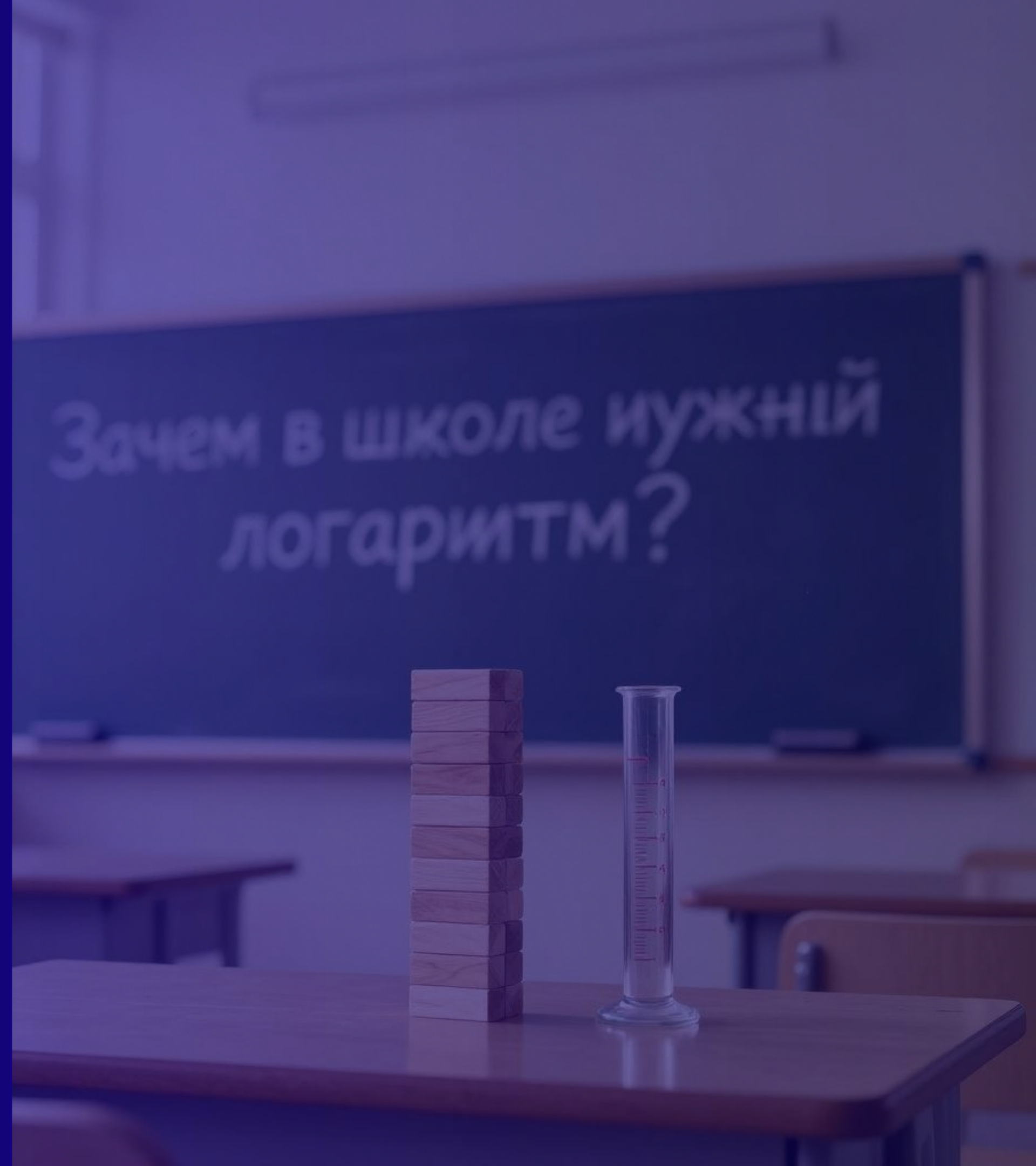


Понятие логарифма

Логарифм связывает степени и числа, к которым эти степени приводят; это ключ к решению экспоненциальных задач.

Зачем в школе нужен логарифм?

В 11 классе многие уравнения и модели сводятся к показательной зависимости. Логарифм позволяет «открутить» степень назад: превращает умножение в сложение и помогает находить неизвестный показатель.



Что такое логарифм, если смотреть «через степень»

Логарифм числа по основанию показывает, в какую степень нужно возвести основание, чтобы получить данное число: если $a^x = b$, то $\log_a(b) = x$.

Основание a должно быть положительным и не равным 1, а само b — положительным. При этих условиях логарифм определён и имеет единственное значение.

Понимание логарифма строится на обратимости: показательная функция «выдаёт» b , а логарифм возвращает x — показатель степени — в виде числа.

Область значений и простая геометрия смысла

Для логарифма действуют ограничения: $a > 0$, $a \neq 1$, и $b > 0$. Эти условия не «формальность», а защита смысла степени на действительных числах.

Смена основания меняет масштаб: при разных a один и тот же b соответствует разным значениям логарифма, но связь «степень $\leftrightarrow$ показатель» сохраняется.

Если $a > 1$, то $\log_a(b)$ растёт вместе с b ; если $0 < a < 1$, рост меняется на убывание. Это помогает быстро оценивать ответ по смыслу.

Можно мысленно закрепить идею так: логарифм — это ответ на вопрос «какой показатель?»; степень — это «сколько получилось» после возведения в степень.

Логарифм и его смысл: сравнение понятий

Запись	Что ищем	Условие	Смысл
$a^x=b$	x	$b>0$	показатель степени
$\log_a(b)$	x	$a>0, a\neq 1$	обратная величина
$\log_a(1)$	0	$a>0$	$\text{основание}^0=1$
$\log_a(a)$	1	$a>0, a\neq 1$	$a^1=a$

Сопоставьте ключевые объекты, чтобы ясно понимать, что именно вычисляется.

Одинаковая формула раскрывается через обратную задачу: степень задаёт результат, а логарифм возвращает показатель.

Основные свойства логарифмов (без громоздких вычислений)

Умножение внутри логарифма превращается в сложение:
 $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
Это позволяет упрощать выражения, не раскрывая показатели напрямую.

Деление превращается в разность: $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$. В задачах часто достаточно аккуратно разложить исходное выражение на «множители».

Степень превращается в коэффициент:
 $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x)$. Здесь важно, чтобы выражения были положительными, тогда логарифмы определены.

Логарифм тождественен «сведению к основанию»:
 $\log_a(a) = 1$, $\log_a(1) = 0$ и $\log_a(b)$ определён только при $b > 0$, что часто задаёт рамки решения.

Как находить неизвестное с помощью логарифма

Логарифм — инструмент для обратного хода в показательных уравнениях.



Логарифмы в задачах: где действительно «помогает»

При решении показательных уравнений логарифм снимает неизвестный показатель: например, $a^x=b$ становится $x=\log_a(b)$. Это прямой путь, когда основание одинаковое.

В выражениях с логарифмами свойства переводят сложные формы в более удобные: произведения — в сумму, деления — в разность, степени — в множитель.

Полезно также связывать логарифмы с реальными процессами: например, шкалы, где «каждый шаг» соответствует изменению в показательной модели, часто описываются логарифмами.

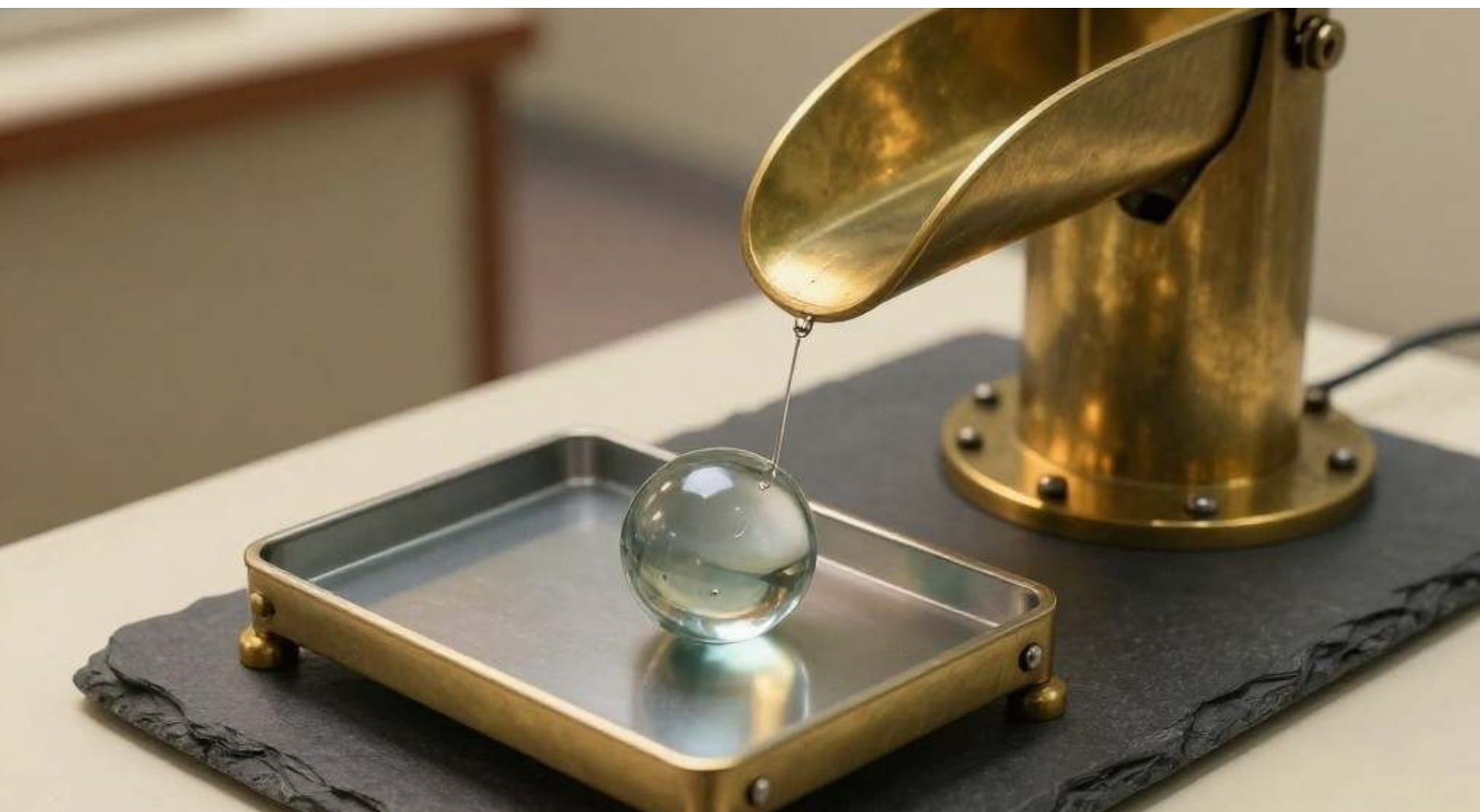
Идеи для иллюстраций и обсуждения

Обратная задача: степень и «возврат» показателя

Попросите представить, что показательная формула — это машина: на вход x подаём, на выход получаем a^x . Логарифм — та же машина, но в обратную сторону: он отвечает, какой вход соответствует данному выходу. Так смысл становится осязаемым.

Почему множители превращаются в сумму

Покажите на примере: если a^x и a^y дают два результата, то их произведение соответствует $a^{(x+y)}$. Логарифм как раз фиксирует это соответствие: логарифм произведения равен сумме логарифмов. Благодаря этому можно упрощать решения быстрее.



Итоги темы: что нужно уметь к концу раздела

Уверенно читать определение: $\log_a(b)=x$ означает, что $a^x=b$. На этом строится любой следующий шаг — от упрощений до решения уравнений.

Знать ограничения: $a>0$, $a\neq 1$ и $b>0$. Эти условия влияют на существование ответа и помогают не ошибаться в преобразованиях.

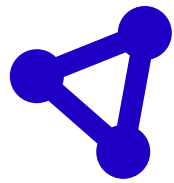
Использовать свойства логарифмов как «инструмент преобразований»: умножение — в сумму, деление — в разность, степени — в множитель, а затем проверять результат по исходной задаче.

Сравнение формул объёма основных тел

Коэффициент при $S_{\text{осн}} \cdot h$ — это быстрый «маркер»:
одинаковая высота и основание означают различие только в
масштабе 1 и $1/3$.

Если задача сводится к одному основанию и высоте, достаточно
определить тип тела: призма/цилиндр дают $V = S_{\text{осн}} \cdot h$,
пирамида/конус — $V = 1/3 \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$.

Тела вращения: цилиндр, конус и сфера



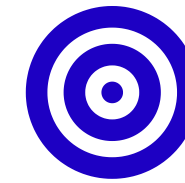
Цилиндр

Цилиндр получают вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. У него есть два равных основания и высота, а ось задаёт геометрию боковой поверхности.



Конус

Конус образуется вращением прямоугольного треугольника вокруг катета. Основание — круг, вершина — одна точка, а высота измеряется по перпендикуляру к основанию.



Сфера

Сфера получается вращением полуокружности вокруг диаметра. Её радиус полностью задаёт тело: оснований у сферы нет, зато важны свойства поверхности и объёма.

Формулы тел вращения

Сопоставьте радиус r и высоту h с нужной формулой: они подставляются напрямую и дают объём и площадь поверхности.

Во всех трёх случаях радиус входит в формулы степенями 2 или 3: это объясняет, почему даже небольшое изменение r заметно меняет и объём, и поверхность.

Фигура	Элементы	Площадь	Объём
Цилиндр	r, h	$S=2\pi r(h+r)$	$V=\pi r^2h$
Конус	r, h	$S=\pi r(r+ l)$	$V=1/3\pi r^2h$
Сфера	r	$S=4\pi r^2$	$V=4/3\pi r^3$

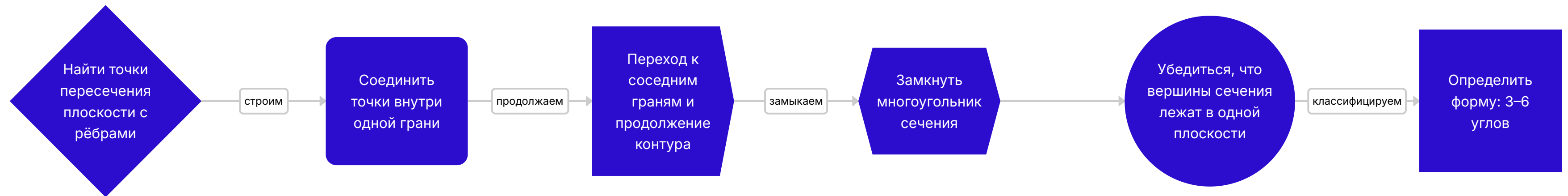
Сечение пространственных фигур плоскостью

При изменении положения секущей плоскости контур сечения переходит между типами: форма «нарастает» или «сжимается» в зависимости от пересечений с рёбрами.

Чтобы предсказать вид сечения, нужно мысленно связать плоскость с рёбрами и осями симметрии: тогда проще выбрать нужный способ вычислений или построений.

Как строится сечение многогранника

Алгоритм по шагам, применяемый к призме и пирамиде при построении сечения секущей плоскостью.



Расстояния и углы в пространстве

Расстояние между двумя точками в пространстве — это длина отрезка, соединяющего их. В задачах часто помогает прямое сведение к треугольнику и теореме Пифагора.

Расстояние от точки до прямой и от точки до плоскости находят через перпендикуляр: длина этого перпендикуляра и является искомой величиной. Важно корректно провести прямой угол.

Угол между прямой и плоскостью берут как угол между прямой и её проекцией на плоскость. Для угла между плоскостями используют связь с двугранным углом и переход к линейному углу.

Проекции и пространственные измерения

Проекция часто переводит задачу в плоскую геометрию: нужные углы и длины выражаются через прямоугольные треугольники в проекционной плоскости.

Если представить фигуру через проекции и основания перпендикуляров, вычисления становятся управляемыми: остаётся выбрать правильный треугольник для применения формул.

Типичные ошибки в задачах по стереометрии

Частая проблема — путаница высоты с боковым ребром: в объёме и в площадях «высота» должна быть перпендикуляром к основанию, а не любым отрезком внутри фигуры.

Иногда неверно определяется основание призмы или пирамиды: из-за этого неправильно выбирают S и h , а затем «ломается» вся подстановка в формулы.

При нахождении расстояния пропускают перпендикуляр: ищут диагональ там, где нужна кратчайшая связь. Важно строить именно прямой угол между линиями или плоскостями.

Нередки ошибки замены единиц: используют формулы площади вместо объёма (и наоборот). Чтобы избежать этого, стоит постоянно отслеживать размерность и смысл величины в задаче.

Ключевые формулы и признаки по теме

Раздел	Запись	Когда применять
Объём призмы/ цилиндра	$V = S_{\text{осн}} \cdot h$	к телам с одинаковым основанием и боковой «высотой»
Объём пирамиды/ конуса	$V = 1/3 S_{\text{осн}} \cdot h$	если тело имеет вершину и «сужение»
Сфера	$S = 4\pi r^2$	для площади поверхности сферы
Сфера	$V = 4/3 \pi r^3$	для объёма сферы
Перпендикулярность	признак прямой и плоскости	когда прямая перпендикулярна другой плоскости через прямую
Вывод	фигура $\rightarrow$ формула	распознать тип и выбрать нужную зависимость

Систематизация опорных формул и ориентиров: правильная идентификация типа фигуры — основа решения.

Таблица показывает связку: сначала устанавливают положение элементов (параллельность/перпендикулярность), затем переходят к формуле по типу тела и к подстановке r , h и $S_{\text{осн}}$.

Стереометрия в 11 классе: цель и результат

Стереометрия объединяет пространственные модели, признаки взаимного расположения и вычислительные формулы. Она учит строить сечения, находить расстояния и углы, а также уверенно получать площади и объёмы по теоремам и формулам.