

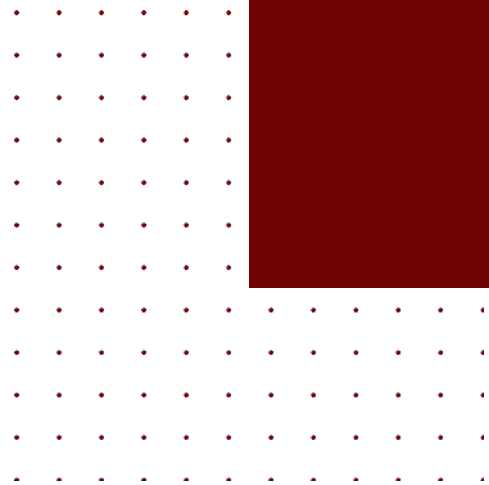
Операции над свободными векторами

Свободные векторы можно переносить, а над ними выполняют сложение, вычитание и умножение на число.

Зачем изучать векторы в 8 классе

Векторы учат одновременно видеть направление и величину. В 8 классе это связывают с координатной плоскостью, чертежами и вычислениями. Свободные векторы помогают решать задачи на переносы, симметрию и сравнение направлений.





0

Нулевой вектор показывает отсутствие перемещения

Свободный вектор — это класс равных направленных отрезков. Равными считаются отрезки с одинаковой длиной и направлением, независимо от места на чертеже. Нулевой вектор имеет длину 0 и не задаёт направления.

Школьный курс геометрии (8 класс), тема «Векторы».

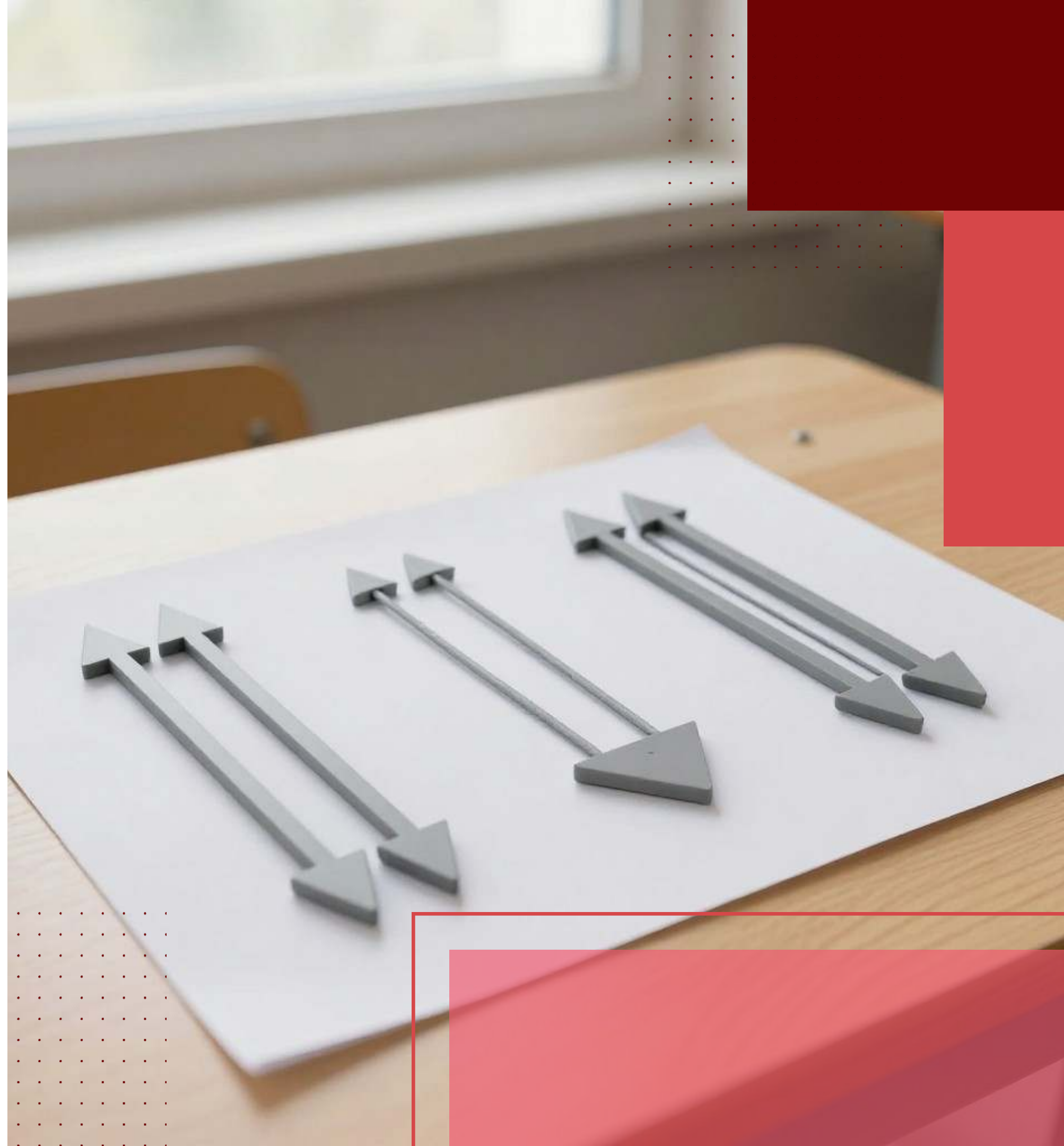
Равные, противоположные и нулевой векторы

Равные и противоположно направленные

Равные векторы имеют одинаковые длины и одинаковые направления. Их можно располагать в разных местах, но результат операций должен оставаться тем же. Это важно именно для свободных векторов.

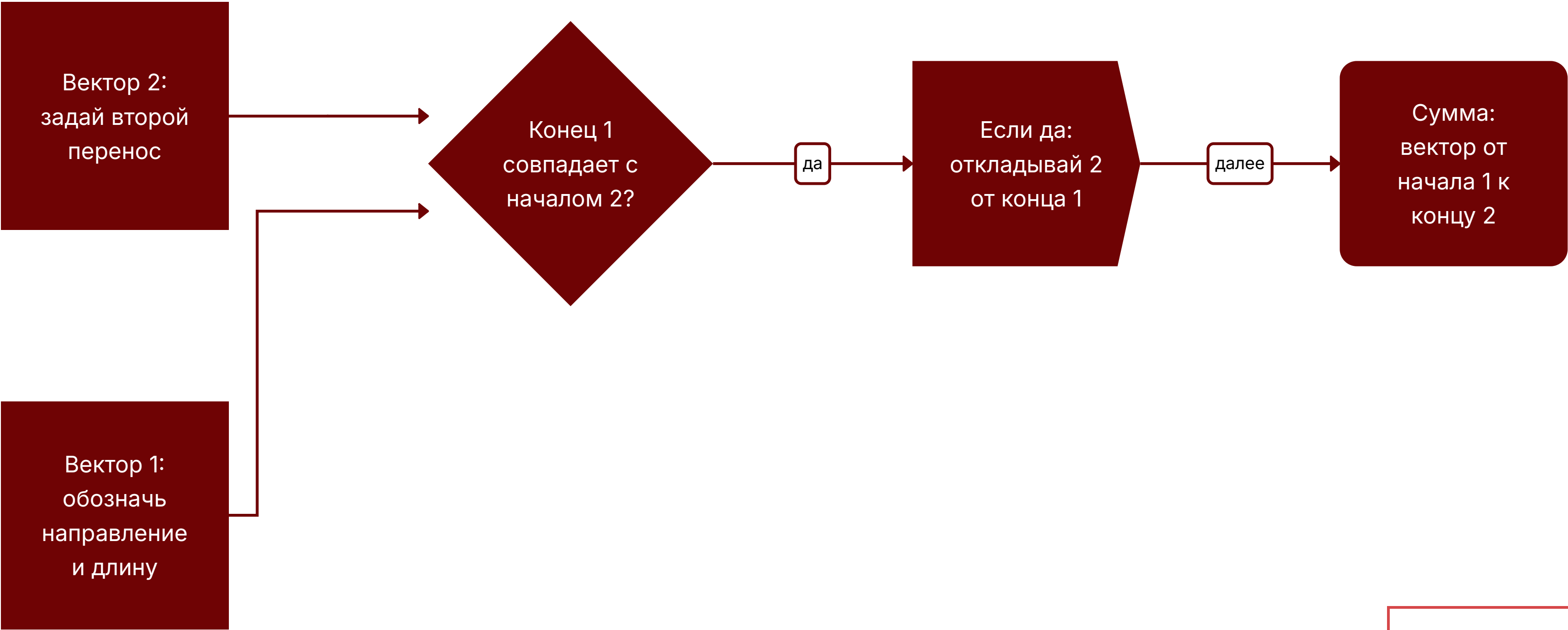
Нулевой вектор как особый случай

Противоположные векторы равны по длине, но направлены в разные стороны: один «смотрит» в точку, другой — в противоположную. Нулевой вектор выделяют отдельно, потому что его длина равна нулю.



Сложение векторов по правилу треугольника

Сумма двух перемещений строится на чертеже, опираясь на порядок «откладывания» векторов.



Как меняется результат сложения в зависимости от направления



При сложении решающим становится угол между векторами: от него зависит, «усиливается» перенос или частично компенсируется.

Если направления совпадают — сумма получается длиннее; при противоположных — длина может уменьшиться до нуля; при перпендикулярных — итог берёт вклад от обоих направлений.

Демонстрация по типовым случаям на плоскости (сонаправленные, противоположные, перпендикулярные векторы) в рамках школьного курса.

Сложение векторов по координатам

Пусть вектор a имеет координаты $(x_1; y_1)$, а вектор b — $(x_2; y_2)$. Тогда сумма записывается как $a + b = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Координаты по каждой оси складываются отдельно: по оси x — x_1 с x_2 , по оси y — y_1 с y_2 . Такой подход ускоряет решение без лишних построений на чертеже.

Для трёхмерного случая правило сохраняется: к каждой координате прибавляется соответствующая координата второго вектора. В результате получается вектор нового смещения.

Основные операции над векторами и их правила

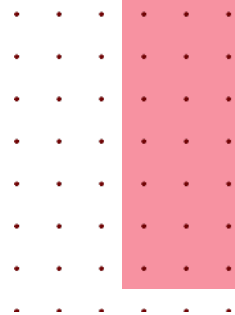
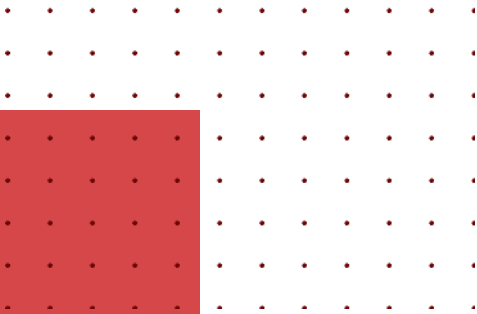


Таблица показывает, как каждой операции соответствует формула и геометрический смысл.

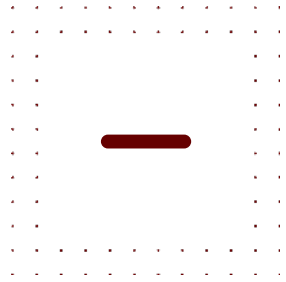
Все действия над свободными векторами сводятся к понятной логике: направлению, длине и работе с координатами.

Операция	Формула	Геометрический смысл
Сложение	$a+b$	общее перемещение
Вычитание	$a-b$	перемещение с изменением направления
Умножение на число	$k\cdot a$	изменение длины и/или поворота
Нулевой вектор	0	отсутствие направления и длины

Школьный курс геометрии 8 класса, тема «Векторы».

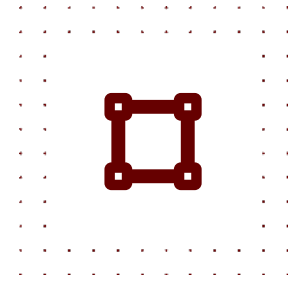


Вычитание векторов



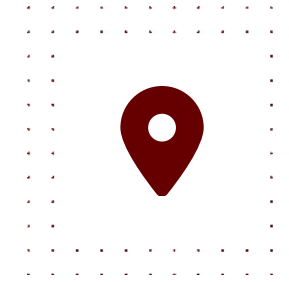
Разность через противоположный вектор

Разность $a - b$ можно заменить сложением: $a - b = a + (-b)$. Вектор $-b$ имеет ту же длину, но направлен противоположно, поэтому «вычитается» через добавление обратного.



Правило для координат

Если $a = (x_1; y_1)$, а $b = (x_2; y_2)$, то $(x_1; y_1) - (x_2; y_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. Разность координат означает изменение смещения по осям.



Зачем это в задачах

Вычитание удобно, когда нужно найти, как меняется положение точки, или выразить разность двух перемещений. В координатной форме вычисления получаются короткими и проверяемыми по знакам.

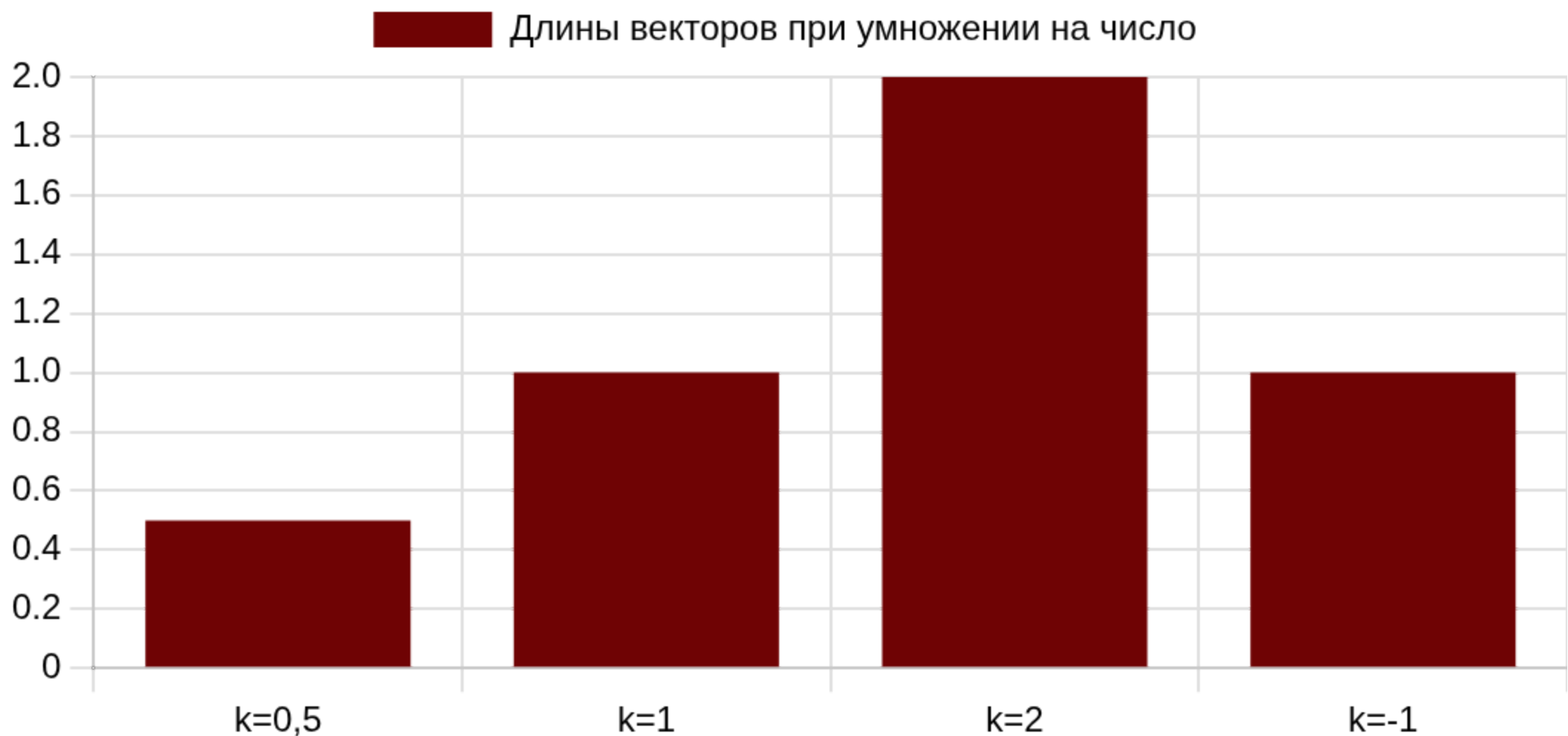
Умножение вектора на число

Если умножить вектор на положительное число k , направление сохранится, а длина увеличится или уменьшится в $|k|$ раз. Поэтому величина нового вектора прямо зависит от модуля числа.

При умножении на отрицательное число k направление меняется на противоположное, а длина всё равно масштабируется в $|k|$ раз. При $k = 0$ получается нулевой вектор, то есть отсутствие перемещения.



Зависимость длины вектора от числа-множителя

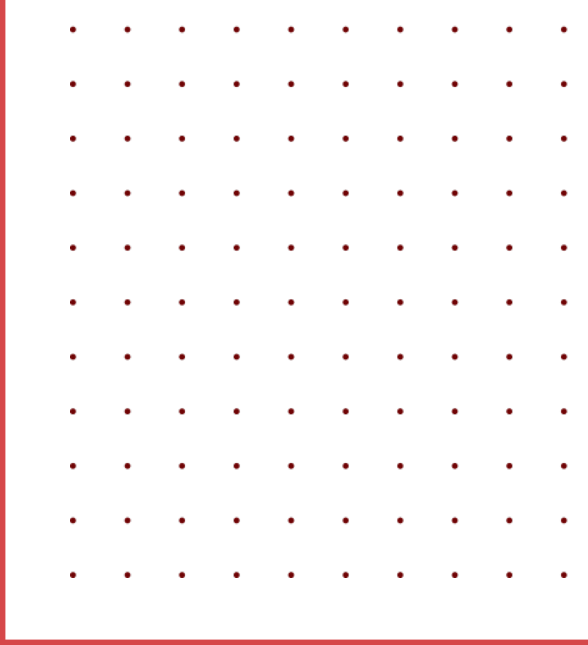


Если $|a|$ — длина исходного вектора, то длина нового равна $|ka| = |k| \cdot |a|$: при смене знака k длина не меняется.

Диаграмма показывает: длина определяется только модулем числа. Отрицательный множитель влияет лишь на поворот направления, а не на величину.

Учебная иллюстрация ($|ka| = |k| \cdot |a|$), условная шкала при $|a|=1$.

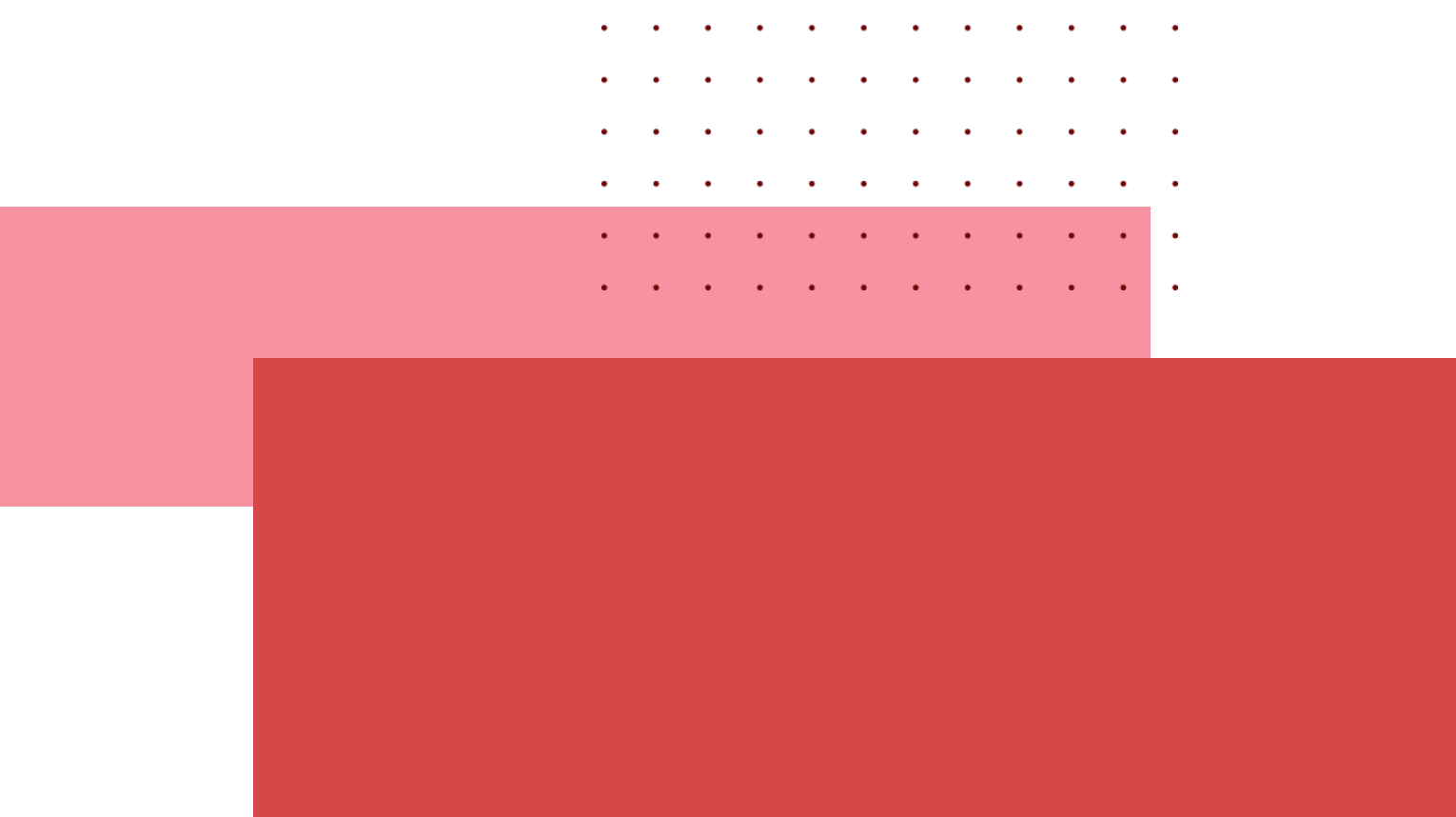
Свойства операций над векторами



Коммутативность сложения: $a+b=b+a$. Это значит, что порядок слагаемых не влияет на итоговое перемещение, поэтому выражения можно переставлять для удобных вычислений.

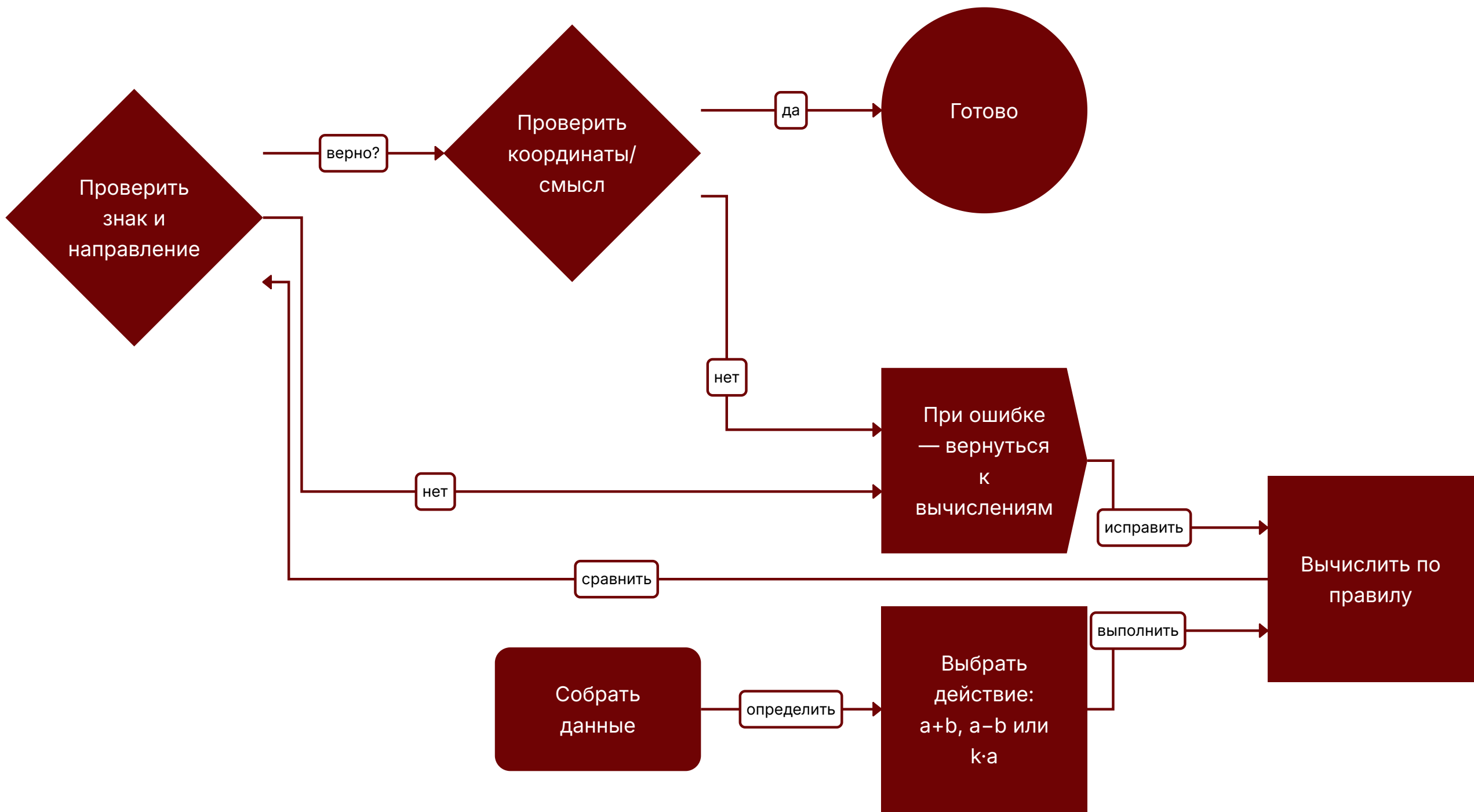
Ассоциативность: $(a+b)+c=a+(b+c)$. Благодаря этому можно группировать векторы разными способами, не меняя результата, что особенно помогает при работе с несколькими перемещениями.

Правило распределения умножения на число: $k(a+b)=ka+kb$. Оно позволяет сначала умножить каждый вектор отдельно и затем сложить, избегая построений и лишних шагов в алгебре.



Алгоритм решения задач на векторы

Логика действий при вычислениях и проверках в задачах 8 класса на операции над свободными векторами



Типичные ошибки при работе с векторами

Ошибка	Как сделать правильно	Мини-пример
Складывают длины вместо координат	При сложении складывают координаты по осям: $(x_1+x_2; y_1+y_2)$	если $a=(1;2)$, $b=(3;-1)$, то $a+b=(4;1)$
Неверный знак при вычитании	Использовать $a-b=a+(-b)$ и затем применять правило сложения	$(2;3)-(5;1)=(2-5; 3-1)=(-3;2)$
Путают направление при отрицательном множителе	При $k<0$ направление меняется на противоположное, а длина остаётся $ k \cdot a $	если a направлен вправо, то $(-2) \cdot a$ направлен влево

Материал школьной геометрии 8 класса (обобщение типовых трудностей).



Частые ошибки связаны с путаницей между координатами, длинами и направлениями при сложении, вычитании и умножении на число.

Таблица подчёркивает: рисунок полезен для понимания, но вычисления зависят от координат и знаков, а также от того, как меняется направление.



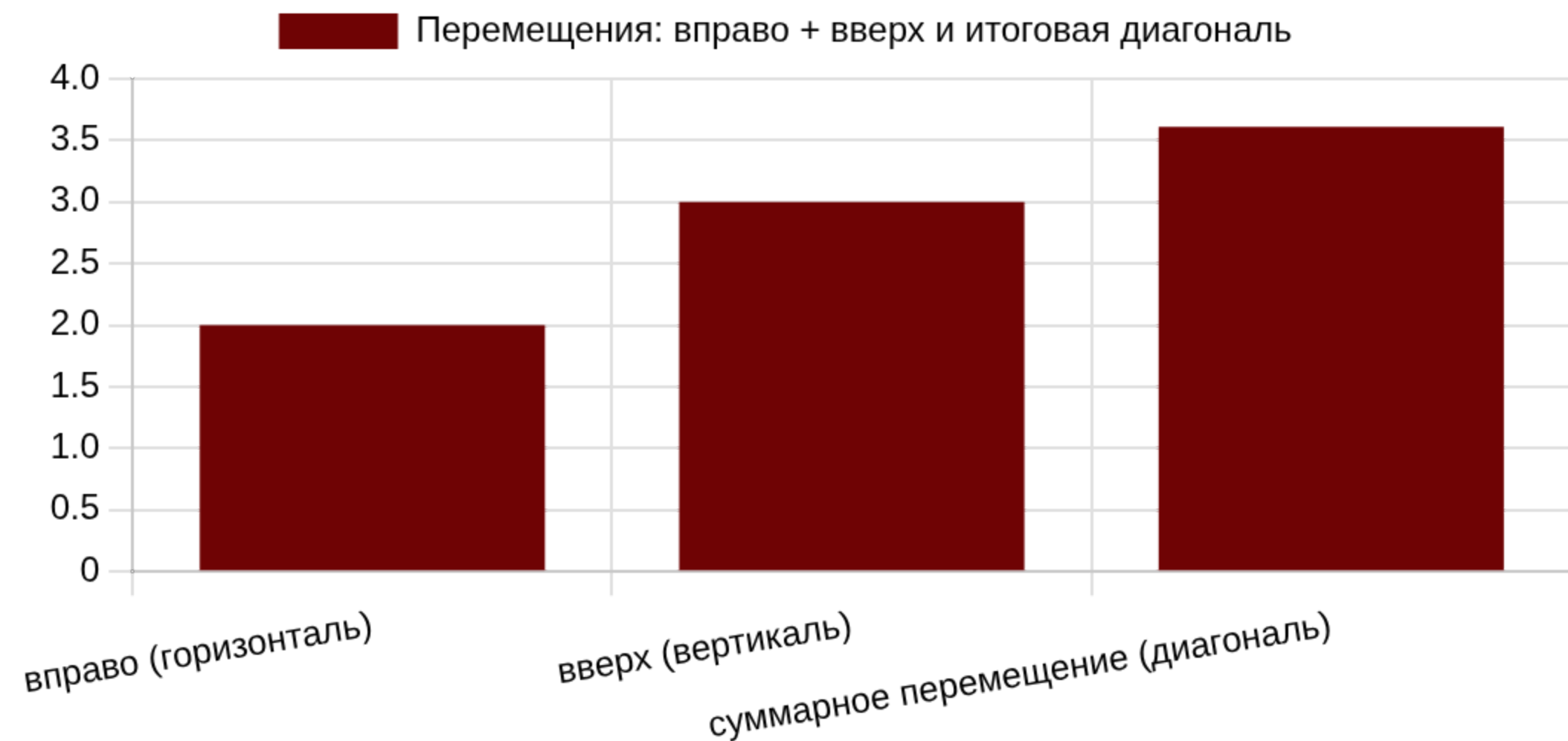
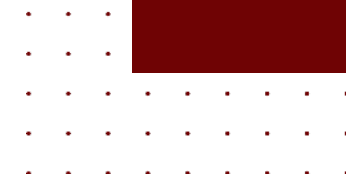

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

**По формуле можно находить
длину вектора по его
координатам, не выполняя
построение на чертеже.**

Длина вектора в декартовой системе выражается через его координаты: если $v = (x; y)$, то $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Это помогает быстро сравнивать величины перемещений.

Школьный курс геометрии 8 класса: формула расстояния/длины в координатной плоскости.

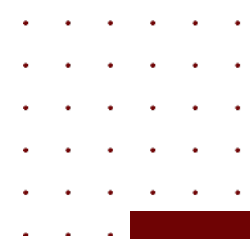
Сумма перемещений на координатной плоскости



Если два перемещения заданы перпендикулярными компонентами, итоговый вектор соединяет старт и финиш напрямую по диагонали.

Длина диагонального вектора меньше суммы длин сторон ломаной, но соответствует результату сложения векторов как прямого перемещения.

Учебная иллюстрация: пример компонент (2 и 3), диагональ $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\approx3,61$.



Применения векторов в геометрии и других предметах

В геометрии векторы связывают условия параллельного переноса и построений: равные и сонаправленные векторы помогают находить соответствующие стороны и точки.

В физике векторы используют для описания силы, скорости и перемещения: одно направление и величина заменяют длинные словесные описания движений.

В задачах на движение удобно рассматривать каждую часть пути как отдельный вектор, а затем складывать их, получая итоговое перемещение и направление движения.

Геометрический смысл операций над свободными векторами

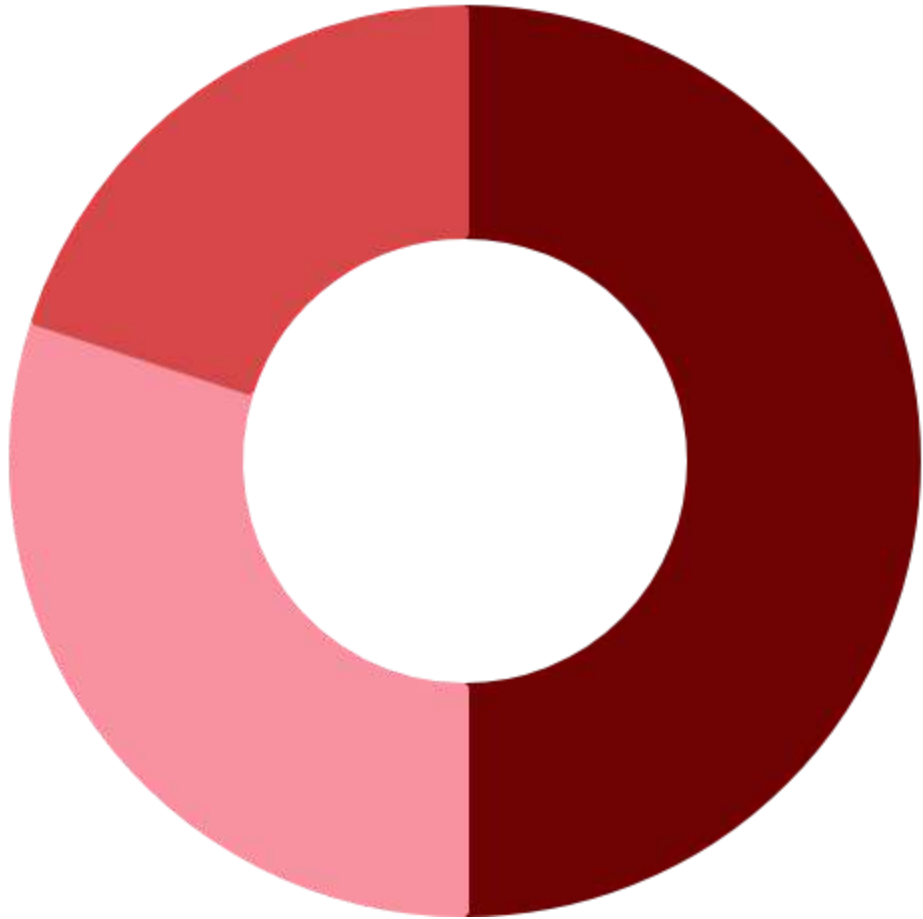
Свободный вектор можно переносить параллельно в любую точку плоскости: при таком переносе сохраняются длина и направление. Поэтому одинаковая операция над одним и тем же вектором даёт один результат.

При сложении по правилу треугольника или при умножении на число меняется только геометрический смысл результата: сумма формирует итоговое перемещение, а $k \cdot a$ сжимает/растягивает и при $k < 0$ разворачивает направление.



Какие операции встречаются в задачах чаще

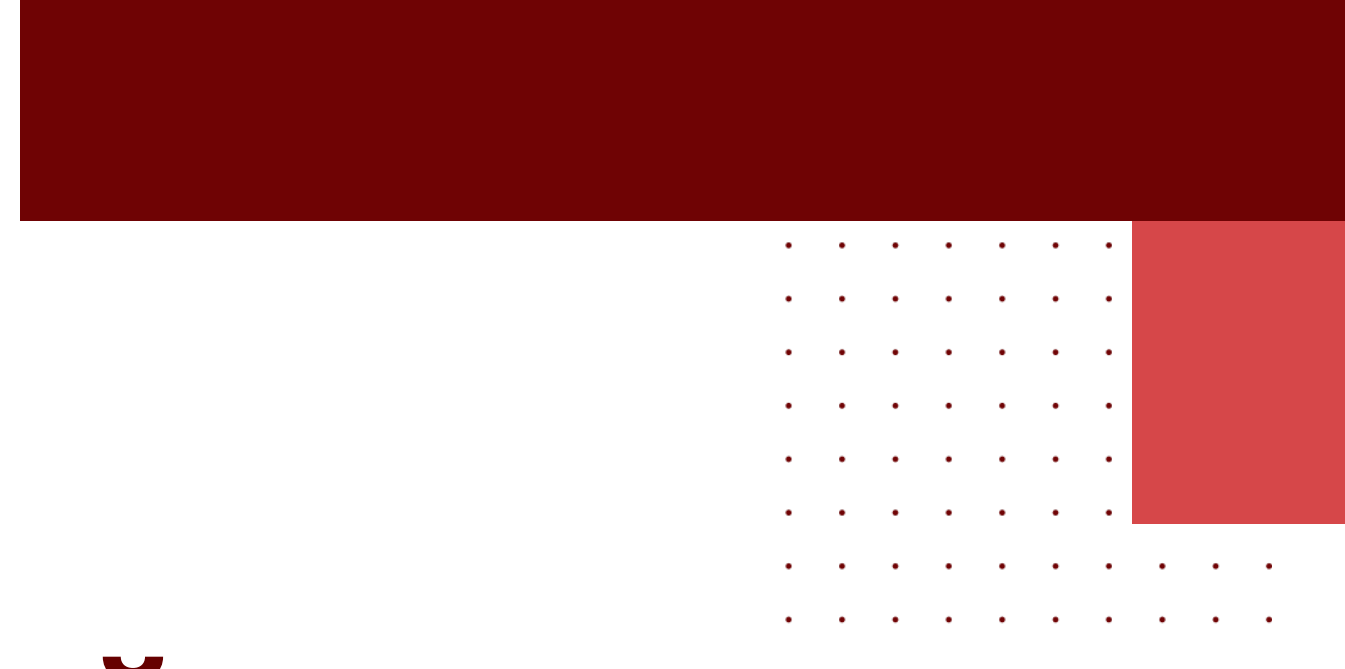
Сложение векторов Вычитание векторов Умножение на число



Обобщение типового состава упражнений (условные доли по категориям).

В типовых заданиях чаще всего требуется получить суммарное перемещение, поэтому первое место занимает сложение, а вычитание и умножение обычно сводятся к операциям через противоположный вектор.

Кольцевая диаграмма показывает преобладание сложения: с него начинаются многие формулировки по правилу треугольника, а остальные действия дополняют или уточняют результат.



Векторы — это удобный язык перемещений

Свободные векторы описывают направление и величину независимо от точки приложения. Все операции над ними выполняются по строгим правилам для направлений и координат, включая нулевой вектор, равный «отсутствию перемещения».

