

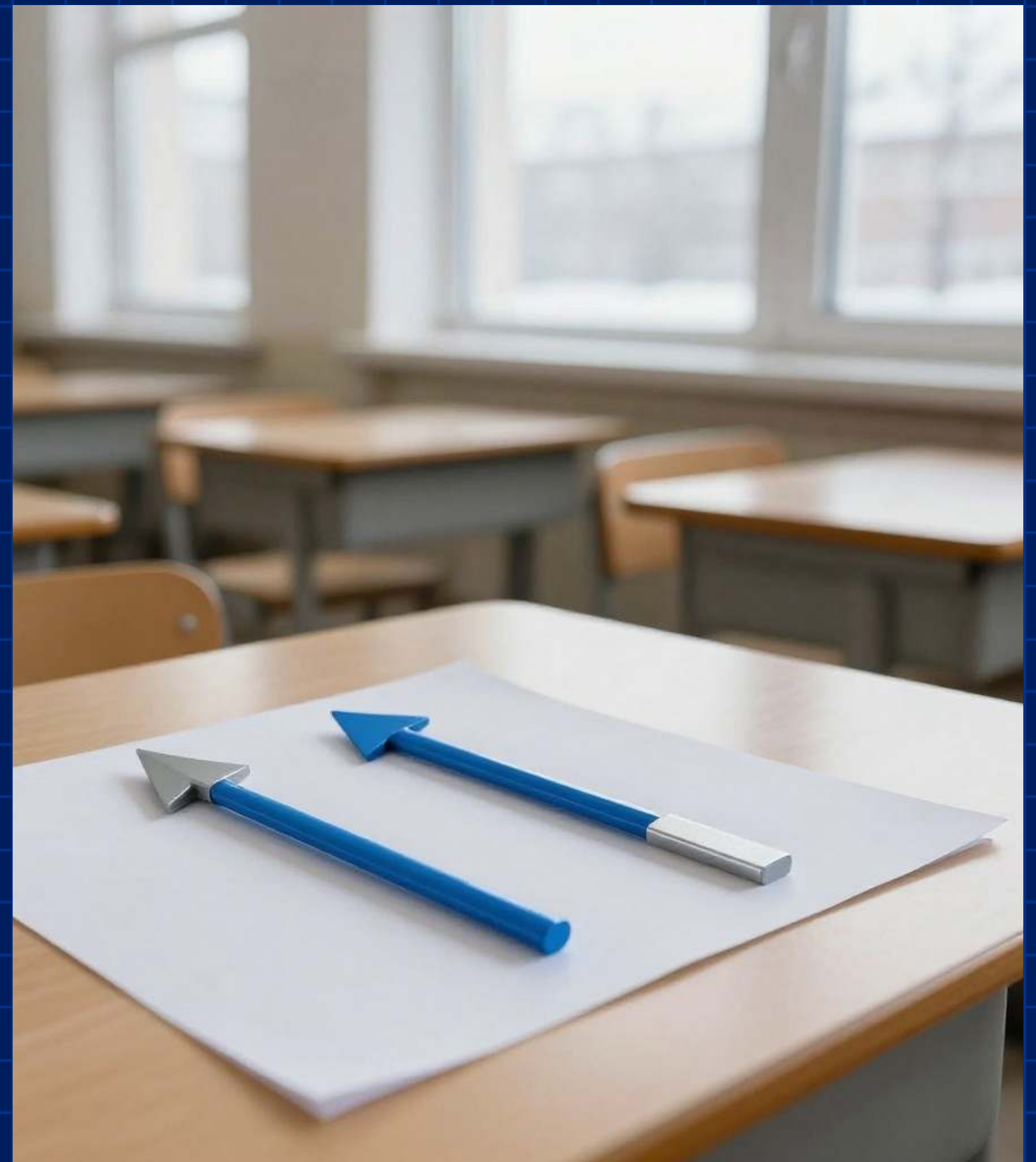
Умножение вектора на число: как меняются длина и направление

Длина и направление вектора легко меняются
одним числом.

$1 \div 2$

109

8



Зачем изучать векторы в 8 классе



Векторы помогают описывать движение, расстояния и направление на плоскости. Эта тема связывает геометрию с координатами и готовит к более сложным задачам на построения, пропорции и преобразования фигур.



Что такое вектор

Направленный отрезок

Вектор изображают стрелкой: её длина показывает величину, а направление — куда он направлен. Такой объект удобно использовать, когда важно не только расстояние, но и сторона движения.

Способы записи

Векторы обозначают стрелкой над буквой или парой букв, показывающих начало и конец. В записи важно понимать, что один и тот же вектор может быть перенесён в другое место чертежа.

Равные векторы

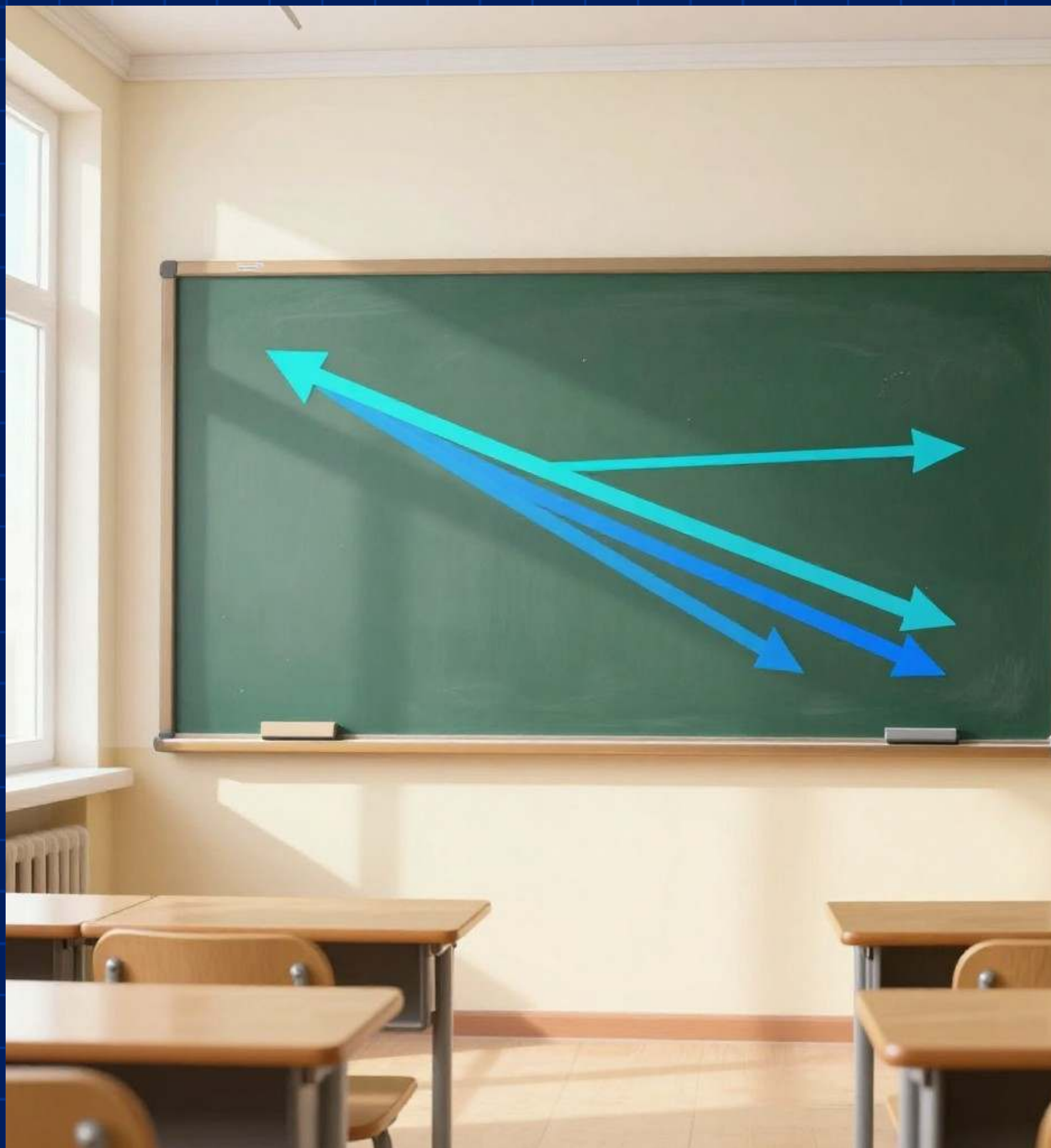
Два вектора считаются равными, если у них одинаковые длина и направление. Их расположение на рисунке может быть разным, но геометрический смысл остаётся тем же.

Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину, равную нулю, и не задаёт направления. Он возникает, когда вектор умножают на ноль или когда начало и конец совпадают.

$$x^2 + 4x - 8$$





Геометрический смысл умножения вектора на число

Изменение длины

Если вектор умножить на 2, он станет вдвое длиннее; при умножении на $\frac{1}{2}$ – вдвое короче. Длина меняется по модулю множителя.

Сохранение направления

При положительном коэффициенте новый вектор направлен так же, как исходный. На чертеже такие векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Смена направления

Если коэффициент отрицательный, вектор поворачивается в противоположную сторону. При этом его длина определяется модулем числа, а не его знаком.

Один исходный вектор

Полезно рассматривать несколько кратных одного вектора на одном рисунке: так легче увидеть связь между коэффициентом, длиной и направлением.

Как меняется вектор при разных коэффициентах

k	Длина	Направление
3	в 3 раза больше	то же
$\frac{1}{2}$	в 2 раза меньше	то же
-2	в 2 раза больше	противоположное
0	0	нет

Составлено по правилу умножения вектора на число.

Примеры показывают, как коэффициент влияет на длину и направление вектора.

Модуль коэффициента определяет изменение длины, а знак — направление; при $k = 0$ получается нулевой вектор.

Правило умножения вектора в координатах

1

Запись в координатах

Если вектор задан как $(x; y)$, то при умножении на число k получают новый вектор $(kx; ky)$. Это означает, что обе координаты изменяются одинаково.



2

Удобство вычислений

Такое правило позволяет находить координаты быстро, без построения чертежа. Оно особенно полезно на координатной плоскости, где нужно сравнивать векторы и выполнять преобразования.



3

Проверка результата

После вычисления стоит проверить знак коэффициента и величину координат. Это помогает избежать ошибок и сразу понять, изменилось ли направление вектора.



Как меняются координаты при разных значениях k



Вывод по правилу $k \cdot (x; y) = (kx; ky)$; примеры: $(2; 1) \cdot 2 = (4; 2)$, $(2; 1) \cdot \frac{1}{2} = (1; 0,5)$, $(2; 1) \cdot (-1) = (-2; -1)$.

На диаграмме сравниваются результаты умножения одного и того же вектора на разные числа, чтобы увидеть пропорциональность изменений.

Координаты меняются прямо пропорционально коэффициенту; при отрицательном k знак обеих координат меняется на противоположный.

Алгоритм решения задач на умножение вектора на число

Последовательность действий при решении по условию или по рисунку



Основные свойства операции умножения

1

Распределительное свойство

Умножение числа на сумму векторов можно раскрывать по каждому слагаемому: $k(a + b) = ka + kb$. Это помогает упрощать выражения и быстрее выполнять преобразования.

2

Сложение коэффициентов

Если один и тот же вектор умножают на сумму чисел, можно сначала сложить коэффициенты: $(k + m)a = ka + ma$. Такой приём сокращает запись и вычисления.

3

Последовательное умножение

При умножении вектора на произведение чисел можно менять порядок действий: $(km)a = k(ma)$. Свойство удобно, когда коэффициенты записаны в несколько шагов.

4

Умножение на 1

Число 1 не изменяет вектор: $1 \cdot a = a$. Это показывает, что исходный вектор сохраняет и длину, и направление, если коэффициент равен единице.

5

Умножение на -1

При умножении на -1 вектор меняет направление на противоположное, а длина остаётся прежней. Это свойство часто используют при сравнении векторов.

Коллинеарные векторы и их связь с умножением

Общий смысл

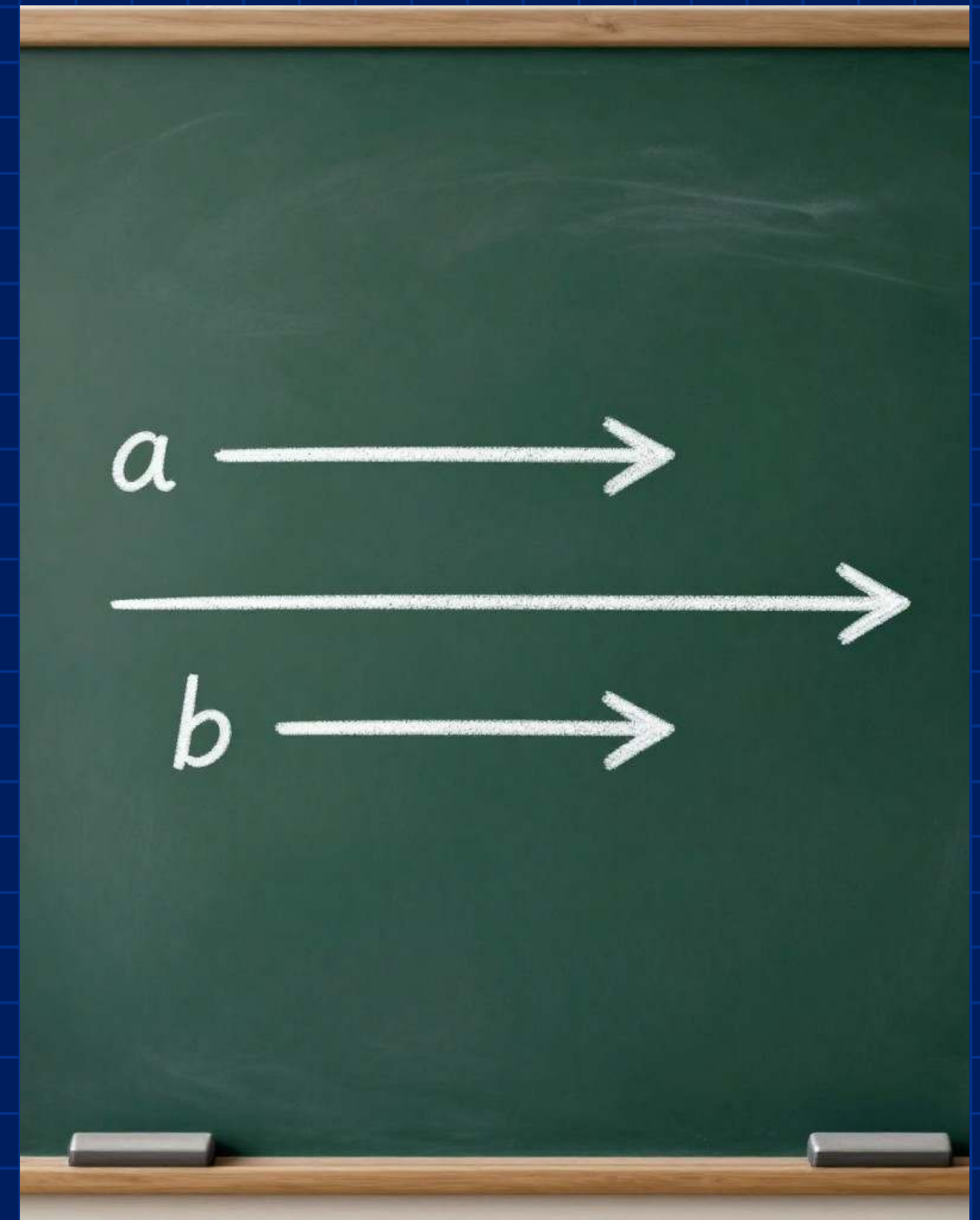
Если один вектор получается из другого умножением на число, такие векторы коллинеарны. Они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и связаны общим направлением.

Запись через коэффициент

В записи $b = k \cdot a$ число k показывает, во сколько раз один вектор больше или меньше другого. По знаку коэффициента можно понять, совпадает ли направление.

Геометрический признак

На рисунке коллинеарные векторы выглядят как стрелки, направленные одинаково или противоположно. Это помогает быстро распознавать связь между ними без сложных вычислений.



Зависимость длины вектора от коэффициента



Составлено по правилам умножения вектора на число; данные для иллюстрации, 2024.

Отрицательный коэффициент не меняет длину сам по себе: он влияет только на направление вектора.

Длина нового вектора равна модулю коэффициента, умноженному на исходную длину; знак числа влияет лишь на направление.

Пример задачи на деление отрезка в заданном отношении

1. Найти отношение

Сначала определяют, какие части отрезка заданы в условии. Если точка делит отрезок в отношении $2:3$, это означает, что весь отрезок мысленно разбит на пять равных долей.

2. Выразить части векторами

Затем каждый участок можно записать через вектор исходного отрезка с дробным коэффициентом. Так удобно показать, какая доля принадлежит одной части и какая – другой, без лишних построений.

3. Связать с координатами

Если известны координаты концов отрезка, координаты точки деления находят по тому же принципу пропорции. Это позволяет быстро проверить, лежит ли точка именно между концами отрезка.

4. Сделать вывод

После вычислений сравнивают длины частей и положение точки на рисунке. Такой подход объединяет пропорции, векторы и координатную запись, поэтому подходит для задач разного уровня сложности.



Типичные ошибки при умножении вектора на число

Ошибка	Как правильно
Одна координата	Обе координаты
Минус игнорируют	Учитывают знак
Путают длину	Различают
Неверное направление	Проверяют k

Учебные правила по теме «Умножение вектора на число»; 8 класс.

Сравните ошибку и правильное действие в векторных вычислениях.

Главные ошибки связаны с неполным умножением координат и неправильной работой со знаком. Проверка направления помогает избежать неточностей.

Векторы в задачах на движение

1



Перемещение

Перемещение показывает, куда и насколько сместился объект. Если путь изменился вдвое, вектор перемещения тоже масштабируется вдвое, сохраняя или меняя направление по знаку коэффициента.



Скорость ветра

Скорость ветра удобно изображать стрелкой: длина показывает силу потока, а направление – куда он движется. При усилении ветер можно описать умножением вектора на число больше 1.



Движение навстречу

Встречное движение легко сравнивать через векторы с противоположными направлениями. Если тело разворачивается назад, вектор скорости меняет знак, что помогает быстрее составлять и решать задачи.

2

log

x

Как проверить решение векторной задачи

Последовательность проверки помогает не потерять знак, длину и направление при вычислениях.



Где векторы встречаются вокруг нас



Санки на склоне

Когда санки съезжают с горки, важно не только, как быстро они движутся, но и в каком направлении. Если сила или скорость возрастает вдвое, соответствующий вектор можно представить как увеличенный в два раза, а при развороте – как вектор с противоположным направлением.



Ветер и маршрут

На карте направление ветра и движение по маршруту удобно показывать стрелками. Если путь становится длиннее или короче, меняется длина вектора; если маршрут поворачивает назад, знак коэффициента помогает описать смену направления без лишних слов.



Сила в руках человека

При толкании двери, натяжении верёвки или подъёме предмета сила тоже имеет направление. Поэтому её удобно изображать вектором: при увеличении усилия вектор становится длиннее, а при изменении стороны действия – направленным иначе.

Сравнение исходного вектора и его кратных



Составлено по учебным свойствам умножения вектора на число; 2024.

На рисунке удобно сравнивать длины без вычислений по каждой координате отдельно.

При положительном k вектор сохраняет направление, а его координаты и длина меняются пропорционально. При отрицательном k длина та же по модулю, но направление противоположное.

Зачем векторы нужны в геометрии



Измерять расстояния

Векторы помогают сравнивать длины отрезков и находить расстояния на плоскости. Это удобно, когда нужно не просто увидеть фигуру, а точно описать её размеры и расположение.



Сравнивать направления

С помощью векторов легко определить, одинаково ли направлены отрезки или являются ли они противоположными. Такой способ особенно полезен при работе с параллельными прямыми и углами.



Строить фигуры

Векторы помогают переносить точки, отрезки и целые фигуры без искажения формы. Параллельный перенос становится понятным и точным, если задать его вектором.



Увеличивать и уменьшать

Умножение вектора на число позволяет аккуратно менять размеры геометрических объектов. Так можно получить похожую фигуру большего или меньшего размера, сохранив её направление.

Краткая памятка по теме

Условие	Результат
$k > 0$	направление то же
$k < 0$	направление меняется
$ k > 1$	вектор длиннее
$0 < k < 1$	вектор короче
$k = 0$	нулевой вектор

Учебное правило умножения вектора на число; 8 класс.

Эта таблица помогает быстро вспомнить, что происходит с вектором при разных коэффициентах.

Знак коэффициента определяет направление, а его модуль — изменение длины. Одно правило одновременно описывает все основные случаи.

Что важно запомнить об умножении вектора на число

Это правило позволяет быстро менять длину и направление вектора, работать с координатами и решать геометрические задачи. Именно поэтому тема так важна для восьмого класса.



cos

sin

1

tg

ctg