

Решение комбинаторных задач в курсе алгебры 7 класса



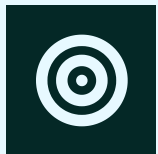
Считаем варианты точно, быстро
и без лишних ошибок.

Как считать варианты в комбинаторике

Комбинаторика учит находить число способов выбора, расположения и составления объектов. Она помогает решать задачи из математики, информатики и повседневной жизни, если важно понять порядок, повторения и число шагов выбора.



Основные виды комбинаторных задач



Выбор

Нужно определить, сколько способов выбрать несколько объектов из набора. Здесь обычно важно, учитывается ли порядок и можно ли брать один и тот же объект снова.



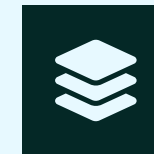
Перестановка

Все данные объекты располагают в разном порядке. Такие задачи появляются, когда нужно перечислить все возможные расположения без пропусков и повторений одного и того же варианта.



Размещение

Выбирают часть объектов, но порядок уже имеет значение. Этот тип задач удобен, когда элементы ставят по местам, назначают роли или составляют последовательность действий.



Сочетание

Выбирают несколько объектов без учёта порядка. Если набор выбранных элементов одинаковый, то перестановка их местами не создаёт новый вариант ответа.



Ключевые вопросы

Перед решением нужно выяснить, сколько объектов выбирается, важен ли порядок, разрешены ли повторы и есть ли дополнительные ограничения в условии задачи.

Правило умножения для последовательных действий



Первый шаг

Сначала определяют, сколько способов есть выполнить первое действие. Каждый из этих вариантов рассматривают как начало дальнейшего выбора, а не как окончательный ответ.

Второй шаг

Затем считают число способов для следующего действия. Оно умножается на количество вариантов первого шага, потому что каждый первый вариант сочетается с каждым вторым.

Итоговое число

Если одно действие выполняется 3 способами, а другое — 4 способами, то всего получается 12 вариантов. Так считают последовательные комбинации без пропуска случаев.

Где применяется

Правило удобно в задачах про обед из двух частей, код из цифр или подбор одежды. Оно помогает быстро посчитать все возможные сочетания шагов.

Когда порядок важен, а когда нет

●

Два признака – порядок и повторение – задают способ подсчёта вариантов.

●

Если определить два условия заранее, можно сразу выбрать правильную формулу или способ перебора.

Ситуация	Пример	Подсчёт
Порядок важен, повторы можно	пароль	по позициям
Порядок важен, повторы нельзя	книги на полке	по размещениям
Порядок не важен, повторы можно	набор цветов	по выбору
Порядок не важен, повторы нельзя	две дежурные роли	по сочетаниям

Обобщение школьных комбинаторных задач по алгебре 7 класса

Алгоритм решения комбинаторной задачи

Последовательность действий при выборе способа подсчёта

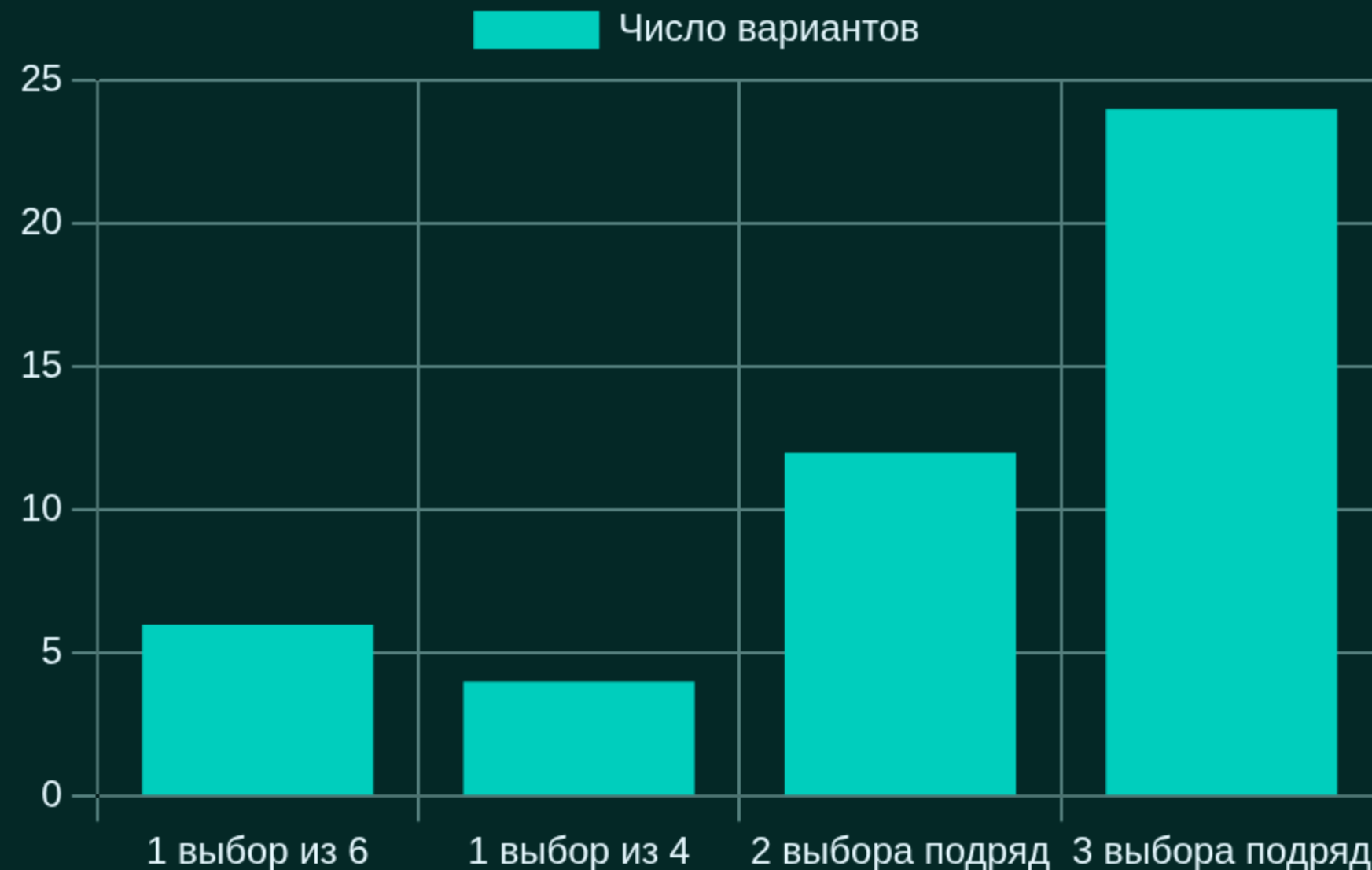
8

вариантов выбора одной ручки
получается из двух
непересекающихся наборов.

Если красные и синие
ручки не пересекаются,
количество способов
выбрать одну ручку
находят сложением чисел
из каждой группы.

Школьный пример на правило сложения

Как растёт число вариантов при добавлении новых шагов



Иллюстративные данные для сравнения простых комбинаторных случаев

- Каждый дополнительный шаг резко увеличивает число возможных результатов, даже если на каждом этапе выборов немного.
- Последовательные действия дают заметный рост вариантов, поэтому задачи с несколькими шагами требуют особенно внимательного подсчёта.

6

вариантов существует для трёх объектов, если использовать все возможные порядки.

Даже при небольшом числе объектов число перестановок быстро становится заметным, поэтому факториал удобнее полного перечисления.

Формула перестановок $n!$

Сочетания: выбор без учёта порядка

Порядок не нужен

В сочетаниях важно только то, какие объекты выбраны. Если поменять их местами, новый вариант не появляется, потому что состав набора остаётся тем же.

Пример с учениками

Если нужно выбрать 2 ученика из 5, то учитывается только пара выбранных ребят. Комбинации А–Б и Б–А считаются одним и тем же выбором.

Когда применяется

Сочетания используют в задачах о выборе команды, набора предметов, цветов или карточек. Здесь главное — состав набора, а не порядок его элементов.

Главный вывод

Чтобы не ошибиться, сначала нужно понять: важен ли порядок. Если он не играет роли, выбор считают как сочетание, а не как размещение.



Быстрый рост числа перестановок



Иллюстративные значения по формуле $n!$; дата не требуется

- Даже небольшое увеличение числа объектов резко меняет количество вариантов: каждый следующий шаг умножает результат на новое число.
- Перестановки растут очень быстро, поэтому при большем числе объектов удобнее пользоваться факториалом, а не перечислять все случаи.

Факториал и его значение в задачах

01

Что означает запись

Факториал числа n записывают как $n!$ и понимают как произведение всех натуральных чисел от 1 до n . Эта запись помогает коротко показывать, как быстро растёт число вариантов.

02

Простые примеры

Для небольших чисел факториал легко вычислить устно: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$. Такие примеры удобно использовать в задачах на перестановки.

03

Где применяется

Факториал входит в формулы перестановок, размещений и сочетаний. Он появляется потому, что при подсчёте вариантов часто нужно учитывать последовательный выбор без пропусков и повторений.

04

Что важно запомнить

В 7 классе достаточно уверенно находить значения небольших факториалов и понимать смысл записи. Тогда формулы комбинаторики читаются быстрее и становятся понятнее при решении задач.

Основные формулы комбинаторики

Вид	Формула	Когда применять
Перестановки	$n!$	Все объекты
Размещения	$A(n, k)$	Порядок важен
Сочетания	$C(n, k)$	Порядок не важен

Стандартные формулы комбинаторики

Таблица показывает три базовые формулы и условия их применения.

По таблице легко сопоставить формулу с условием задачи: сначала определить порядок, затем – все объекты или только часть.

Полный перебор как способ проверки всех случаев

01 | Просматриваем все варианты

Полный перебор означает, что мы последовательно выписываем каждый возможный случай без пропусков. Этот способ особенно полезен, когда вариантов немного и их легко удержать в памяти.

02 | Удобная запись

Чтобы не запутаться, варианты оформляют списком, таблицей или деревом. Такая запись помогает видеть, какие сочетания уже рассмотрены, а какие ещё нужно добавить.

03 | Когда перебор оправдан

Перебор хорошо работает в задачах с маленьким набором объектов: выбор пары чисел, цвета и фигуры, буквы и цифры. Здесь список получается коротким и наглядным.

04 | Когда лучше формулы

Если вариантов становится много, перебор занимает слишком много времени и легко приводит к ошибкам. Тогда удобнее использовать правило умножения или формулы комбинаторики.

Проверка ответа после решения задачи

Схема показывает последовательность проверки комбинаторного ответа.

Дерево вариантов для наглядного подсчёта



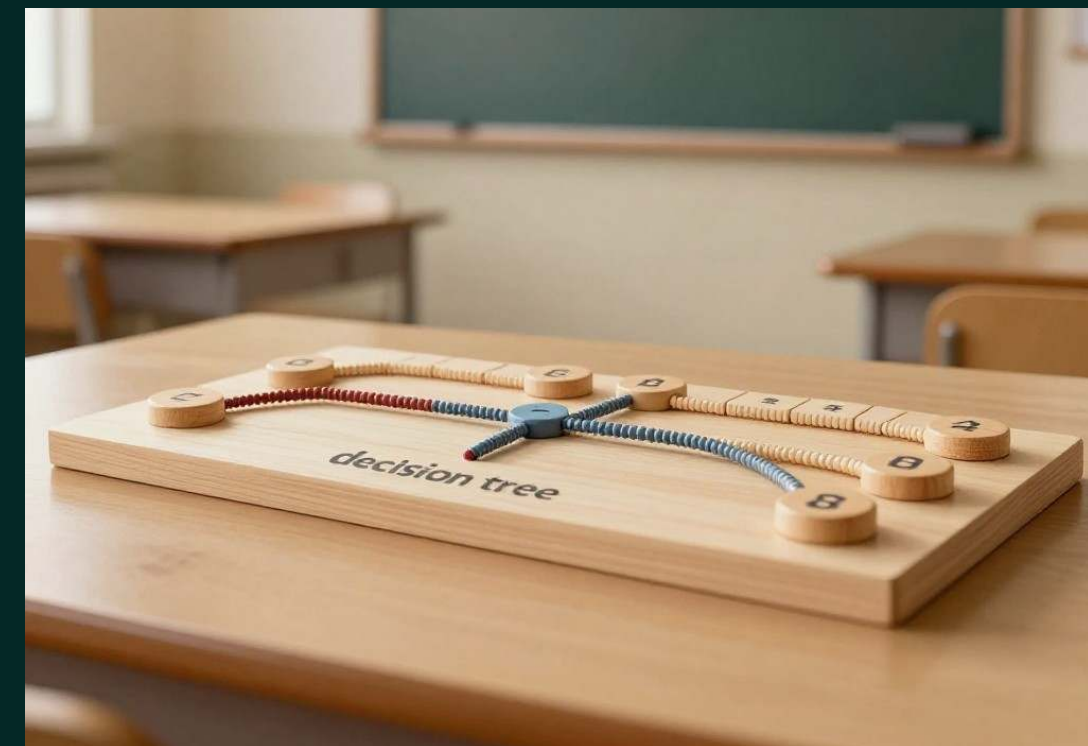
Выбор по первому признаку

На первом уровне дерева мы делаем первый выбор: например, цвет, цифру или букву. От каждой начальной ветви сразу отходят новые линии, и становится видно, сколько путей открывается дальше.



Следующий шаг решения

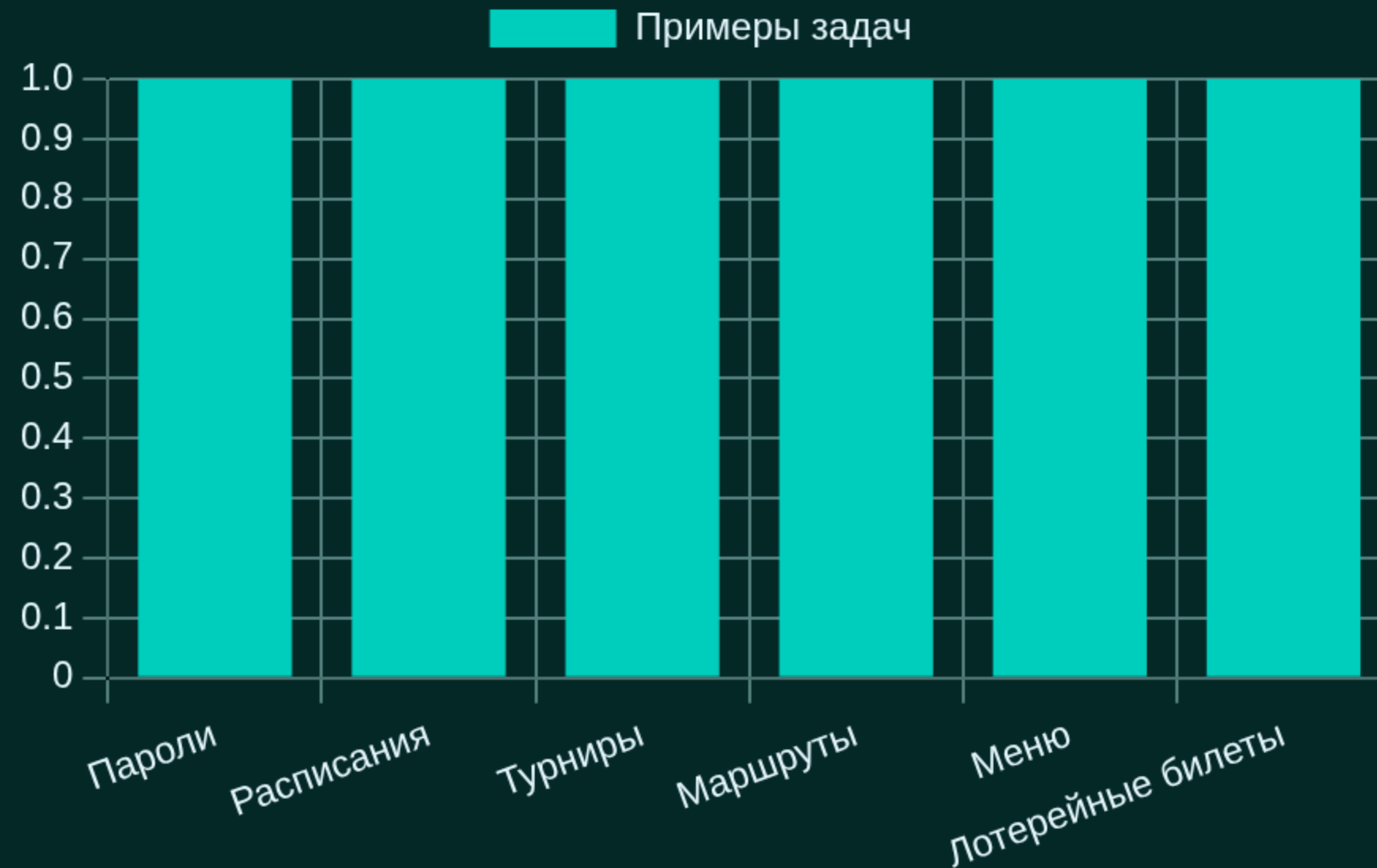
Затем к каждому варианту добавляется второй признак. Если выбор продолжается, дерево растёт вниз и вправо, а каждый новый путь показывает уже готовую комбинацию признаков без пропусков и повторов.



Один путь — один ответ

Когда дерево построено до конца, каждый маршрут от начала к последней ветви соответствует одному варианту решения. Такая запись особенно удобна, если нужно проверить, не потерян ли какой-то случай.

Где встречаются комбинаторные задачи в жизни



Иллюстративные примеры по теме комбинаторики

- Во многих ситуациях нужно не решать пример по шаблону, а быстро оценивать количество возможных вариантов выбора.
- Комбинаторика помогает замечать скрытое число сочетаний в обычных ситуациях и понимать, почему вариантов может быть очень много.

Типичные ошибки при решении задач



Путаница с порядком

Ученики часто считают одинаковыми случаи, где порядок на самом деле важен. Перед решением нужно сразу определить, меняется ли ответ при перестановке объектов.



Двойной счёт вариантов

Один и тот же вариант иногда попадает в подсчёт дважды, если его рассматривают из разных групп. Чтобы избежать ошибки, полезно отмечать уже учтённые случаи.



Пропуск условия

Если не заметить ограничение, ответ получается неверным даже при правильных вычислениях. Особенно важно проверять, разрешены ли повторы и сколько объектов нужно выбрать.



Неверная формула

Иногда выбирают перестановки вместо сочетаний или наоборот. Чтобы не ошибиться, нужно сопоставить формулу не с числом, а с смыслом задачи.



Отсутствие проверки

После решения стоит ещё раз прочитать условие и сравнить ответ с логикой ситуации. Такая проверка помогает заметить лишние или недостающие варианты.

Как выбрать способ решения в задаче

01

Оцените число вариантов

Если случаев совсем мало, удобнее всего начать с полного перебора. Он позволяет быстро увидеть все ответы и проверить, не пропущен ли какой-то вариант.

02

Рассмотрите шаги выбора

Когда задача состоит из нескольких последовательных действий, подходит правило умножения. Каждый новый шаг добавляет отдельный набор возможностей, и общее число вариантов растёт поэтапно.

03

Проверьте, все ли объекты используются

Если нужно расположить все объекты и порядок важен, используют перестановки. Такая ситуация встречается, когда каждый предмет должен попасть в общий ряд.

04

Определите, важен ли порядок

Если выбирают только часть объектов, важно понять, меняется ли ответ при перестановке. При важном порядке подходят размещения, а при неважном — сочетания.

05

Сравните с условием задачи

Правильный способ решения всегда выбирают по смыслу условия, а не по внешнему виду примера. Поэтому полезно сначала выделить ограничения, а уже потом подбирать формулу.

Комбинаторика учит видеть варианты

Комбинаторные задачи становятся понятнее, если сначала ответить на три вопроса: что выбирается, важен ли порядок и допускаются ли повторения. Тогда правильный способ подсчёта находится быстро и без лишних ошибок.