



Простейшие дифференциальные уравнения в курсе алгебры 11 класса

Уравнение, в котором важны функция и её изменение.

Почему это важно в школьной математике

Дифференциальные уравнения соединяют производную и интеграл, поэтому помогают описывать движение, охлаждение, рост и другие процессы, где решающим становится не только значение величины, но и скорость его изменения.



Основные понятия и обозначения



Порядок уравнения

Порядок дифференциального уравнения определяется наибольшей производной, входящей в запись. В школьном курсе чаще всего рассматривают уравнения первого порядка, где присутствует только производная y' .



Частное решение

Если дополнительно задано начальное условие $y(x_0)=y_0$, из семейства выбирается одна конкретная функция. Такое решение называют частным, потому что оно соответствует одной точке на плоскости.



Запись ответа

В ответе важно различать символы y , y' и C , а также следить за областью допустимых значений. Небольшая ошибка в преобразовании может изменить весь результат.



Общее решение

Общее решение содержит произвольную постоянную C и задаёт целое семейство функций. Оно показывает все возможные кривые, которые удовлетворяют данному дифференциальному уравнению.



Проверка результата

Полученное выражение нужно обязательно подставить в исходное уравнение. Только совпадение после подстановки и выполнение начального условия подтверждают, что решение найдено правильно.



Геометрический смысл решения

Кривая как решение

Каждое решение можно представить графиком на координатной плоскости. Тогда дифференциальное уравнение описывает не только саму кривую, но и то, как она изгибается в каждой точке.

Семейство интегральных кривых

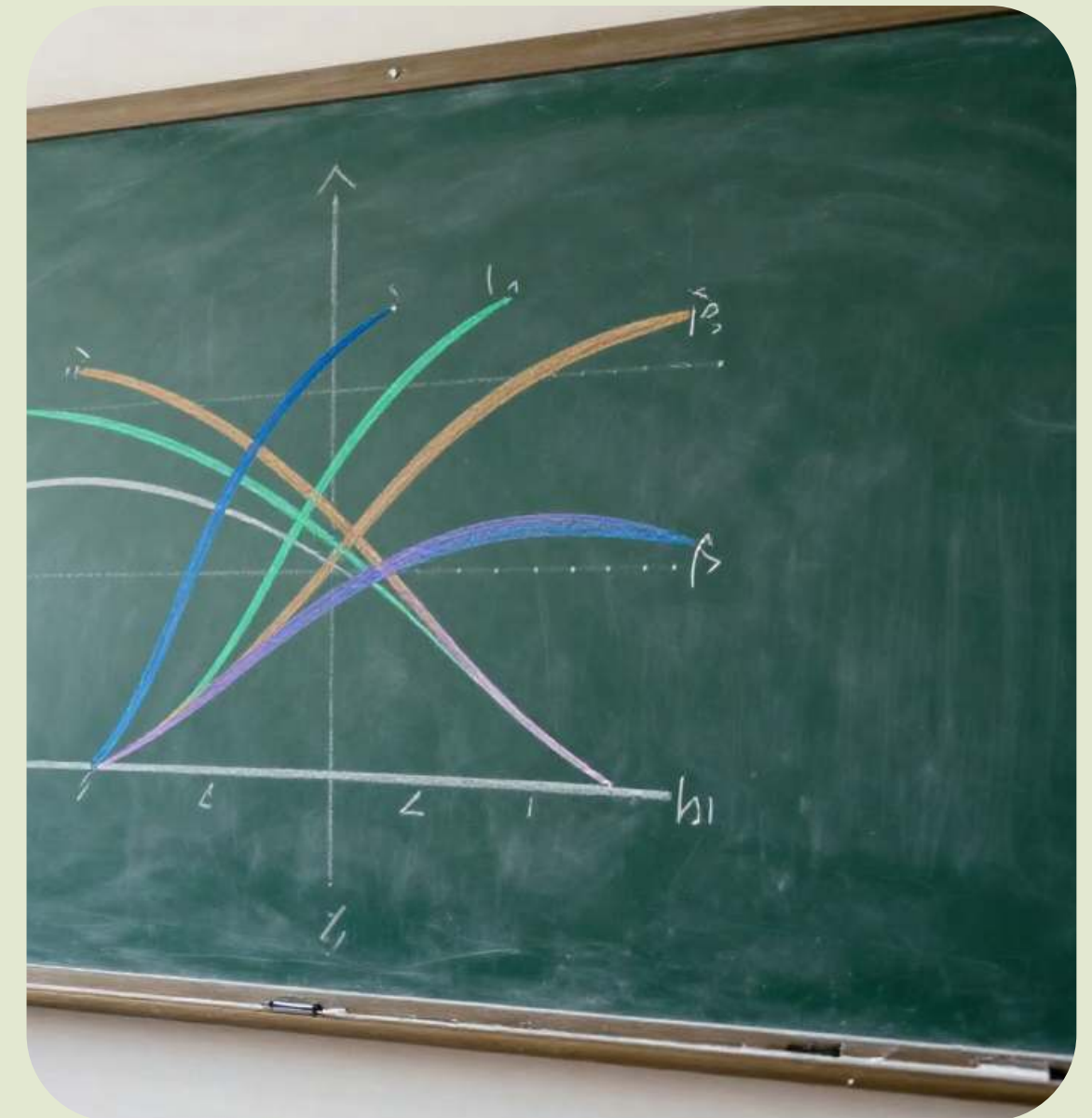
Одному и тому же уравнению обычно соответствует несколько решений, отличающихся постоянной C . Эти графики образуют семейство интегральных кривых, среди которых выбирается нужная по условию.

Смысл производной

Производная y' задаёт наклон касательной, то есть мгновенный темп изменения функции. Поэтому уравнение связывает форму графика с его локальным поведением, а не только с отдельными значениями.

Наглядность графиков

Поле направлений и несколько кривых на одном рисунке помогают увидеть закономерность решения. Такая визуализация показывает, как одно уравнение задаёт целый набор допустимых форм графика.



Основные виды простейших дифференциальных уравнений первого порядка

Вид	Форма	Приём	Пример
Разделяемые	$y'=f(x)g(y)$	Разделение переменных	$y'=xy$
Линейные	$y'+p(x)y=q(x)$	Интегрирующий множитель	$y'+y=e^x$
Рост и распад	$y'=ky$	Прямое интегрирование	$y'=0,5y$

По виду записи обычно сразу видно, какой метод применить: разделение переменных, интегрирующий множитель или прямое интегрирование.

Классификация помогает сразу выбрать подход к решению и понять, какое преобразование будет самым удобным.

Обобщение стандартных школьных форм простейших дифференциальных уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

1

Распознавание вида

Сначала проверяют, можно ли представить правую часть как произведение функции от x и функции от y . Если это удаётся, уравнение удобно преобразовать к форме с разделёнными переменными.

2

Разделение выражений

Далее все множители, содержащие y , переносят в одну сторону, а зависящие от x — в другую. В результате получают запись вида $dy/g(y)=f(x)dx$, пригодную для интегрирования.

3

Интегрирование частей

После разделения обе части интегрируют независимо. Так исходное дифференциальное уравнение превращается в соотношение между первообразными, а затем дополняется постоянной интегрирования C .

4

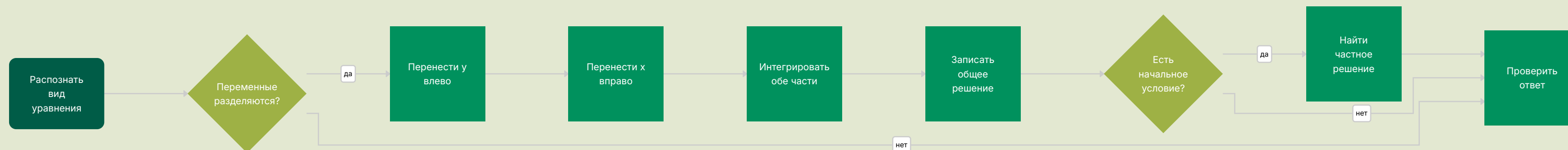
Получение ответа

Остаётся выразить y через x , если это возможно, и проверить результат подстановкой. Особое внимание нужно уделять случаям, когда при делении могли быть потеряны отдельные решения.



Алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными

Последовательность шагов для школьных задач первого порядка



Линейное уравнение первого порядка

01

Стандартная форма

Линейное уравнение записывают как $y' + p(x)y = q(x)$. Переменная y входит только в первой степени, а коэффициенты зависят лишь от независимой переменной x .

02

Почему оно важно

Такая форма часто встречается в прикладных задачах, где есть внешнее воздействие и собственное изменение системы. Именно поэтому линейные уравнения считаются ключевым примером школьной темы.

03

Как решают

Главный приём состоит в использовании интегрирующего множителя. Он позволяет преобразовать левую часть в производную произведения и свести задачу к обычному интегрированию.



Как коэффициенты влияют на поведение решения

Диаграмма показывает не численные измерения, а качественную роль коэффициентов в линейной модели: одни параметры усиливают затухание, другие задают дополнительный сдвиг решения.

Схематическое представление свойств линейного дифференциального уравнения первого порядка

Наиболее заметное влияние в линейном уравнении связано с устойчивостью и внешним воздействием: коэффициенты меняют характер решения даже при одинаковой начальной точке.

Интегрирующий множитель и преобразование уравнения

1 Выбор множителя

Для уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ вводят множитель $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Он подбирается так, чтобы левая часть после умножения приобрела удобный вид.

2 Преобразование записи

После умножения на $\mu(x)$ выражение слева превращается в производную произведения $(\mu y)'$. Тогда уравнение записывается как $(\mu y)' = \mu q(x)$, что существенно упрощает решение.

3 Переход к интегралу

Остаётся проинтегрировать обе части и затем выразить y . Вся сложность сводится к одному аккуратному интегрированию, после которого проверяют начальное условие и область допустимых значений.



Модель роста и распада

Закон пропорциональности

В модели $y' = ky$ скорость изменения прямо пропорциональна самой величине y . Если значение велико, оно меняется быстрее; если мало, процесс замедляется.

Спад при $k < 0$

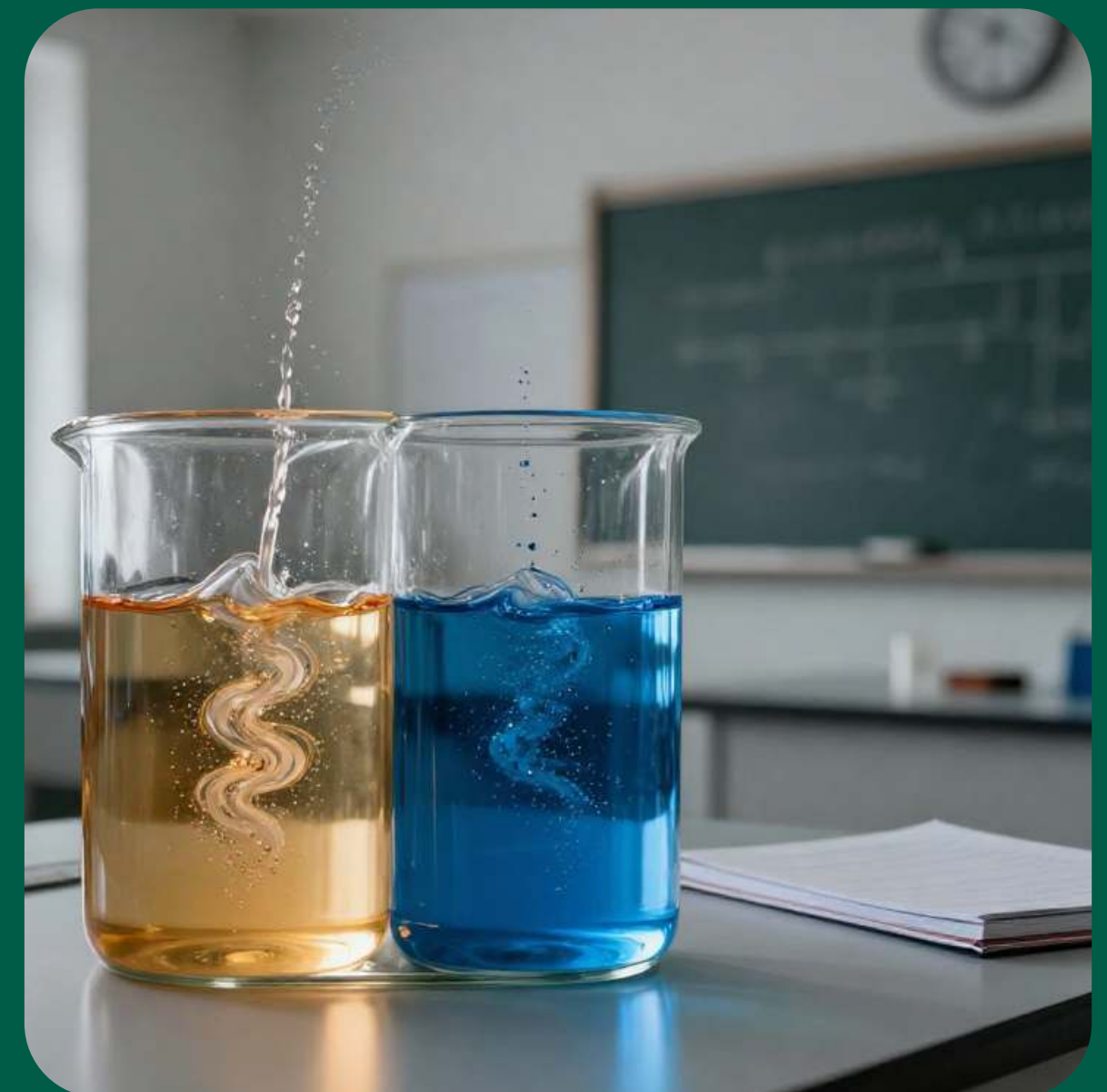
Отрицательный коэффициент k задает убывание: величина уменьшается тем быстрее, чем больше ее текущее значение. Так описывают радиоактивный распад и некоторые процессы разрядки.

Рост при $k > 0$

Положительный коэффициент k приводит к экспоненциальному росту. Такая зависимость характерна для процессов, где увеличение усиливает само себя, например при размножении клеток или накоплении капитала.

Общее решение

Решение уравнения имеет вид $y = Ce^{kx}$. Константа C определяется начальными условиями и показывает, какое именно состояние системы выбрано из бесконечного семейства кривых.



Экспоненциальный рост и экспоненциальный спад

Обе кривые начинаются с одного значения, поэтому различие полностью определяется знаком коэффициента k и не зависит от начального уровня.

Учебная иллюстрация по формуле $y = Ce^{kx}$, значения рассчитаны для наглядности.

Положительный k вызывает ускоряющийся рост, отрицательный — быстрое убывание к нулю; начальное значение задает только масштаб.

Начальные условия и единственность решения

01

Фиксация точки

Начальное условие $y(x_0)=y_0$ выбирает конкретную точку на плоскости и тем самым отсекает все остальные кривые семейства, оставляя только одно подходящее решение.

02

Одна кривая — одно условие

Для простейших уравнений первого порядка в школьных задачах обычно выполняется локальная единственность: через заданную точку проходит только одна функция, удовлетворяющая уравнению.

03

Проверка соответствия

После нахождения формулы обязательно подставляют x_0 и y_0 . Если условие не выполнено, найденное выражение нельзя считать искомым частным решением, даже если оно удовлетворяет уравнению.

Типичные формы уравнений и способы их решения

Таблица показывает, что прежде всего нужно распознать структуру уравнения, а затем выбрать соответствующий прием преобразования и интегрирования.

Школьный курс алгебры и начала анализа, 11 класс

Уравнение	Метод	Результат
$y'=f(x)g(y)$	Разделить переменные	Общий интеграл
$y'+p(x)y=q(x)$	Интегрирующий множитель	Решение через $\mu(x)$
$y'=ky$	Прямое интегрирование	$y=Ce^{kx}$

Разные записи сводятся к нескольким базовым приемам; успех решения зависит от быстрого распознавания типа уравнения.

Проверка найденного решения

● Подстановка в уравнение

Сначала подставляют найденную функцию и ее производную в исходное уравнение. Совпадение должно быть точным, иначе решение получено с ошибкой преобразования.

● Проверка условия

Затем убеждаются, что выполняется начальное условие. Именно оно отделяет частное решение от общего и позволяет выбрать единственную кривую из семейства.

● Область допустимых значений

Важно проверить, не возникло ли деление на выражение, которое может обратиться в ноль. Иначе можно потерять допустимые решения или получить лишние.

● Особые решения

При преобразованиях иногда исключаются случаи, которые не видны после деления на переменную. Такие решения нужно искать отдельно, особенно в уравнениях с нулями множителей.

● Типичные ошибки

Чаще всего ошибаются при переносе дробей, потере константы интегрирования и подстановке без проверки. Надежный ответ всегда должен согласовываться и с формулой, и с условием.

От задачи к уравнению

Последовательность построения модели и получения частного решения



Где работают простейшие уравнения



Физика: охлаждение и заряд

Термометр на графике показывает, как тело постепенно приближается к температуре среды. Точно так же можно описать изменение электрического заряда, если скорость убывания зависит от его текущей величины. В обоих случаях важна не только величина, но и ее темп изменения.



Биология: рост живой системы

Экспоненциальная кривая хорошо передает поведение бактерий в благоприятной среде. Если условия долго не меняются, численность растет быстрее с каждым новым шагом, а график становится все круче. Поэтому одна и та же формула помогает объяснять развитие популяции на раннем этапе.



Экономика: накопление и проценты

Вклад в банке наглядно показывает, как небольшое начальное значение со временем увеличивается за счет постоянного процента. На схеме это выглядит как плавный подъем кривой, где каждый следующий промежуток приносит больший прирост, чем предыдущий, если проценты начисляются регулярно.

Сравнение характерных процессов по типу изменения

Диаграмма объединяет разные предметные области через общий признак: изменение зависит от текущего состояния системы, а не только от времени.

Учебная иллюстрация по типичным примерам школьного курса; распределение условное.

Несмотря на различие сюжетов, все примеры описываются одной идеей — закон изменения задается производной от самой величины.

Типичные ошибки при решении простейших уравнений

1

Неверный порядок

Сначала определяют, какая производная входит в уравнение. Если перепутать порядок, можно выбрать не тот метод и сразу потерять правильный путь решения.

2

Ошибочное разделение

При отделении переменных нужно перенести все выражения с y в одну часть, а с x — в другую. Неполное разделение делает последующее интегрирование неверным.

3

Потеря множителей

Во время интегрирования легко забыть коэффициент или константу. Даже одна пропущенная часть меняет итоговую формулу, поэтому каждое преобразование следует записывать аккуратно.

4

Игнорирование области

Если в ходе решения делили на выражение с переменной, нужно проверить, не обращается ли оно в ноль. Иначе можно не заметить особое решение.

5

Нет проверки

Последний шаг обязателен: найденную функцию подставляют обратно и сверяют с начальным условием. Без такой проверки даже внешне красивый ответ может оказаться неверным.



Простейшие дифференциальные уравнения: модель изменения

Эта тема показывает, как из производной и интеграла рождается рабочая модель реального процесса. Умение распознать вид уравнения, решить его и проверить ответ формирует важный математический навык.

