



Независимые испытания в алгебре: основная идея и значение

Многократные случайные опыты подчиняются
точным вероятностным моделям.

Почему эта тема важна в 11 классе



Здесь теория вероятностей соединяет комбинаторику, формулы умножения и анализ повторяющихся случайных опытов — от монет и кубиков до выборок и задач на «хотя бы один» успех.

Что считается независимыми испытаниями

Неизменная вероятность

Испытания считают независимыми, если вероятность нужного исхода в каждом новом опыте не зависит от предыдущих результатов и остаётся одинаковой по условию задачи.

Отсутствие влияния прошлого

Главный признак независимости — прошлый результат не меняет будущий. Если известный исход способен повлиять на следующий шаг, серия уже не является независимой.

Типичные примеры

К независимым относятся повторные броски монеты и кубика, а также случайный выбор с возвращением, где состав исходов после каждого шага не меняется.

Когда независимости нет

Если предметы извлекают без возвращения или условия опыта меняются после каждого действия, вероятности пересчитываются, и испытания становятся зависимыми.

Зачем это важно

Именно независимость позволяет использовать компактные формулы для длинных серий событий и точно вычислять вероятность сложных комбинаций исходов.



Примеры независимых и зависимых ситуаций

Независимые серии

Два броска монеты подряд, три броска кубика и извлечение шара из урны с возвращением сохраняют одинаковые условия для каждого нового опыта.

Зависимые серии

Вытаскивание карт без возвращения, выбор деталей из партии без замены и повторный отбор без восстановления состава изменяют вероятности после каждого шага.

Что меняется в модели

При независимости вероятность следующего исхода не зависит от прошлого; при зависимости приходится учитывать уже произошедшие события и обновлять вероятности.

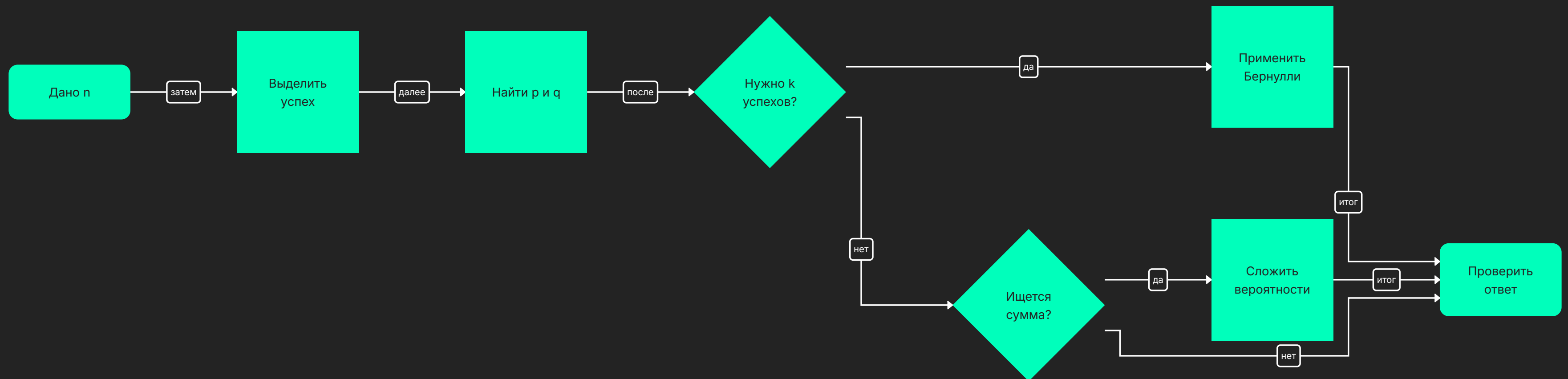
Практический смысл

Различие между этими ситуациями определяет, какую формулу применять: простое умножение вероятностей, схему Бернулли или более сложный пересчёт условий.



Алгоритм решения задач на независимые испытания

Последовательность действий при вычислении вероятности в серии независимых опытов



Основные обозначения и формулы

Обозначение	Смысл	Формула/пример
n	число испытаний	—
k	число успехов	—
p	вероятность успеха	—
q	вероятность неуспеха	$q=1-p$
$C(n, k)$	число сочетаний	выбор позиций
$P(k)$	ровно k успехов	$C(n, k) \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}$

Таблица помогает быстро связать обозначения с их смыслом и основной формулой.

Главная формула объединяет выбор позиций успехов и вероятность каждого конкретного варианта.

Вероятность ровно k успехов при n испытаниях

Распределение для пяти испытаний показывает, какие значения k наиболее вероятны при честном исходе.

Максимум лежит около среднего значения np , а при $p=0,5$ распределение симметрично.

Вычисление по формуле Бернулли для $n=5$, $p=0,5$

Формула Бернулли

01. Запись формулы

Вероятность ровно k успехов в n независимых испытаниях вычисляют по формуле $P_n(k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где p — успех, а $q = 1 - p$.

02. Роль сочетаний

Множитель $C(n, k)$ показывает, сколько различных способов существует выбрать позиции успехов среди всех n испытаний, не меняя саму вероятность.

03. Когда применять

Формула подходит для одинаковых и независимых испытаний: бросков монеты, серий проверок, отборов с возвращением и других повторяющихся случайных процессов.

Смысл биномиальных коэффициентов

Что считает $C(n, k)$

Коэффициент $C(n, k)$ показывает число способов выбрать k успешных исходов среди n испытаний, то есть сколько различных размещений успехов возможно в серии.

Пример с пятью испытаниями

Если $C(5, 2) = 10$, то два успеха в пяти испытаниях могут стоять в десяти разных позициях, и каждый вариант даёт одинаковый вклад в вероятность.

Почему это важно

Без этого множителя формула учитывала бы только один порядок исходов, хотя на самом деле таких порядков может быть несколько.



Как меняется распределение при разных вероятностях успеха

Сравнение трёх значений p показывает, как меняется положение наиболее вероятного числа успехов при одинаковом числе испытаний.

Чем больше p , тем сильнее пик смещается вправо; его положение связано с ожидаемым числом успехов np .

Вычисление по формуле Бернулли для $n=5$, $p=0,2$; $0,5$; $0,8$

Этот результат получается
короче через
противоположное событие:
вместо перебора всех
вариантов считают отсутствие
успехов и вычитают
из единицы.

76%

Именно такой будет вероятность хотя бы одного
успеха в серии из четырёх независимых
испытаний при $p = 0,3$.

Пример по формуле $1 - q^n$ при $p = 0,3$ и $n = 4$

Типовые задачи и методы их решения

Краткая таблица показывает, какую модель выбирать в зависимости от формулировки вопроса.

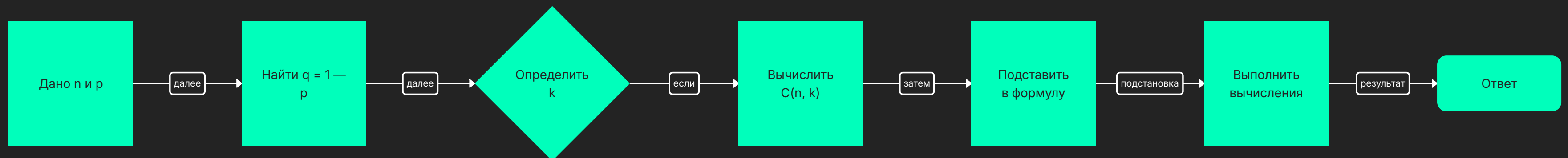
Тип задачи	Основной приём	Формула/действие
Ровно k успехов	Бернулли	$P_n(k)$
Хотя бы / не менее / не более	Противоп. событие или сумма	$1 - P(0)$
Независимые одинаковые опыты	Схема Бернулли	$p, q, C(n, k)$

Правильный выбор модели сокращает вычисления и помогает избежать лишнего перебора случаев.

Обобщение стандартных задач по теме независимых испытаний

Алгоритм вычисления вероятности по схеме Бернулли

Последовательность действий при решении задач на независимые испытания.



Примеры из школьных задач



Кубик

При четырёх бросках кубика часто находят вероятность не менее двух шестёрок. Такой формат требует либо суммы нескольких случаев, либо удобного перехода к противоположному событию.



Монета

В задаче о пяти бросках монеты ищут вероятность ровно трёх орлов. Здесь важно не только число успехов, но и количество способов расположить их среди пяти испытаний.



Детали

Задача о партии из десяти деталей показывает практический смысл схемы Бернулли: вероятность постоянна, испытания независимы, а интересует число бракованных изделий в серии.

Наиболее частые ошибки в задачах на независимые испытания

Чаще всего ошибка возникает ещё до вычислений: неверно распознано событие или не учтено, какие исходы действительно подходят под условие задачи.

Главные потери возникают из-за модели и логики отбора случаев, а не из-за самой формулы.

Иллюстративное ранжирование типичных ошибок по материалам школьных задач

Связь темы с реальными приложениями

Контроль качества

На производстве независимые испытания помогают оценивать вероятность брака при повторных проверках партии, когда каждое изделие рассматривается отдельно и условия контроля сохраняются одинаковыми.

Информатика

В передаче данных и тестировании алгоритмов модель подходит для анализа повторяющихся попыток, вероятности ошибки и надёжности системы при одинаковых независимых проверках.

Биология

При статистической обработке результатов экспериментов схема Бернулли помогает описывать серии однотипных наблюдений, например повторные тесты с фиксированной вероятностью успешного исхода.

Экономика

В прикладных расчётах модель используют для оценки риска, вероятности удачной сделки или повторных событий, если условия каждой попытки считаются одинаковыми.

Случайный отбор

Выбор с возвращением и повторные проверки хорошо отражают идею независимости: после каждого шага вероятность исхода не меняется, поэтому применимы стандартные формулы.



Что показывает закон больших чисел

01

От частоты к вероятности

Если опыт повторяется много раз, относительная частота события обычно становится ближе к его вероятности. Это не мгновенное совпадение, а устойчивое статистическое приближение.

02

Стабилизация результата

При увеличении числа испытаний случайные колебания не исчезают полностью, но становятся менее заметными. Поэтому серия опытов даёт более надёжную картину, чем один отдельный бросок.

03

Практический смысл

Закон больших чисел объясняет, почему вероятностные модели полезны в реальных расчётах: они не предсказывают единичный исход, но позволяют уверенно оценивать поведение больших серий.



Сравнение: один опыт, серия опытов, вероятностная модель

Объект	Что известно
Один опыт	Вероятность события
Серия испытаний	Распределение вероятностей
Закон больших чисел	Поведение частоты

Сопоставление показывает, как меняется вопрос от одного события к устойчивым закономерностям серии.

Один опыт описывает случайность, а серия и модель позволяют увидеть закономерность и сделать расчёт предсказуемым.

Обобщение понятий теории вероятностей для 11 класса

Подготовка к решению задач на контрольной работе

01. Различайте формулировки

Слова «ровно», «хотя бы», «не менее» и «не более» задают разные математические действия. От точного чтения условия зависит выбор формулы и способа подсчёта.

02. Фиксируйте p и q

Сначала определите вероятность успеха, затем найдите вероятность неуспеха как $q = 1 - p$. Перепутанные обозначения — одна из самых частых причин неверного ответа.

03. Проверяйте независимость

Формулы схемы Бернулли работают только тогда, когда условия каждого испытания не меняются. Если состав выборки или вероятность успеха изменяются, модель нужно пересматривать.

04. Используйте сочетания

При ровно k успехах важно посчитать не только вероятность одного варианта, но и число способов расположить успехи. Именно это даёт биномиальный коэффициент.

05. Оценивайте ответ

Итог должен быть от 0 до 1 и соответствовать смыслу задачи: при росте p вероятность успеха обычно увеличивается, а при росте n меняется закономерно, без скачков.

Независимые испытания: от случая к закономерности

Эта тема показывает, как повторяющиеся случайные опыты превращаются в точный расчёт. Формула Бернулли, биномиальные коэффициенты и правило противоположного события делают вероятности вычислимыми и понятными.