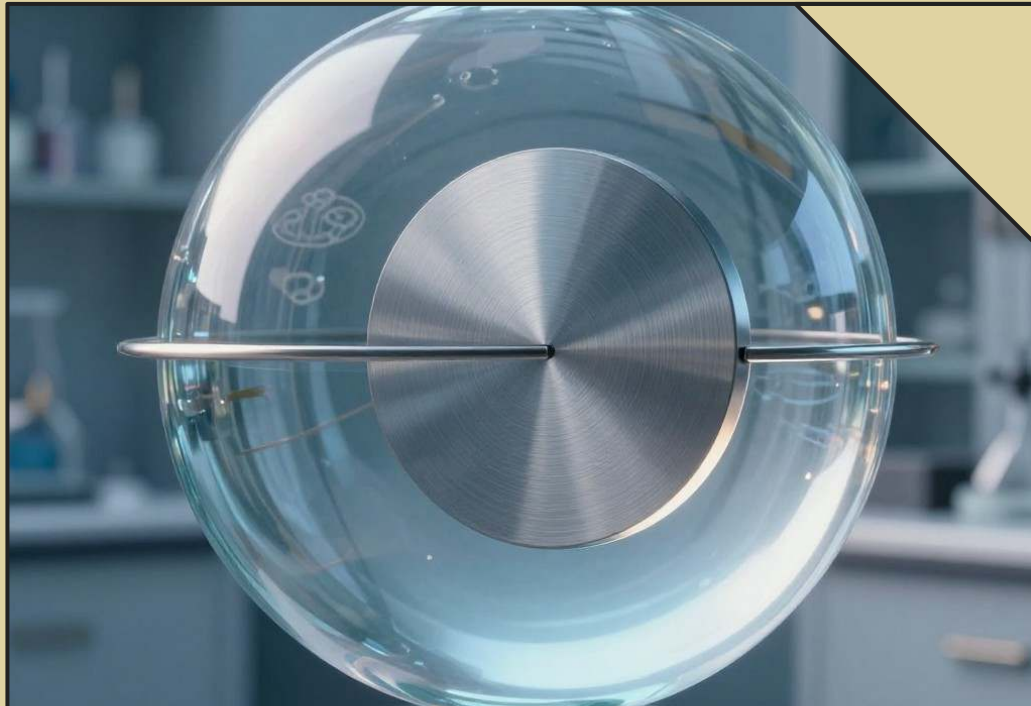
Элементы сферы и шара

				
Центр Центр — точка, относительно которой все расстояния до точек сферы одинаковы. Для шара он же определяет, какие точки входят внутрь по неравенству $\text{dist} \leq r$.	Радиус r Радиус — расстояние от центра до любой точки сферы. В формулах он контролирует и площадь поверхности сферы, и объём шара, а также размеры сечений.	Диаметр $d = 2r$ Диаметр проходит через центр и соединяет две диаметрально противоположные точки сферы. Его величина вдвое больше радиуса, поэтому он напрямую связывает многие расчёты.	Хорда и максимальная хорда Хорда — отрезок, соединяющий две точки сферы. Наибольшая хорда совпадает с диаметром, поскольку она соответствует максимальному расстоянию между точками поверхности.	Единственность сферы Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная сфера. Это утверждение помогает в задачах, где центр и радиус нужно восстановить по условиям.

Как определить вид сечения шара плоскостью

✕ Опираемся на соотношение расстояния от центра до плоскости с радиусом r .

Большой круг и экватор сферы



Большое сечение как «максимальный круг»

Если плоскость проходит через центр шара, получаем большое сечение. Его граница на сфере — окружность наибольшего радиуса, равная радиусу сферы. Среди круговых сечений это даёт максимальную площадь.



Экватор Земли как наглядная модель

Экватор — привычный пример большого круга в географической проекции. Когда мысленно «режем» земной шар плоскостью, проходящей через центр, появляется линия, аналогичная большому кругу. Это помогает интуитивно связать абстракцию со знакомой картинкой.



Почему центр решает всё

Вся идея большого круга держится на положении секущей плоскости: она должна пройти через центр. Тогда расстояние от центра до плоскости становится нулём, и круг получается самым «широким». Так геометрическая логика становится простой и проверяемой.

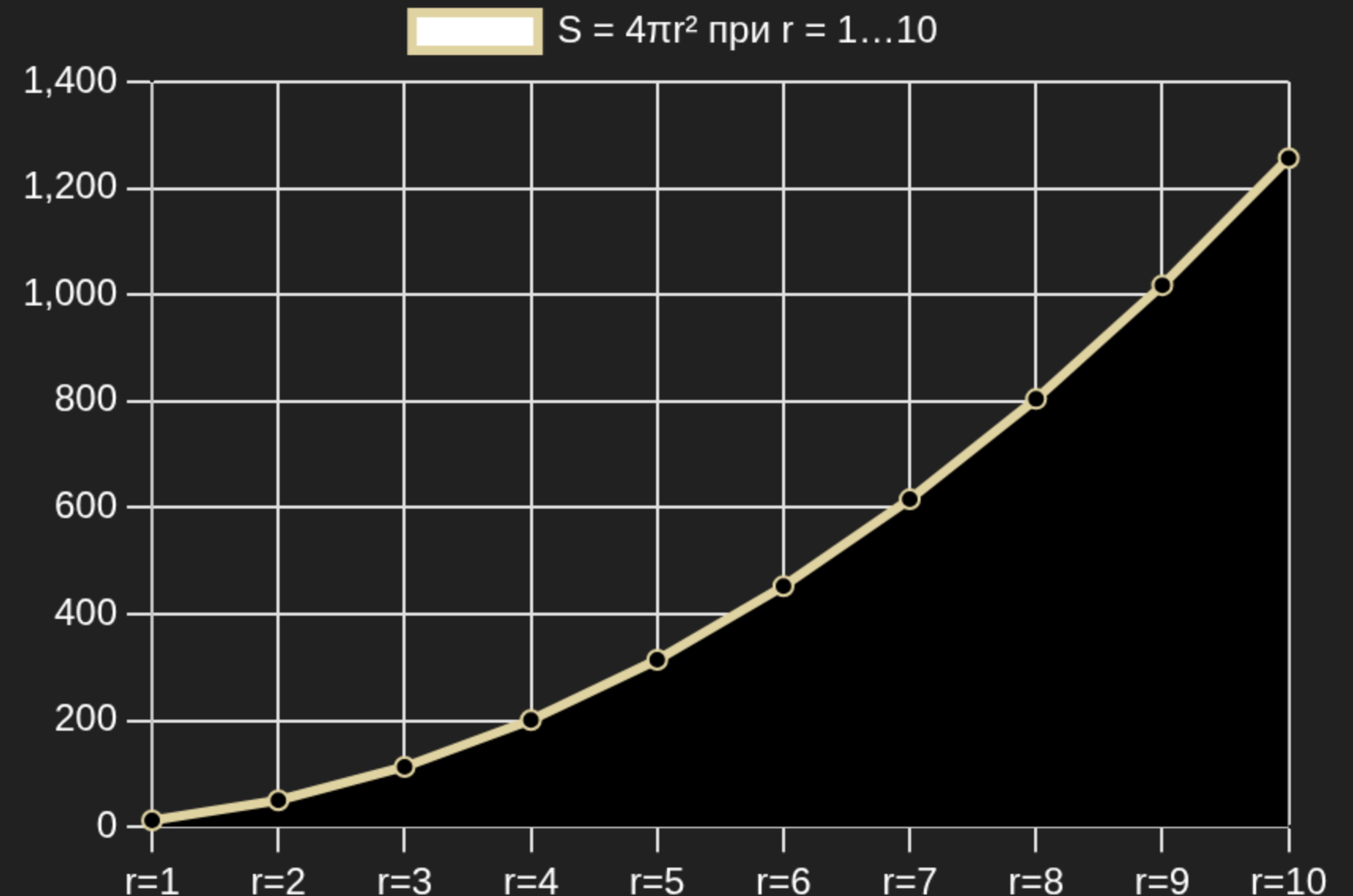
Как меняется площадь сферы при увеличении радиуса



Неравномерный рост на графике объясняется квадратной зависимостью: удвоение радиуса даёт рост площади в 4 раза.



Данные показывают, что площадь поверхности заметно ускоряется по мере увеличения r : разница между соседними значениями становится всё больше.



Вычисления по формуле $S = 4\pi r^2$ ($\pi \approx 3,14159$), значения $r = 1 \dots 10$

При увеличении радиуса в 2 раза площадь поверхности возрастает в 4 раза.

В основе лежит формула $S = 4\pi r^2$: она сразу показывает квадратичную зависимость от радиуса, а значит — ускорение роста площади.

4

Как меняется объём шара при увеличении радиуса

При переходе от $r=3$ к $r=4$ прибавка становится заметно больше, чем при старших значениях: кубическая зависимость усиливает эффект увеличения радиуса.

По графику видно: объём растёт быстрее площади, потому что V пропорционален r^3 , а $S - r^2$.



Вычисления по формуле $V = (4/3)\pi r^3$; значения на диаграмме представлены как V/π (π сокращено).

Формула объёма шара

01

Объём шара выражается формулой $V = (4/3)\pi r^3$. В задачах это помогает переходить от геометрических размеров к вместимости: от радиуса к количеству «внутреннего пространства».

02

При $r = 3$ см получаем $V = (4/3)\pi \cdot 27 = 36\pi$ см³. Подобные подстановки удобно тренировать, чтобы не ошибаться в степени радиуса.

03

При $r = 6$ см: $V = (4/3)\pi \cdot 216 = 288\pi$ см³. Здесь видно, что увеличение радиуса кратно сильнее отражается на объёме, чем на площади поверхности.

**Значение $\sqrt{r^2-h^2}$ даёт
радиус круга сечения шара
при расстоянии h от
центра до секущей
плоскости.**

Любое плоское сечение шара — круг.
Используя h , радиус сечения
выражается через r , что превращает
задачу на геометрию в расчёт по
формуле.

$$\sqrt{r^2-h^2}$$

■ Из геометрического вывода: радиус сечения находится по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника в сечении шара.

Примеры вычислений для разных радиусов

✕ Сравните значения площади сферы $S = 4\pi r^2$ и объёма шара $V = (4/3)\pi r^3$: для каждого r оба результата выражены через π , чтобы легче видеть зависимости.

✕ При умножении r на 2 площадь возрастает в 4 раза, а объём — в 8 раз: S зависит от r^2 , а V — от r^3 .

r	$S = 4\pi r^2$	$V = (4/3)\pi r^3$
2	16π	$32/3\pi$
4	64π	$256/3\pi$
6	144π	288π

Вычисления по формулам $S = 4\pi r^2$ и $V = (4/3)\pi r^3$ (π вынесено общим множителем).



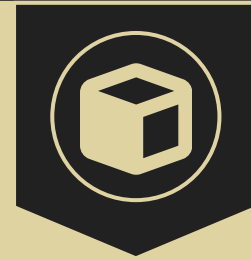
Формулы через диаметр и обратные задачи



Площадь и объём через диаметр
Если дан диаметр d , то радиус $r = d/2$. Тогда $S = \pi d^2$ и $V = \pi d^3/6$. Эти формы удобны, когда в условии напрямую указан d .



Площадь → радиус
Если известна площадь поверхности S , радиус находится обратным преобразованием: $r = \sqrt{S/4\pi}$. Так решают задачи, где ищут размер шара по данным о покрытии или материале.



Диаметр ↔ объём
Объём через диаметр записывается как $V = \pi d^3/6$. Это позволяет быстро вычислять вместимость, например, когда известны габариты сферической ёмкости и требуется её «объём».



Выбор правильной величины
В обратных задачах важно не перепутать площади и объёмы: площадь связана с r^2 , а объём — с r^3 . Тогда размерность ответа и формула согласуются автоматически.

Сфера и шар в природе и технике



Мыльный пузырь: геометрия, которая «выбирает» форму

Мыльная плёнка стремится принять такую сферическую форму, при которой для заданного объёма площадь поверхности становится минимальной. Поэтому пузырь демонстрирует связь между симметрией и «экономией» материала. Математика здесь не отвлечённость, а способ объяснить наблюдаемое явление.



Капли и планеты: равное расстояние как закон симметрии

Капли жидкости и небесные тела тяготеют к форме, близкой к шару, потому что вокруг центра сохраняется однородная «геометрическая логика» — точки оказываются на одинаковом расстоянии. Такая идея помогает понимать устойчивость формы и равномерность распределения характеристик. Это наглядный мост между школьной стереометрией и реальным миром.



Шаровые подшипники: когда важна равномерность

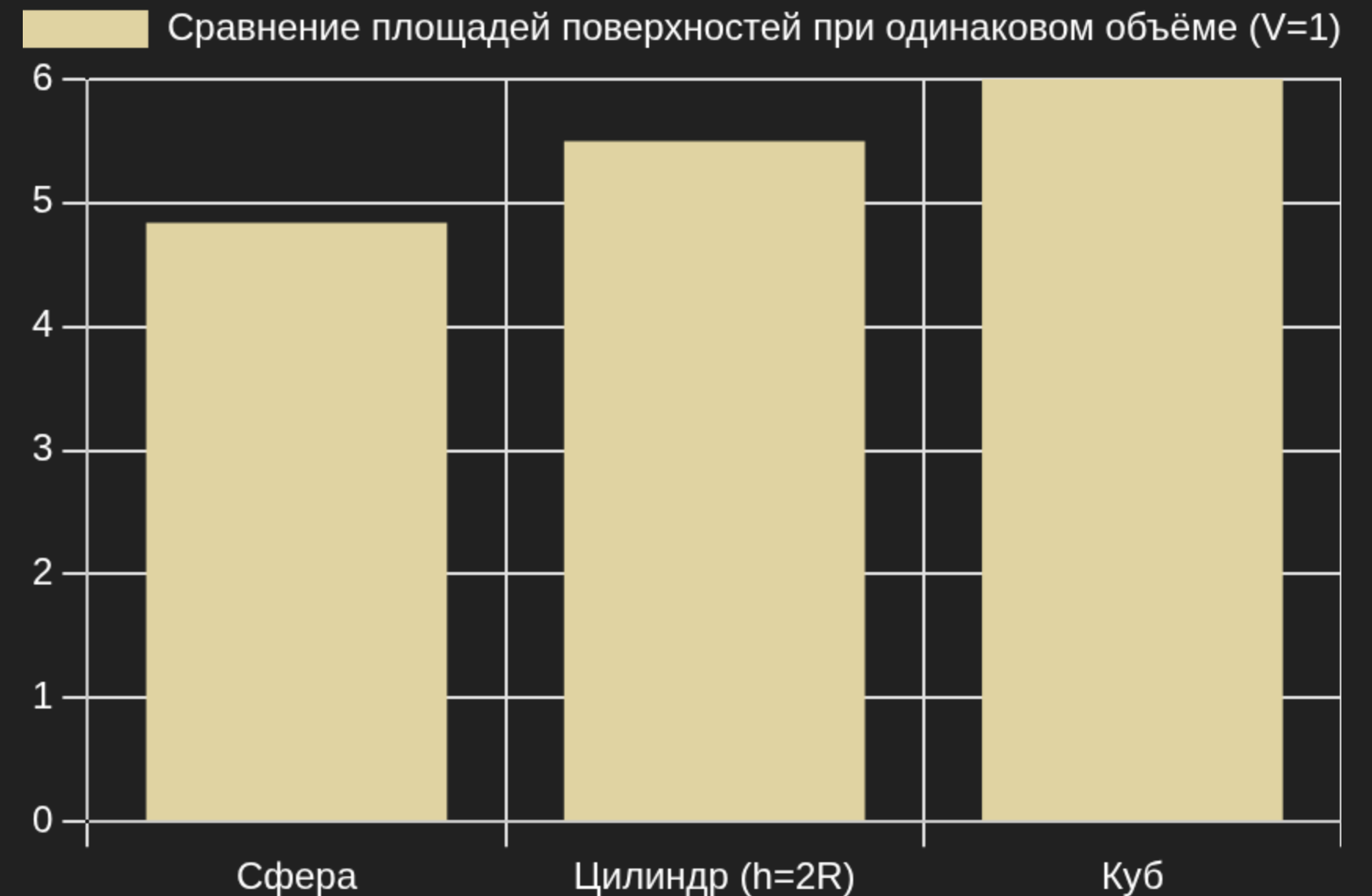
В шаровых подшипниках движения направляются множеством малых контактов, и сферическая поверхность обеспечивает предсказуемую геометрию взаимодействия деталей. Именно поэтому шаровые элементы применяют там, где важно уменьшить перекосы и выровнять нагрузку. Геометрическая симметрия становится инженерным преимуществом.



Сравнение сферических и несферических тел

При равном объёме сферическая форма даёт меньшую площадь поверхности, что помогает экономить материал и уменьшать эффект «лишнего» контакта.

Даже при выбранной конкретной форме цилиндра видно: сфера занимает лидирующую позицию по минимизации площади, а куб замыкает сравнение.



Числа получены для $V=1$ при $\pi \approx 3.1416$: сфера $A_s = 4\pi r^2$, куб $A_c = 6a^2$, цилиндр с высотой h , равной диаметру основания ($h=2R$): $A = 6\pi R^2$.

Типичные задачи по теме

01

Чаще всего встречаются задания на нахождение площади сферы по радиусу и объёма шара по диаметру. Здесь важно аккуратно работать со степенями r и переводить единицы измерения при необходимости.

02

Отдельная группа – обратные задачи: найти радиус по заданной площади поверхности или по известному объёму. Нужно уметь выразить r из формул, сохраняя правильный корень и знак.

03

Для многих типичная трудность – различить сферу и шар. Сфера даёт площадь поверхности в см^2 , а шар – объём в см^3 ; проверка размерности обычно быстро выявляет ошибку.

Алгоритм решения задач на сферу и шар

✕ Обобщённая схема действий при решении типовых школьных задач.

Готовый фундамент по теме «Сфера и шар»

- Сфера — это поверхность, а шар — объёмное тело, ограниченное этой поверхностью. Основные зависимости: $S=4\pi r^2$ и $V=(4/3)\pi r^3$. Они связывают размер и геометрию пространства.