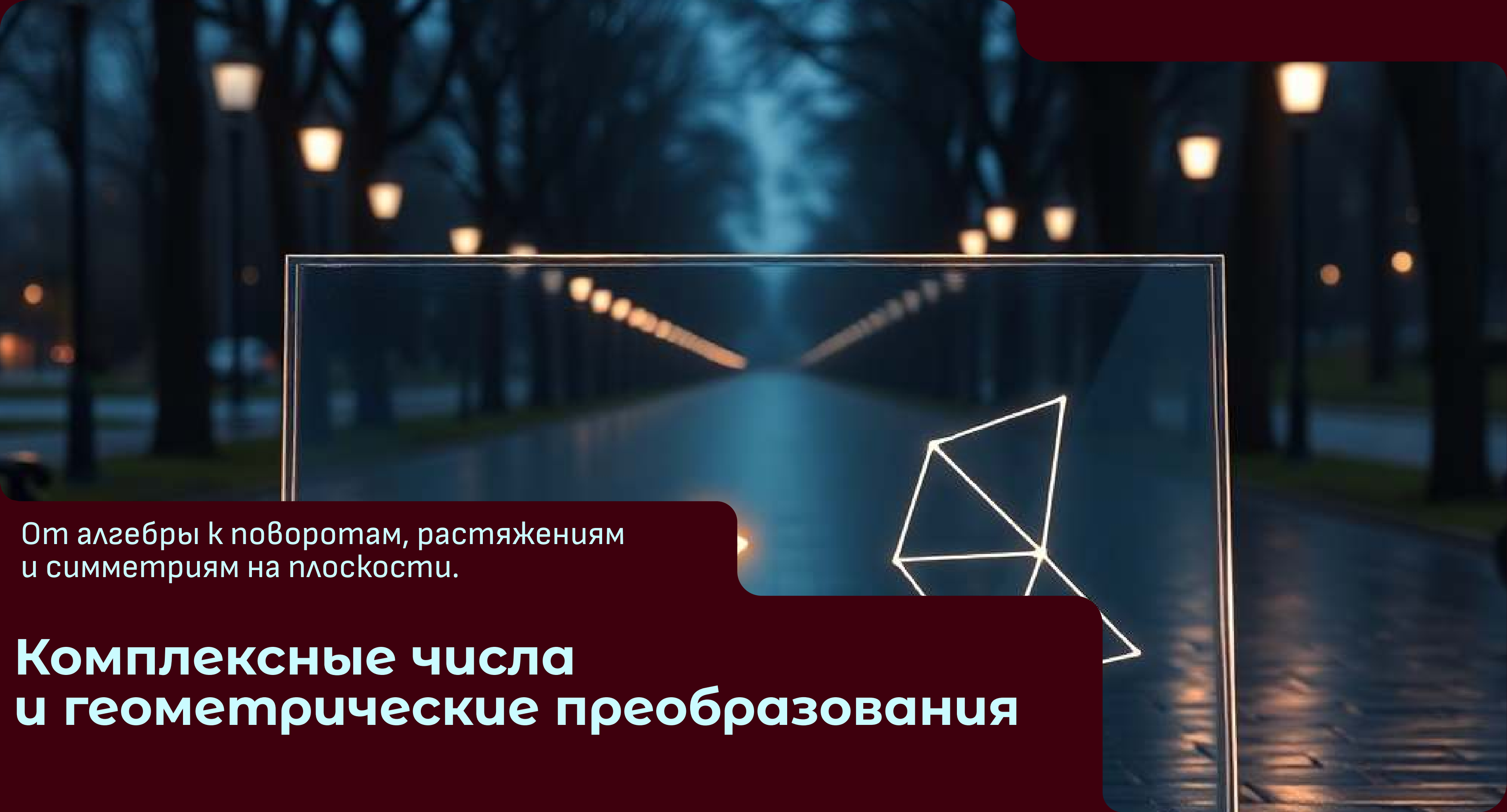


The background of the slide is a blurred night photograph of a street lined with trees and illuminated by warm, glowing streetlights. The lights create a bokeh effect, with some appearing as sharp points and others as soft, out-of-focus circles. The street itself is dark and reflective, mirroring the lights above. In the center of the image, there is a white, wireframe geometric diagram. It consists of several interconnected lines forming a three-dimensional shape, resembling a cube or a complex polyhedron, with some internal lines suggesting depth and structure. The overall color palette is dominated by the cool blues and greys of the night scene, contrasted with the warm yellows and oranges of the streetlights.

От алгебры к поворотам, растяжениям
и симметриям на плоскости.

Комплексные числа и геометрические преобразования

Зачем в алгебре 11 класса изучают комплексные числа

Комплексные числа появляются там, где действительных корней уже недостаточно. Они делают уравнения с отрицательным дискриминантом осмысленными, а алгебраические операции — наглядными на комплексной плоскости.



Определение и запись комплексного числа

01 Общий вид

Комплексное число записывают как $z=a+bi$, где a — действительная часть, а b — мнимая. Здесь i обозначает число, для которого $i^2=-1$.

02 Частные случаи

Если $b=0$, число становится действительным и лежит на оси Re .
Если $a=0$, получается чисто мнимое число, расположенное на оси Im .

03 Равенство чисел

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда совпадают их действительные и мнимые части. Сравнивать нужно обе координаты одновременно.

04 Сопряжённое число

Для $z=a+bi$ сопряжённое число записывают как $\bar{z}=a-bi$. Оно отличается только знаком мнимой части и отражает точку относительно действительной оси.

05 Смысл записи

Такая форма позволяет рассматривать число как пару координат и связывать алгебраические действия с геометрическим положением точки на плоскости.

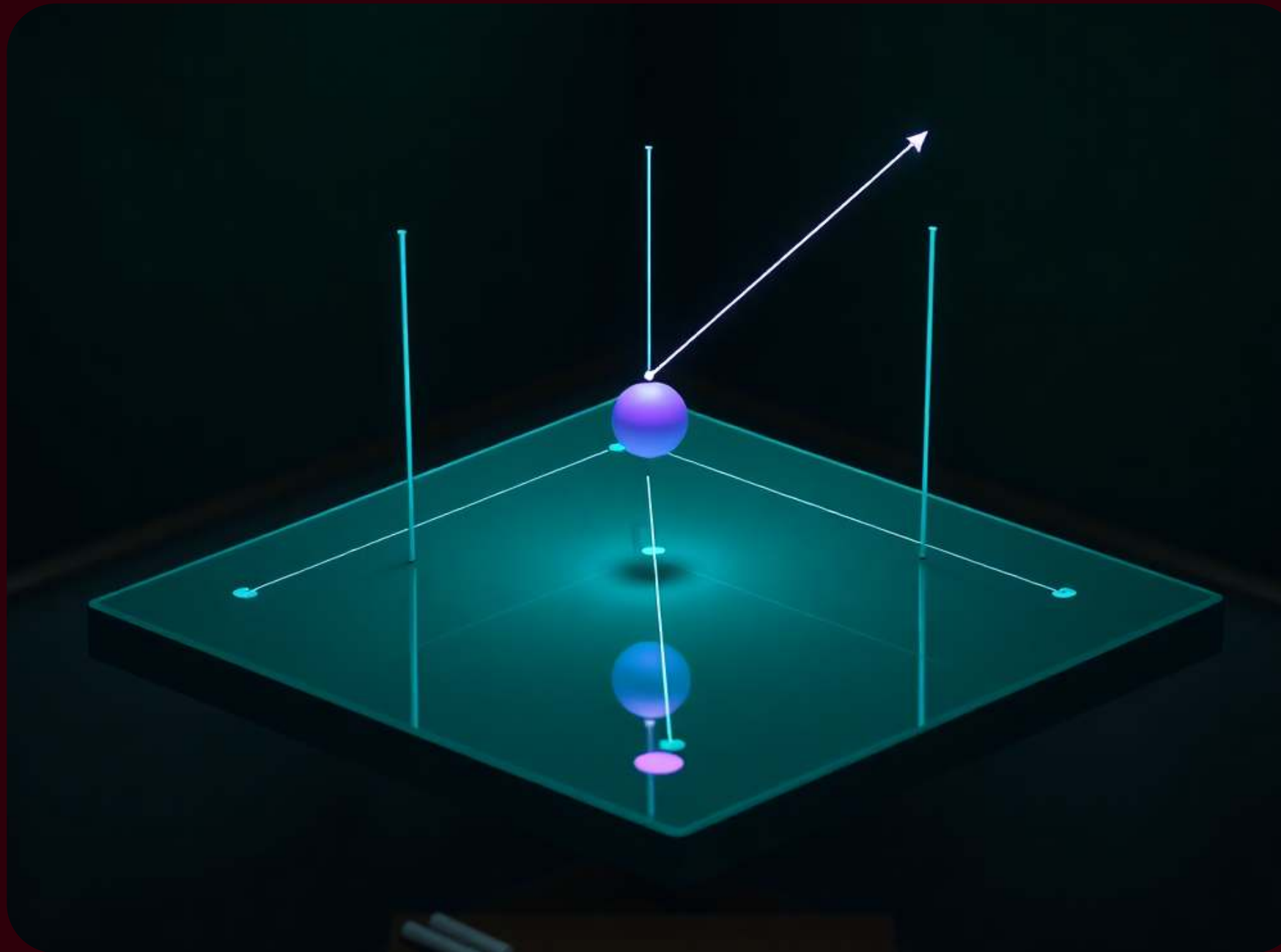
Основные действия с комплексными числами

Операция	Формула	Смысл
Сложение	$(a+bi)+(c+di)$	По компонентам
Вычитание	$(a+bi)-(c+di)$	Разность координат
Умножение	$(a+bi)(c+di)$	С учётом $i^2=-1$
Деление	Через сопряжённое	Рационализация знаменателя

Алгебраические операции над комплексными числами выполняются по строгим правилам и сохраняют связь с двумя координатами.

Сложение и умножение можно понимать как операции над координатами, поэтому комплексные числа удобно использовать и в вычислениях, и в геометрии.

Комплексная плоскость и её координаты



Оси координат

Действительную часть числа откладывают по оси Re , а мнимую — по оси Im . Так каждому числу $a+bi$ соответствует точка с координатами (a, b) .

Геометрический образ

Комплексное число можно воспринимать не только как запись, но и как точку или вектор, направленный из начала координат к этой точке.

Модуль числа

Модуль $|z|$ показывает расстояние от начала координат до точки z . Он всегда неотрицателен и характеризует «длину» комплексного числа.

Аргумент числа

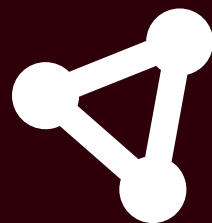
Аргумент $\arg(z)$ — это угол между положительным направлением оси Re и лучом, идущим к точке. Он задаёт направление на плоскости.

Модуль и аргумент на примерах

Одинаковый модуль не означает одинаковое положение: важен ещё аргумент, который задаёт направление точки на плоскости.

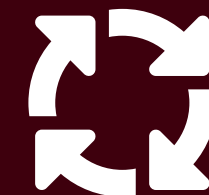
Модуль отражает расстояние до начала координат, а аргумент — ориентацию. Вместе они полностью описывают положение комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа



Запись через модуль и угол

Если $z \neq 0$, то число можно представить как $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r — модуль, а φ — аргумент. Эта форма подчёркивает геометрический смысл записи.



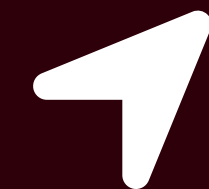
Удобство вычислений

В тригонометрической форме проще выполнять умножение, деление и возведение в степень. Вместо громоздкого раскрытия скобок работают правила для модулей и аргументов.



Формула Эйлера

Соотношение $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ связывает тригонометрическую и показательную записи. Благодаря ему комплексные числа удобно описывать в кратком виде.

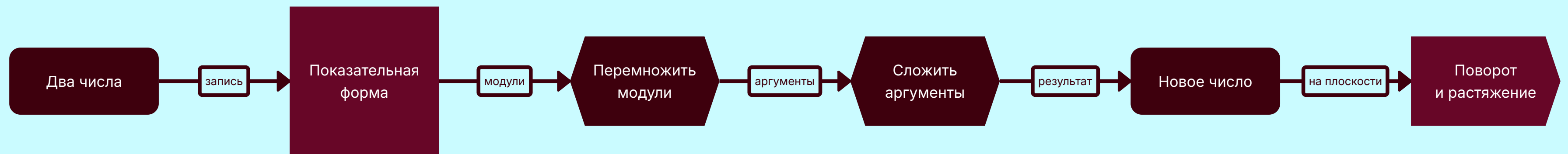


Поворот и масштаб

Запись $z = re^{i\varphi}$ показывает, что число задаёт одновременно растяжение в r раз и поворот на угол φ . Это особенно важно для геометрических преобразований.

Как умножение действует на комплексной плоскости

Из показательной формы комплексных чисел следует геометрический смысл умножения.



Сопряжённые числа и симметрия относительно оси Re

01

Определение

Для $z=a+bi$ сопряжённое число записывают как $\bar{z}=a-bi$. Меняется только знак мнимой части, поэтому действительная координата остаётся прежней.

02

Геометрическая симметрия

Точки z и $\bar{z}$ расположены симметрично относительно действительной оси. Отражение не меняет расстояние до начала координат, а лишь переворачивает направление.

03

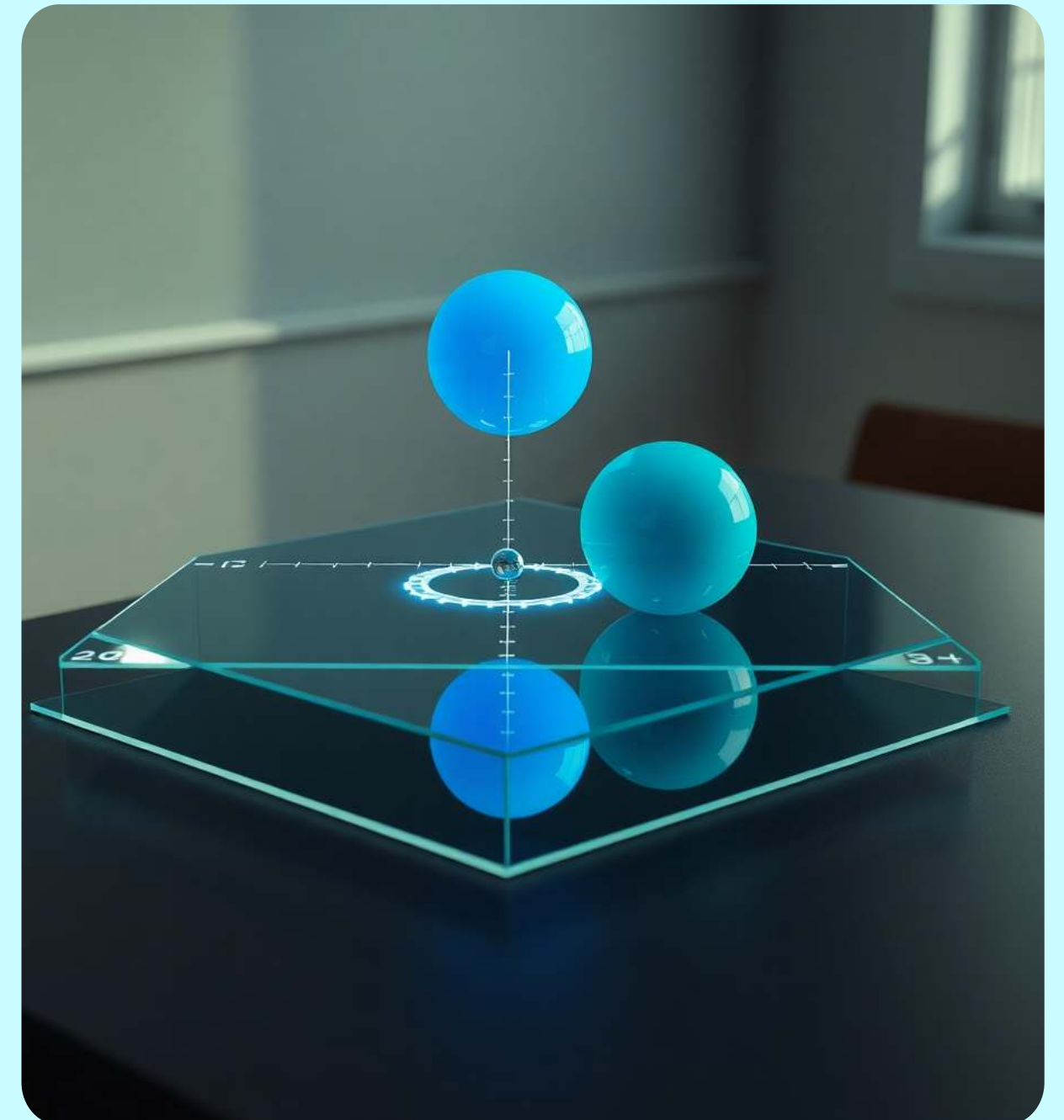
Произведение с сопряжённым

При перемножении $z\bar{z}$ получается $a^2+b^2=|z|^2$. Это действительное неотрицательное число, которое удобно использовать при делении и преобразовании дробей.

04

Почему это важно

Сопряжение сохраняет модуль и меняет знак аргумента. Благодаря этому оно упрощает вычисления и помогает превращать выражения с комплексными числами в более удобный вид.





Корни уравнения $z^n=1$ и правильные многоугольники

- **Корни из единицы**

Решения уравнения $z^n=1$ называют n -ми корнями из единицы. Все они лежат на единичной окружности и равномерно распределены по ней.

- **Регулярный шаг по аргументу**

Аргументы соседних корней отличаются на $360^\circ/n$. Поэтому точки располагаются с одинаковым угловым промежутком и образуют симметричную конфигурацию.

- **Связь с многоугольником**

При $n=4$ получаются числа $1, i, -1$ и $-i$. Эти точки — вершины квадрата, что наглядно показывает связь алгебры с геометрической симметрией.

Действие преобразований $z \rightarrow az + b$

Одна и та же формула объединяет перенос, поворот и изменение масштаба, поэтому комплексная запись удобна для описания движений на плоскости.

Чем больше параметров участвует в преобразовании, тем богаче его геометрический эффект: положение и форма фигуры меняются одновременно.

Функции комплексного переменного

01 Общий вид

Функция комплексного переменного задаёт соответствие между двумя комплексными числами: каждому z ставится в соответствие одно значение $w=f(z)$, определённое на комплексной плоскости.

02 Примеры функций

К числу базовых примеров относятся $f(z)=z^2$, $f(z)=1/z$ и $f(z)=e^z$. Они показывают, как разные правила по-разному преобразуют точки и линии.

03 Геометрический смысл

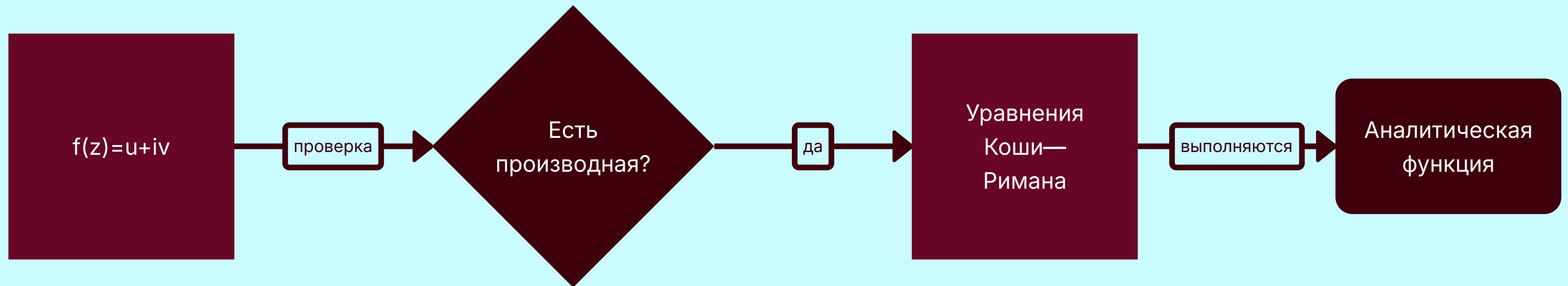
При таком отображении меняются расстояния, углы и расположение фигур. Поэтому одна и та же область может стать растянутой, закрученной или отражённой относительно новых осей.

04 Почему это важно

Изучение этих функций помогает связывать алгебраическую формулу с образом на плоскости и готовит к пониманию более сложных преобразований в анализе и моделировании.

Когда функция становится аналитической

Схема показывает, как условие комплексной дифференцируемости приводит к уравнениям Коши—Римана и далее к аналитичности.



Уравнения Коши—Римана

Запись условия

Для функции $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ необходимы равенства $u_x=v_y$ и $u_y=-v_x$. Они связывают изменение действительной и мнимой частей в одной и той же точке.

Смысл производных

Обозначения u_x , u_y , v_x и v_y показывают частные производные по координатам x и y . Эти величины описывают, как быстро меняются обе части функции при малом смещении.

Геометрическое ограничение

Условия Коши—Римана не позволяют выбирать u и v независимо. Они задают строгую согласованность, благодаря которой комплексная функция может быть дифференцируема и вести себя регулярно.

Как разные функции преобразуют плоскость

Каждое отображение действует по-своему: одно усиливает вращение, другое меняет местами близкие и далёкие области, третье переводит прямые в кривые.

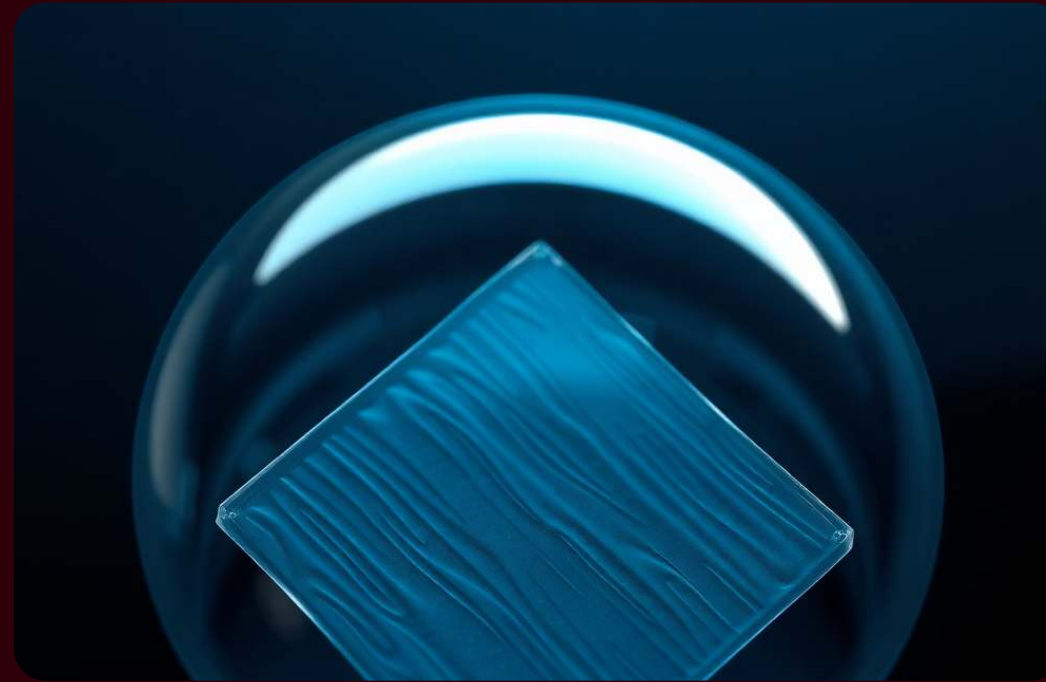
Комплексные функции не просто вычисляют новые значения, а перестраивают геометрию плоскости, сохраняя одни свойства и изменяя другие.

Конформные отображения и сохранение углов



Угол остаётся тем же

На рисунке две линии пересекаются под определённым углом, а после преобразования этот угол сохраняется. Меняется длина отрезков и форма области, но локальная геометрия остаётся узнаваемой, что делает такие отображения особенно ценными.



Масштаб без искажения формы

Если рассмотреть очень маленький участок, конформное отображение ведёт себя почти как поворот и растяжение одновременно. Благодаря этому малые фигуры не «ломаются», а лишь меняют размер и ориентацию в окрестности точки.



Где это используют

Сохранение углов важно в картографии, аэродинамике и теории потенциала. В этих областях нужно передавать форму процесса или поверхности так, чтобы ключевые локальные отношения оставались верными, даже если масштаб меняется.

Применения комплексных чисел в науке и технике

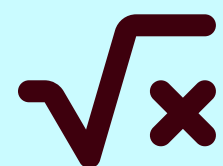
Комплексные числа помогают описывать процессы с вращением, периодичностью и колебаниями.

Во всех перечисленных областях комплексный аппарат упрощает расчёты и делает удобным описание фазы, направления и вращательного характера процесса.

Область	Пример	Смысл
Электротехника	Цепи переменного тока	Импеданс
Механика	Колебания	Амплитуда и фаза
Компьютерная графика	Повороты	Преобразование точки
Гидродинамика	Потоки	Модель движения

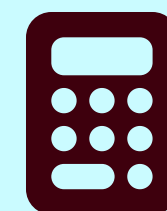
Обобщение учебных примеров применения комплексных чисел в математике и физике.

Типовые учебные задачи по теме



Квадратные уравнения

Находят корни уравнений с отрицательным дискриминантом, используя число i и запись комплексных решений в алгебраической форме.



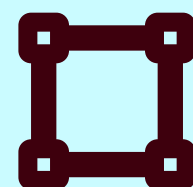
Действия с числами

Выполняют сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел, а также переходят между алгебраической и тригонометрической формами.



Модуль и аргумент

Определяют расстояние до начала координат и направление луча на комплексной плоскости, чтобы связать число с его геометрическим образом.



Построение на плоскости

Изображают точки и векторы, читая координаты действительной и мнимой частей и сопоставляя им конкретное положение на плоскости.



Формула Муавра

Возводят комплексные числа в степень и находят корни, используя периодичность аргумента и удобство показательной записи.

Связь темы с дальнейшим изучением математики

Переход к анализу

01

Комплексные числа помогают легче понять функции, пределы и производные, потому что показывают, как алгебраические формулы связаны с поведением объектов на плоскости.

Основа для более сложных методов

02

Идея аналитической функции становится входом в разделы, где решают уравнения и исследуют преобразования уже не только алгебраически, но и геометрически.

Удобство записи

03

Комплексная форма позволяет видеть структуру задачи без громоздких вычислений, особенно когда важны поворот, масштаб и симметрия одновременно.

Два способа решения

04

Тема показывает, что одну и ту же задачу можно решать через формулы или через геометрический образ, и оба подхода дают полезное понимание.

Комплексные числа объединяют алгебру и геометрию

Комплексные числа расширяют привычные методы, связывают вычисления с образом на плоскости и делают повороты, растяжения и симметрии частью единого математического языка.