

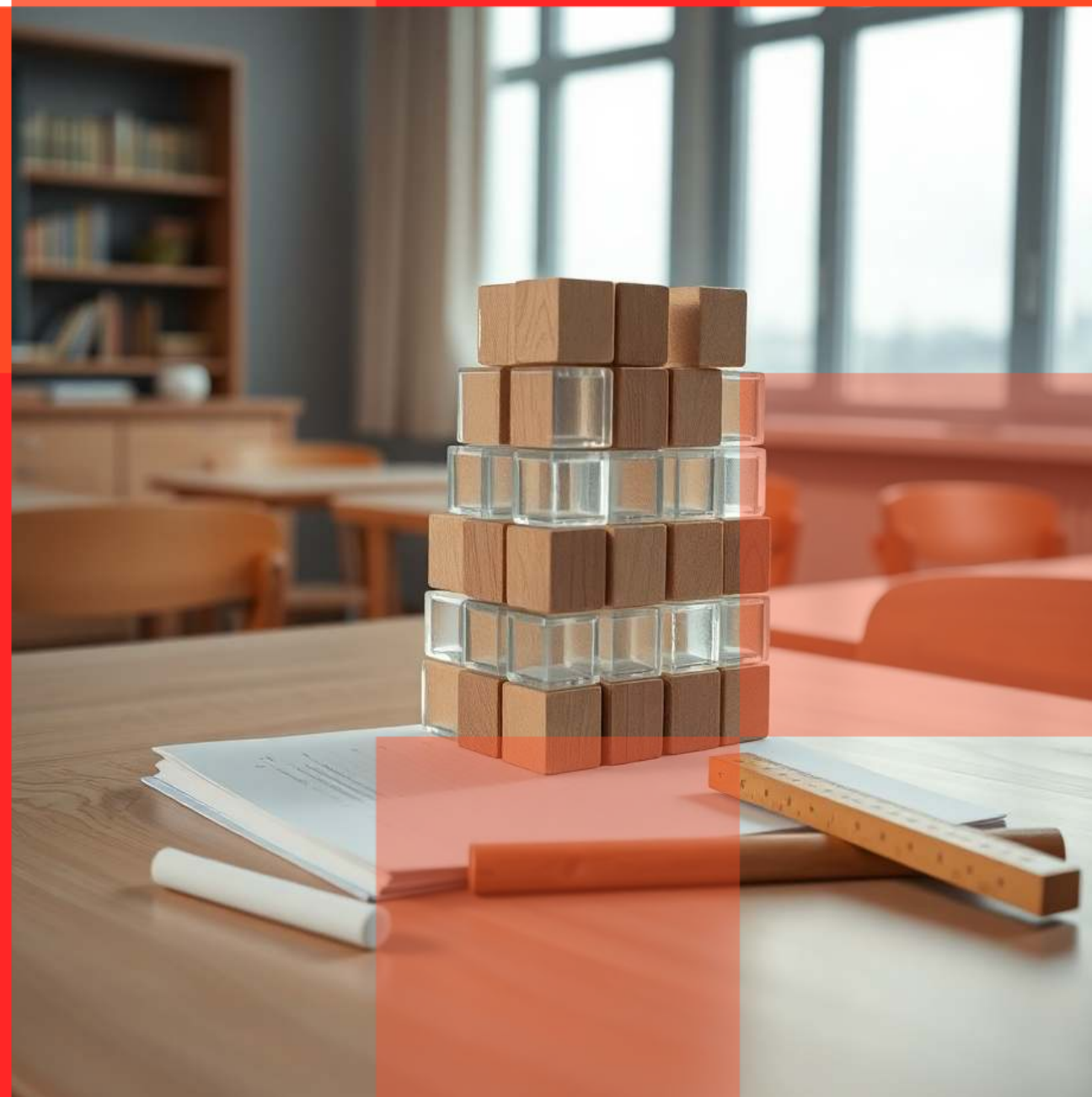
Степенная функция $y = x^n$ при натурально м n : от формулы к графику

От формулы к графику через свойства степени
и симметрию.



Зачем изучать степенную функцию в 10 классе

Она соединяет степень числа, графики и реальные модели роста, помогает сравнивать линейные, квадратичные и кубические зависимости и готовит к анализу более сложных функций.



Определение степенной функции и обозначения

Вид функции

- 1 Степенная функция задаётся формулой $y = x^n$, где каждому значению x ставится в соответствие его n -я степень.

Натуральный показатель

- 2 Показатель n — натуральное число: 1, 2, 3, 4 и далее. Именно он определяет, как выглядит график и какие свойства имеет функция.

Основание степени

- 3 Переменная x называется основанием степени. Для каждого x значение функции находят обычным возведением числа в степень n .

Смысл записи

- 4 Запись $y = x^n$ показывает зависимость одной величины от другой: изменение x сразу меняет значение y по правилу степеней.

Область определения и множество значений

Область определения

Для любого натурального n функция $y = x^n$ определена при всех действительных x , поэтому область определения совпадает со всей числовой прямой.

Чётные степени

При чётном n значения функции неотрицательны: отрицательное x после возведения в чётную степень даёт положительный результат или нуль.

Нечётные степени

При нечётном n функция принимает и положительные, и отрицательные значения, поэтому множество значений также равно множеству всех действительных чисел.

Как меняется график при $n = 1, 2, 3$

Сравнение трёх случаев показывает, как быстро усиливается рост значений при увеличении показателя и сохранении одинаковых аргументов.

Чем больше n , тем быстрее растут значения при $|x| > 1$, а форма графика становится более крутой.

Вычисления по определению функции $y = x^n$.

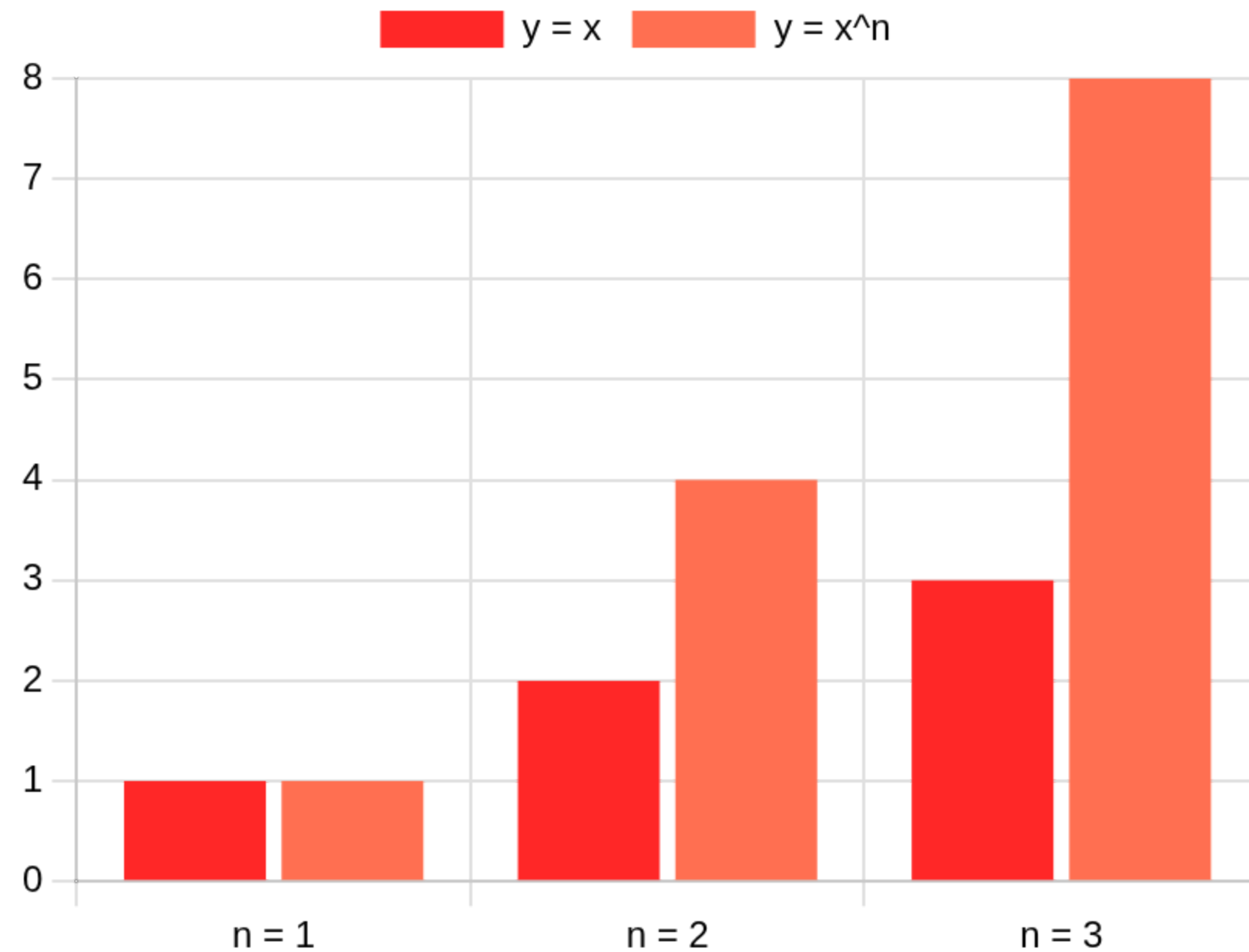


График функции $y = x^2$

Симметрия параболы

График симметричен относительно оси Oy : значения функции одинаковы для x и $-x$, поэтому левая и правая части совпадают.

Опорные точки

Парабола проходит через точки $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$, что удобно для построения и проверки.

Минимум функции

Наименьшее значение равно 0 и достигается в точке $x = 0$, поэтому вершина параболы расположена в начале координат.

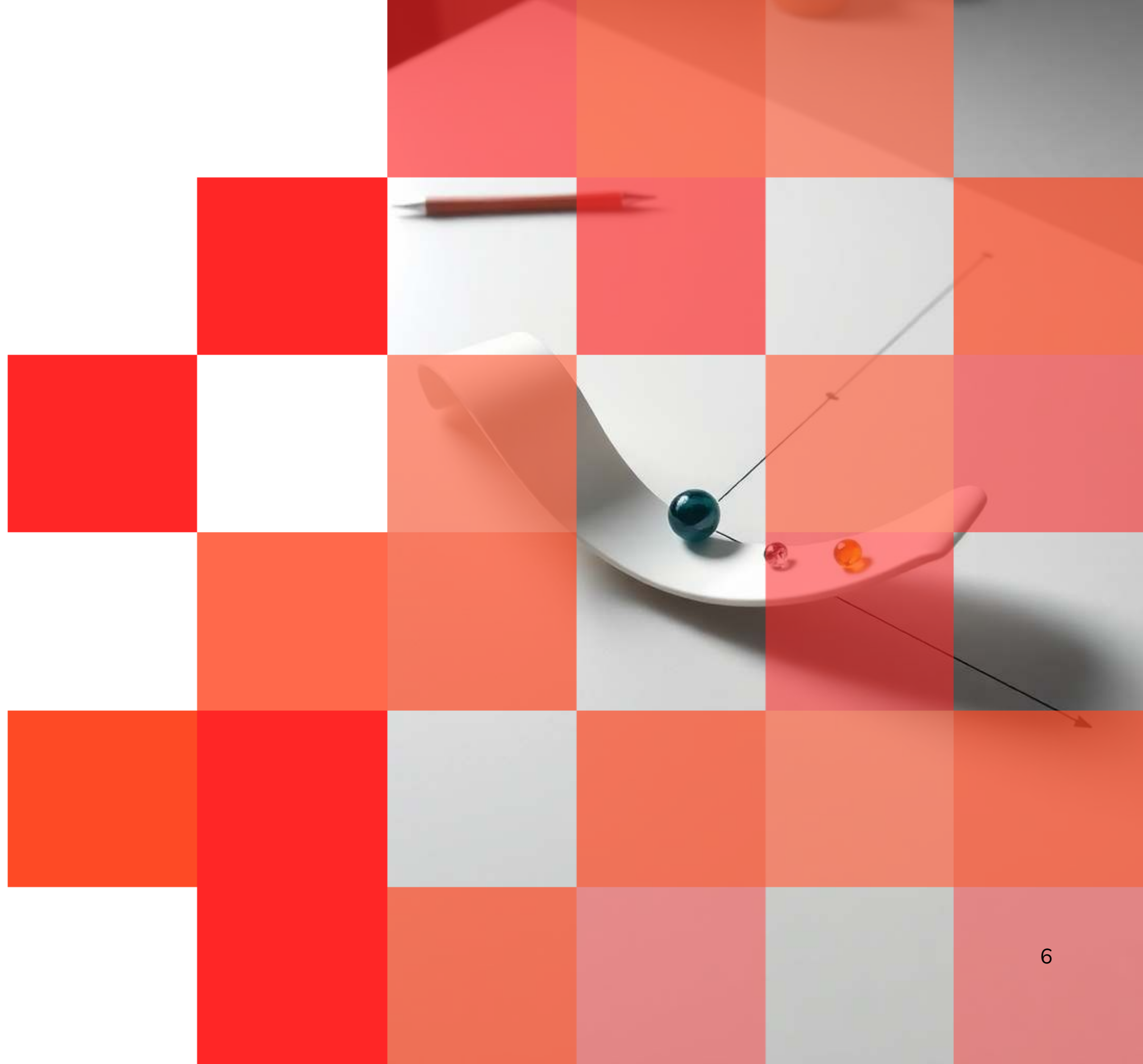


График функции $y = x^3$

Симметрия относительно начала

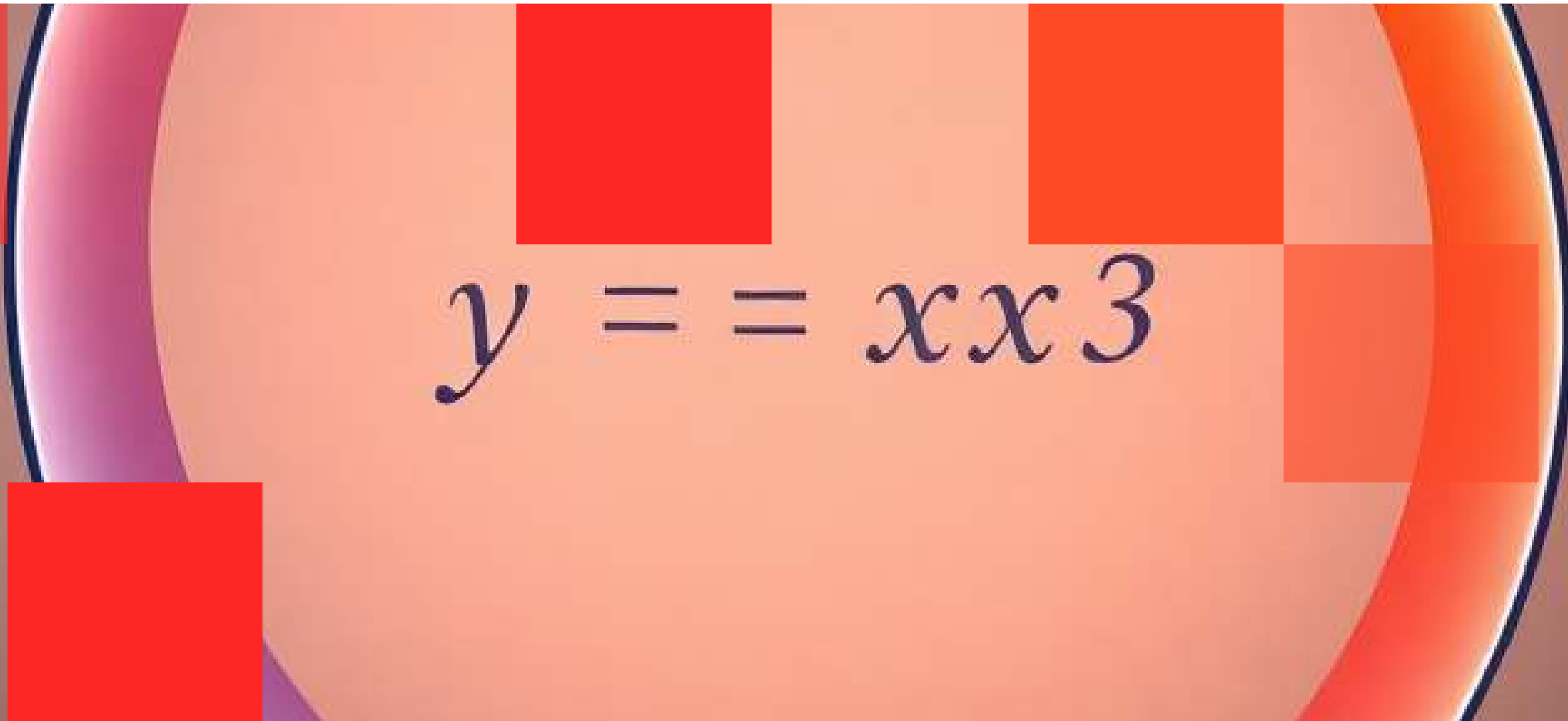
График нечётной степени сохраняет симметрию при повороте на 180° вокруг начала координат, поэтому правая и левая части связаны зеркально по знаку.

Характерные точки

Кривая проходит через точки $(-2; -8)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 8)$, что хорошо демонстрирует смену знака при отрицательных x .

Форма и рост

График имеет плавную S-образную форму и возрастает на всей числовой прямой, без участков убывания и без локального минимума.


$$y = x^3$$

Свойства степенной функции при чётном показателе

1	2	3	4
Равенство значений	Поведение слева и справа	Знак значений	Итог по форме
Если n чётное, то $x^n = (-x)^n$. Поэтому точки с противоположными абсциссами имеют одинаковые ординаты, и график отражается относительно оси Oy .	Слева от нуля функция убывает, а справа возрастает. В точке $x = 0$ расположен её нижний предел, где значение становится минимальным.	Чётная степень не даёт отрицательных результатов. При любом x значение y либо положительно, либо равно нулю, что особенно заметно на графике.	График всегда имеет «чашеобразный» вид: обе ветви поднимаются вверх от точки минимума и остаются не ниже оси Ox .

Свойства степенной функции при нечётном показателе

Антисимметрия

- 1 При нечётном n выполняется $(-x)^n = -x^n$, поэтому точки графика располагаются симметрично относительно начала координат.

Монотонность

- 2 Функция строго возрастает на всей числовой прямой: при увеличении x значение y также увеличивается без пауз и поворотов.

Знак и начало координат

- 3 Значения могут быть как положительными, так и отрицательными, а точка $(0; 0)$ обязательно принадлежит графику и служит его центром.

Сравнение чётных и нечётных степеней

Таблица помогает быстро увидеть, как показатель степени влияет на симметрию, знак значений и поведение графика.

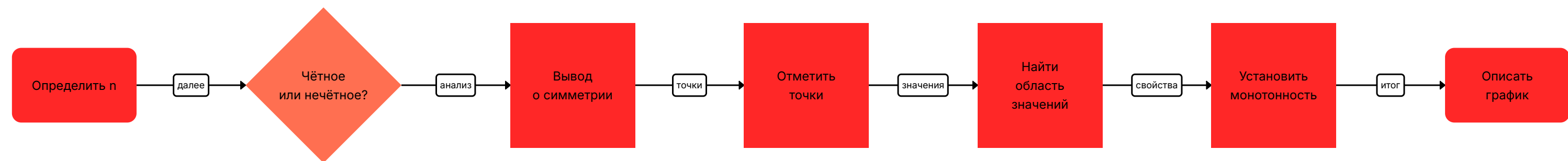
Чётность показателя полностью определяет общую форму графика и характер значений функции.

Свойства функции $y = x^n$ при натуральном n .

Свойство	Чётное n	Нечётное n
Симметрия	Относительно Oy	Относительно O
Знак значений	$y \geq 0$	Любой
Монотонность	Убыв./возраст.	Возрастает
Минимум	Есть, 0	Нет

Как исследовать график $y = x^n$

Пошаговый разбор степени n , симметрии, опорных точек и основных свойств графика.



Монотонность и форма графика

Нечётная степень

При нечётном показателе функция возрастает на всей числовой прямой, поэтому её график не имеет участков убывания и сохраняет один и тот же направленный характер слева направо.

Влияние роста n

Чем больше показатель, тем сильнее график прижимается к оси Ox около точки $(0; 0)$ и тем резче поднимается или опускается при больших значениях $|x|$.

Чётная степень

При чётном показателе график ведёт себя по-разному по разные стороны от нуля: слева он убывает, достигает минимума в начале координат, а справа снова возрастает.

Сравнение степеней

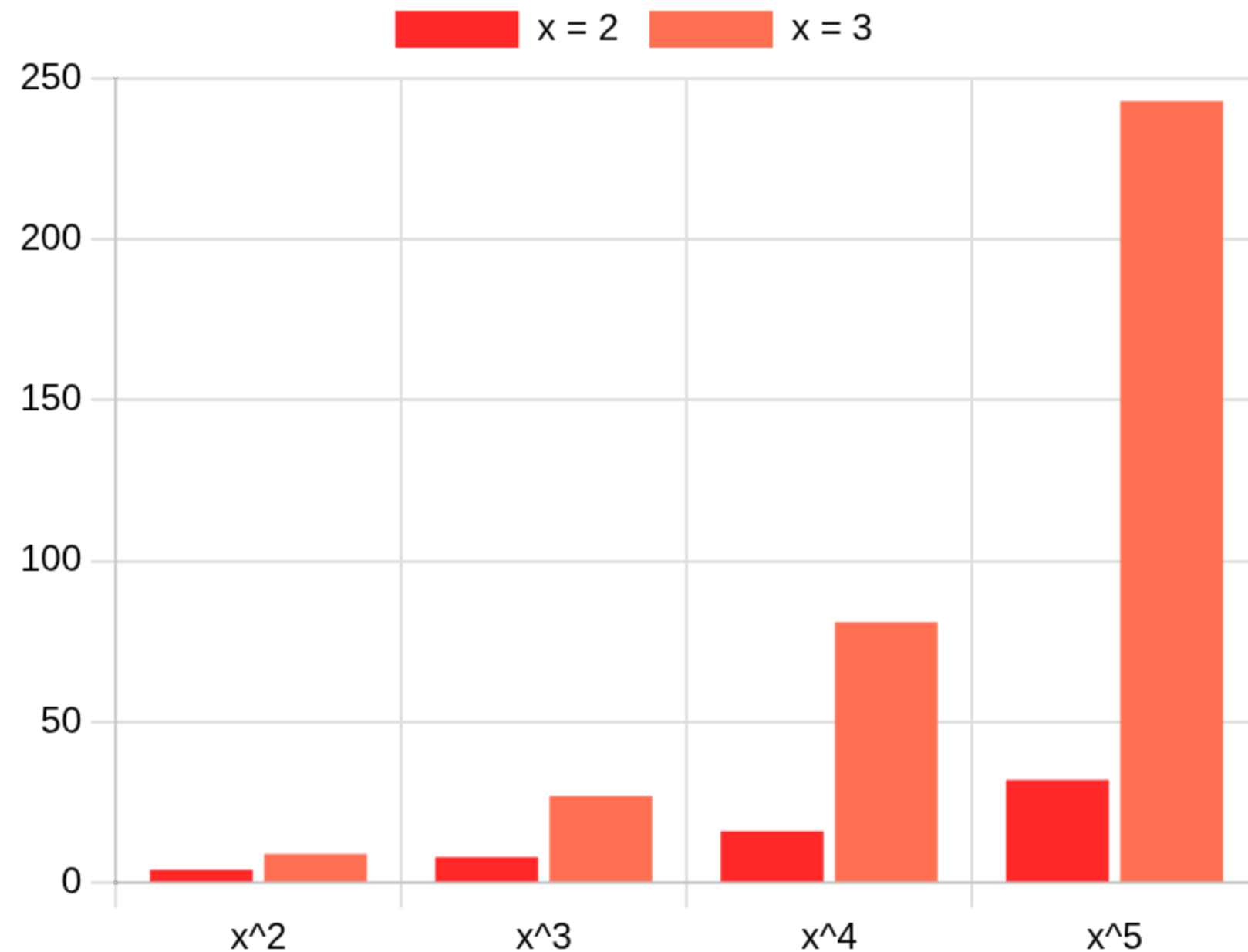
Различие особенно заметно, если сопоставить пары 2 и 4, 3 и 5 или 5 и 7: общая форма сохраняется, но крутизна кривой меняется заметно и закономерно.

Как степень влияет на скорость роста значений

Для одинакового основания увеличение показателя даёт всё более быстрый рост. Особенно наглядно это видно, когда x больше 1 и сравниваются соседние степени.

При $x > 1$ каждая новая степень резко усиливает рост функции; при переходе от $x=2$ к $x=3$ разница становится особенно заметной.

Вычисления по определению степени:
 x^n , $n=2,3,4,5$; $x=2$ и $x=3$.



Поведение функции при $|x| < 1$ и при больших $|x|$

Малые по модулю числа

Если $|x|$ меньше 1, то при увеличении показателя n значения x^n становятся всё ближе к нулю. Это особенно хорошо видно на числах, расположенных между -1 и 1 .

Большие по модулю числа

Если $|x|$ больше 1, то рост показателя n приводит к быстрому увеличению модуля результата. Чем выше степень, тем сильнее различие между соседними графиками.

На одном поле

Сравнение графиков $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = x^4$ помогает увидеть, как одна и та же точка x по-разному влияет на высоту кривой.

$$y = x^2$$

$$y = x^3$$

Опорные точки графика

1

Общие точки

Любой график $y = x^n$ проходит через начало координат и через точку $(1; 1)$. Эти две точки удобно использовать как первую проверку правильности построения.

2

Нечётный показатель

Если n нечётно, то точка $(-1; -1)$ тоже принадлежит графику. Она показывает, что знак результата совпадает со знаком основания и подтверждает симметрию относительно начала координат.

3

Чётный показатель

Если n чётно, то при $x = -1$ получается $y = 1$, поэтому график проходит через точку $(-1; 1)$. Это быстро отделяет чётные степени от нечётных при построении.

Таблица значений для построения графиков

Сравнение значений для нескольких степеней при одинаковых x помогает увидеть различия формы и скорости роста.

x	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^4$
-2	4	-8	16
2	4	8	16

Одинаковые по модулю значения x дают разные результаты для чётных и нечётных степеней; знак и величина ответа зависят от чётности показателя.

Вычисления по определению степени для $x = -2$ и $x = 2$.

Примеры применения степенной зависимости

Площадь квадрата

1

Формула $S = a^2$ показывает, что площадь растёт быстрее длины стороны. Если сторону увеличить вдвое, площадь станет больше в четыре раза, что наглядно отражает квадратичную зависимость.

Объём куба

2

В формуле $V = a^3$ объём связан с третьей степенью ребра. При увеличении линейного размера в 2 раза объём возрастает в 8 раз, что заметно сильнее, чем площадь.

Масштабирование моделей

3

Степенные законы используют при переводе размеров макетов в реальные размеры, когда нужно учесть, как меняются площадь, объём или другие характеристики при изменении масштаба.

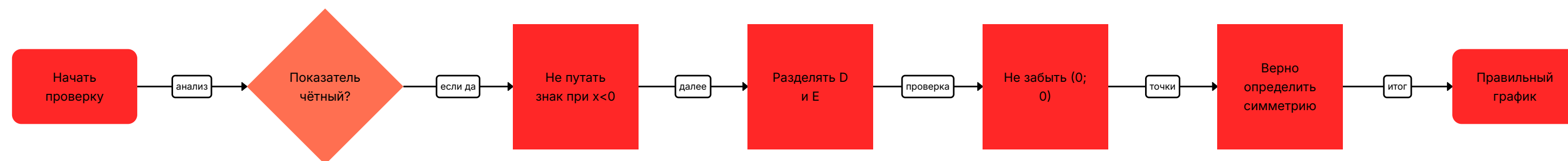
Естественные науки

4

В задачах физики, биологии и географии степенная зависимость помогает описывать рост величин, сравнивать модели и делать выводы о том, как изменение аргумента влияет на результат.

Где чаще всего ошибаются при работе с $y = x^n$

Типовые затруднения при определении знака, симметрии, области значений и опорных точек.



Связь с другими темами алгебры

1

Степенные уравнения

Функция $y = x^n$ напрямую ведёт к решению степенных уравнений, где важно понимать, как показатель влияет на число корней, знак результата и возможность симметричных решений.

2

Сравнение моделей

На её примере удобно сопоставлять линейную, квадратичную и кубическую зависимости, замечая, как изменяется скорость роста и почему графики выглядят принципиально по-разному.

3

Подготовка к дальнейшему изучению

Тема закрепляет понятия симметрии, монотонности и области значений, которые затем используются при изучении более сложных функций и преобразований графиков в старших классах.

Степень, которая объясняет форму графика

Функция $y = x^n$ при натуральном n кажется простой, но по ней хорошо видно, как алгебраическая запись превращается в наглядный график. Чётность показателя задаёт симметрию, знак значений и монотонность, а рост n меняет крутизну кривой.