

File Edit Search Help

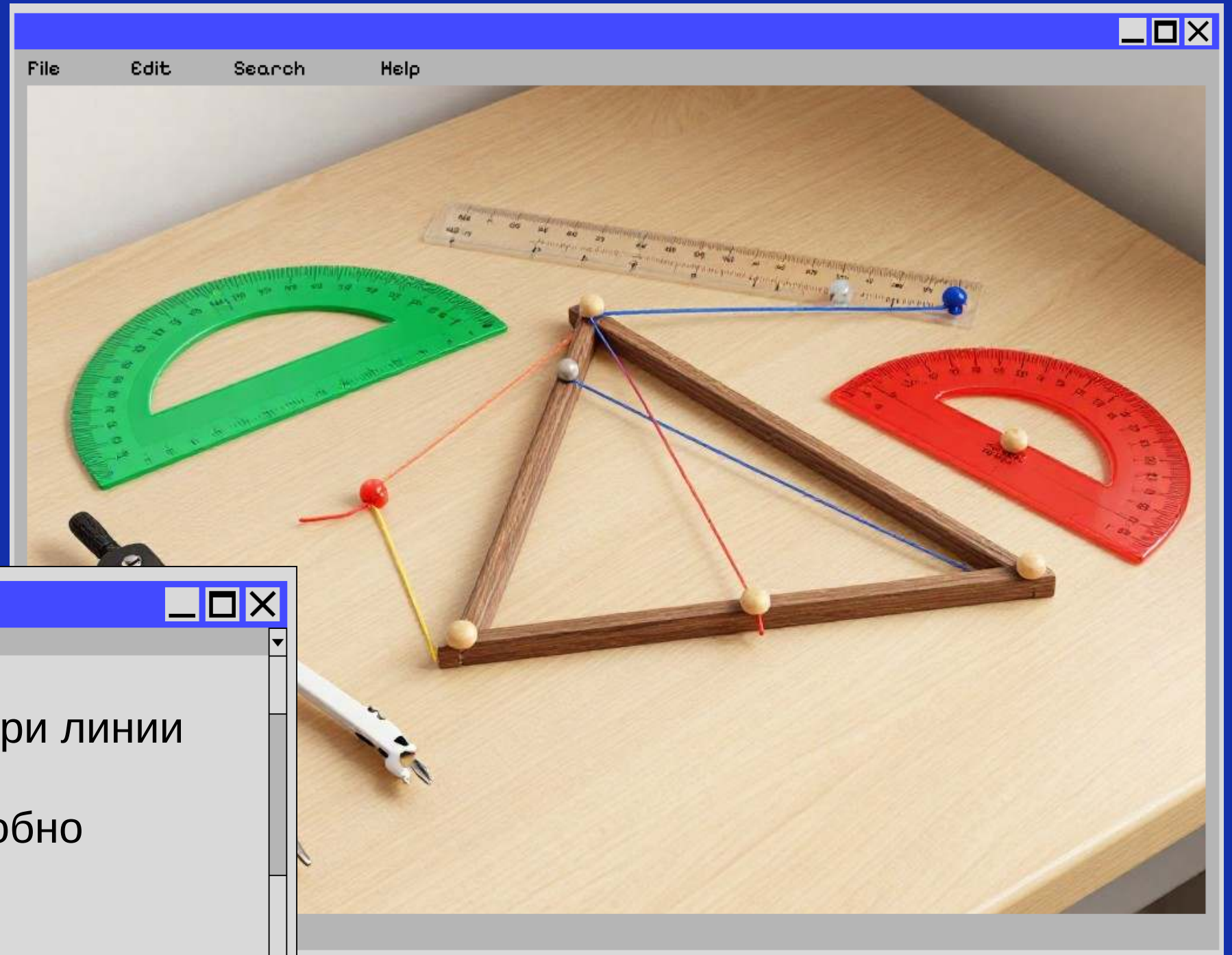
Тригонометрическая форма теоремы Чебы

Углы треугольника помогают проверить пересечение
трёх cevian.

Ok

Зачем нужна теорема Чебы

Ok



Она быстро показывает, пересекаются ли три линии из вершин треугольника в одной точке. В тригонометрической форме особенно удобно работать, когда даны углы и синусы.

Обычная теорема Чебы

1

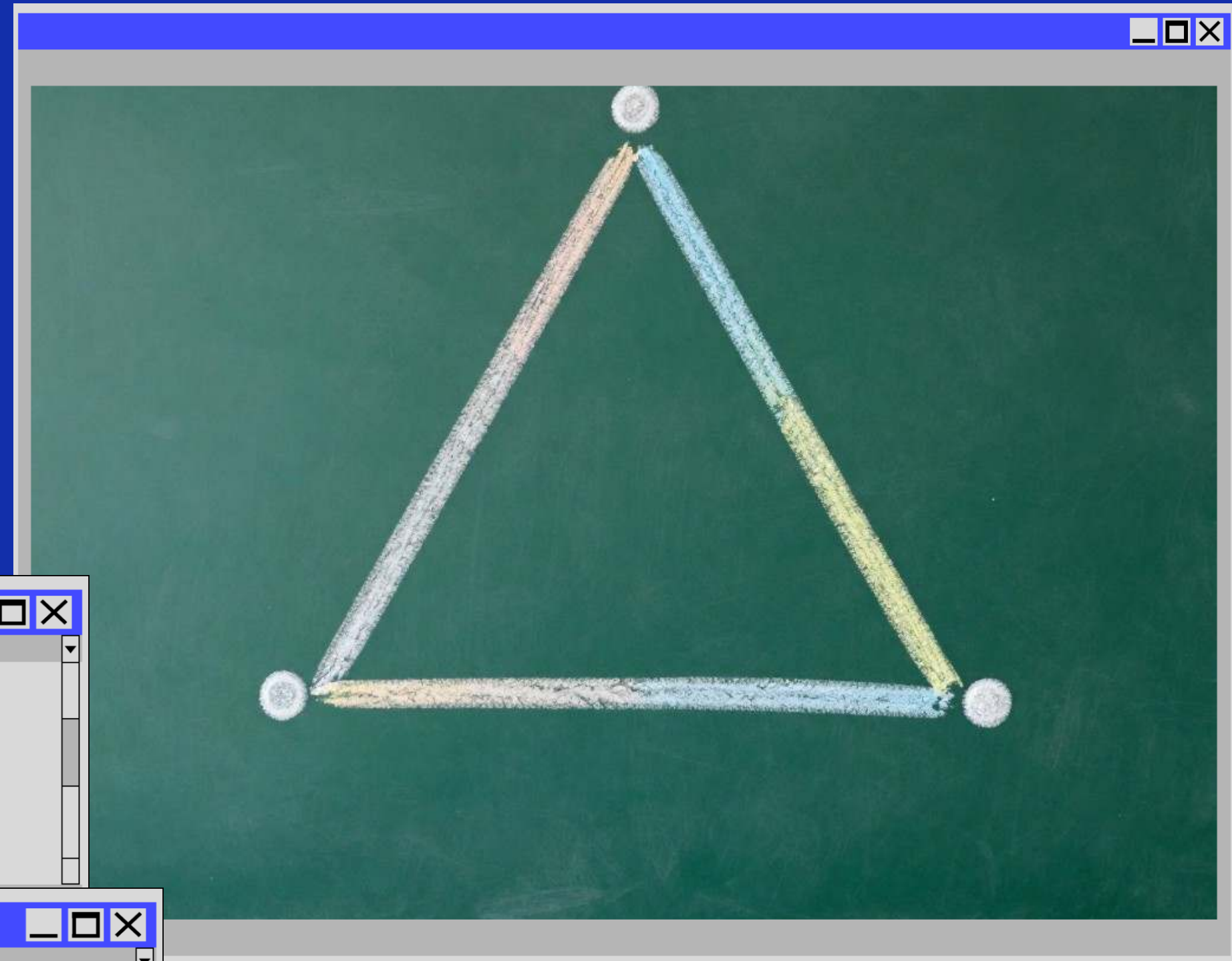
Точки на сторонах

В треугольнике ABC точки D, E и F лежат на сторонах BC, CA и AB. Через них проводят отрезки из вершин треугольника.

2

Условие пересечения

Прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда произведение $BD/DC \cdot CE/EA \cdot AF/FB$ равно 1.



Переход от длин к углам

Смотрим на малые треугольники

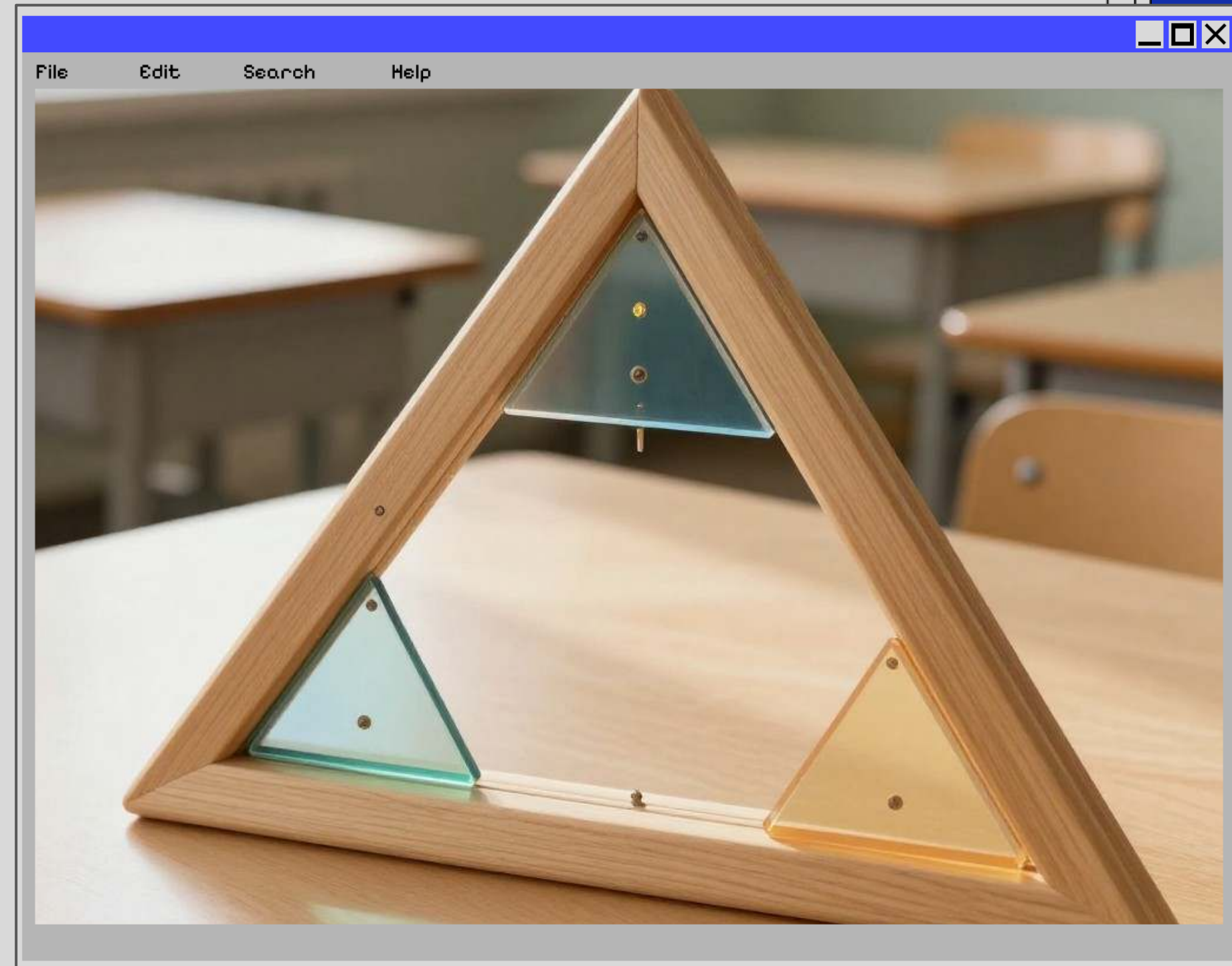
Каждая *cevian* образует внутри большого треугольника несколько меньших треугольников. Именно в них удобно применять теорему синусов и сравнивать не длины, а углы.

Заменяем отношения

Отношения отрезков можно выразить через синусы углов, которые образуются у вершин треугольника. Это особенно полезно, когда числовые длины не даны.

Получаем удобную проверку

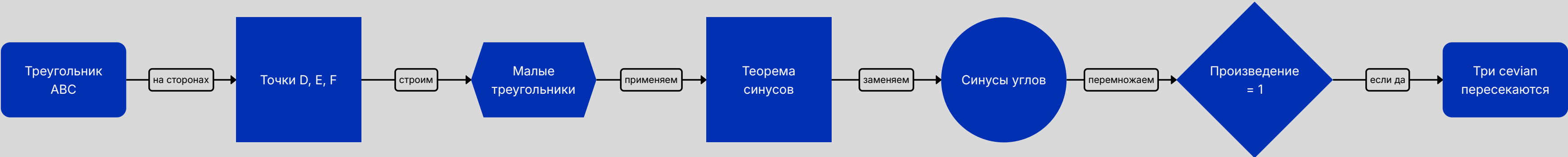
После замены и перемножения трёх выражений появляется условие, которое легко проверить по углам. Так обычная форма превращается в тригонометрическую.



Как получают тригонометрическую формулу

Последовательность перехода от рисунка к формуле

Ok



1

— именно этому числу должно быть равно произведение трёх отношений синусов.

Это главное условие: если оно выполняется, три линии из вершин треугольника пересекаются в одной точке.

Ok

Обычная и тригонометрическая формы теоремы

Две записи описывают одно и то же свойство треугольника, но опираются на разные данные.

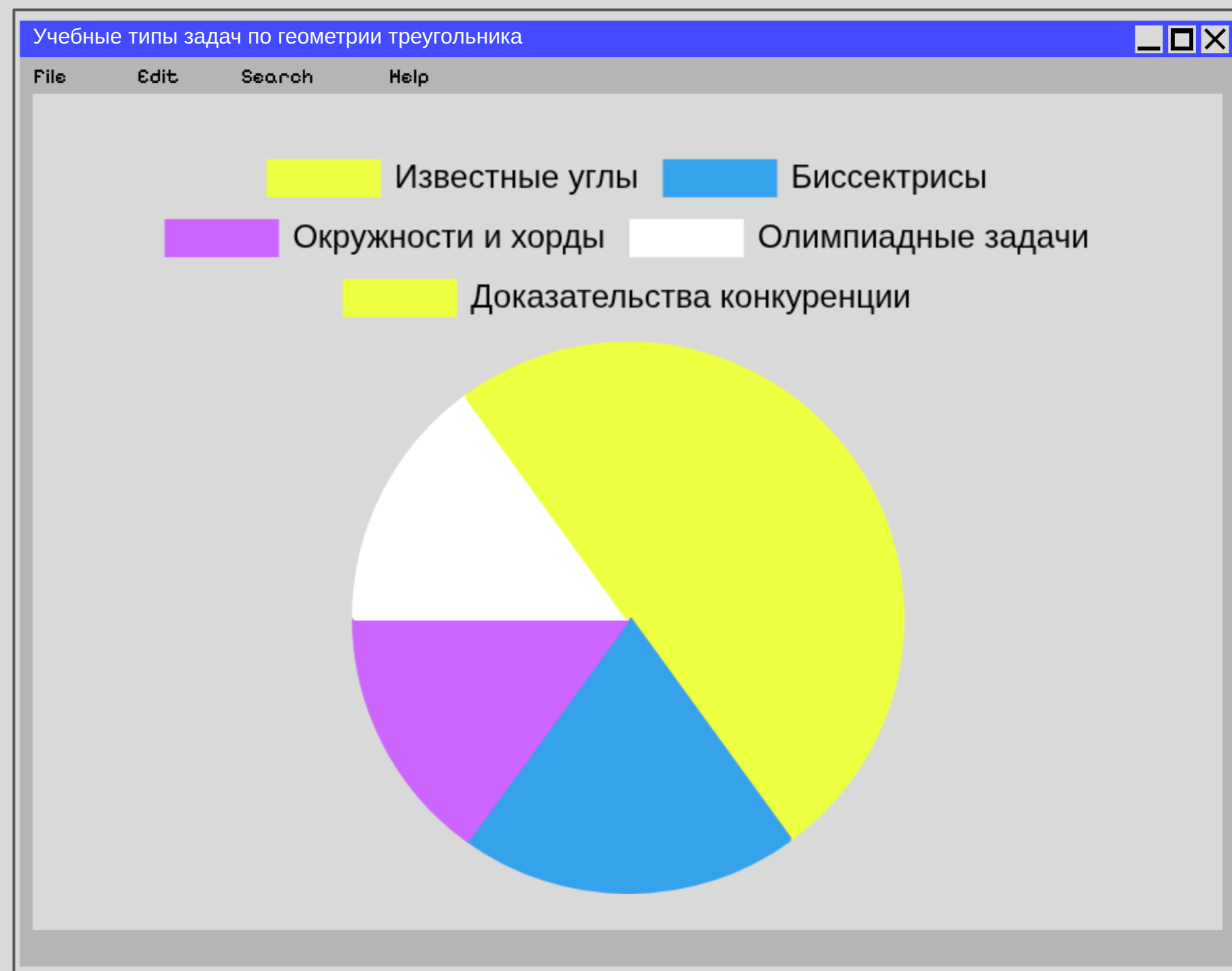
Если известны длины, берут обычную форму; если известны углы, проще использовать синусы.

Сравнение форм теоремы Чевы			
File Edit Search Help			
Формулировка	Сравнивается	Когда удобна	Что проверяет
Обычная	отрезки	даны длины	конкуренции cevian
Тригонометрическая	синусы	даны углы	ту же конкуренции

Где чаще используется тригонометрическая форма

На уроках и в задачах она особенно полезна, когда нужно обойтись без длинных вычислений и опереться на углы.

Чаще всего синусная запись нужна там, где даны углы, поэтому она заметно ускоряет решение.



Что такое cevian



От вершины к стороне

Cevian — это отрезок, который соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне. Он всегда начинается в вершине и заканчивается на стороне.

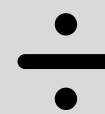
Ok



Медиана

Медиана — частный случай cevian. Она идёт из вершины к середине противоположной стороны и делит её на две равные части.

Ok



Биссектриса

Биссектриса тоже является cevian. Она делит угол вершины пополам и часто помогает применять теорему Чевы в задачах с равными углами.

Ok



Высота

Высота — это cevian, проведённая под прямым углом к стороне. Она показывает, как геометрические линии треугольника могут пересекаться в одной точке.

Ok

Какие углы входят в формулу

1 Угол у вершины A

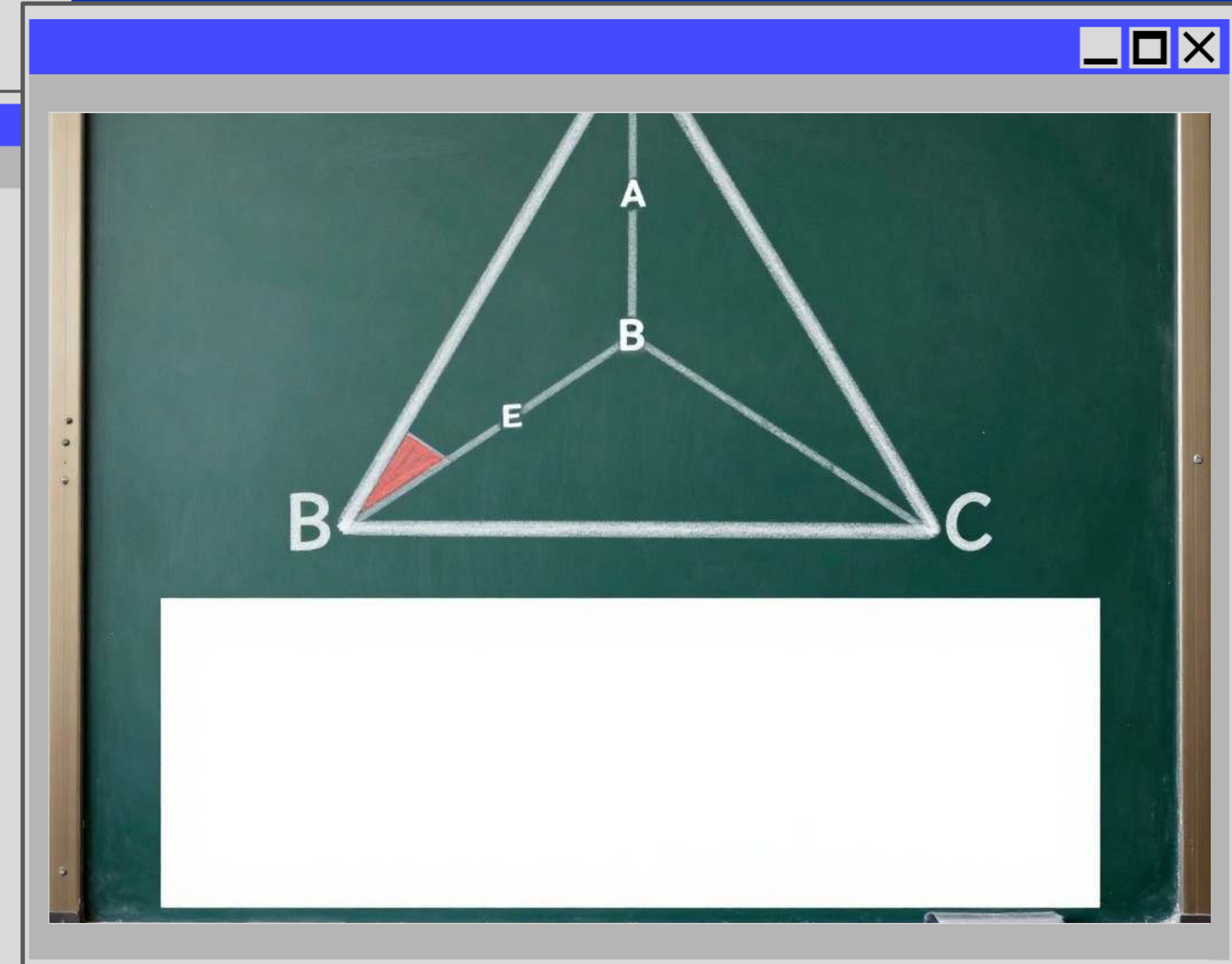
Для отрезка AD используются два угла при вершине A: $\angle BAD$ и $\angle CAD$. Они показывают, как *cevian* делит угол треугольника на две части.

2 Угол у вершины B

Для отрезка BE берут углы $\angle CBE$ и $\angle ABE$. Именно их синусы входят во второе отношение и связывают отрезок BE с вершиной B.

3 Угол у вершины C

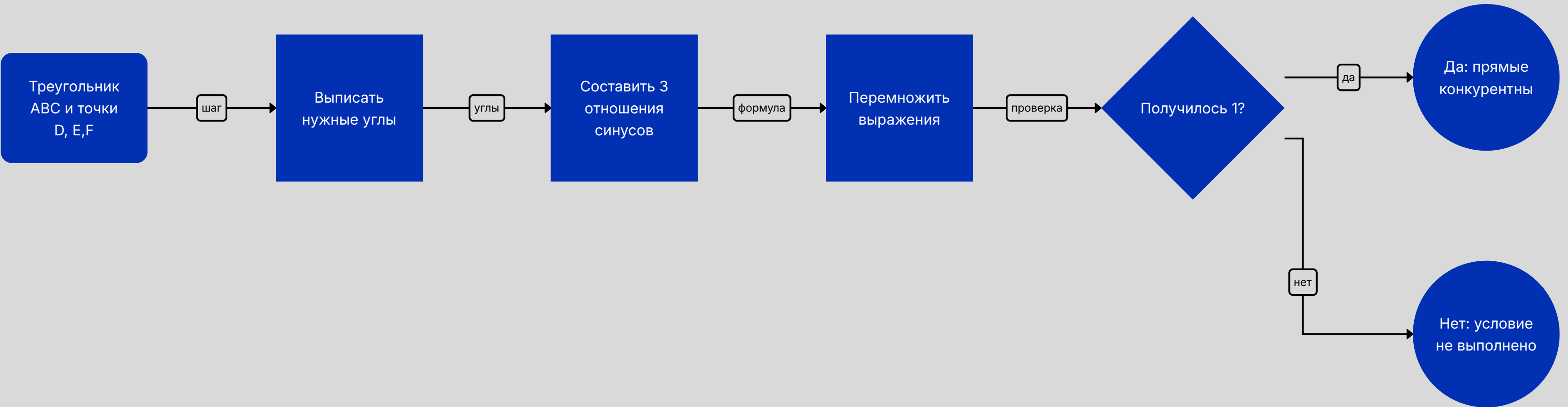
Для отрезка CF используются углы $\angle ACF$ и $\angle BCF$. Вместе три пары углов образуют полное тригонометрическое условие теоремы Чебы.



Проверка условия Чебы по шагам

Точки D, E и F на сторонах треугольника задают три *cevian*, для которых проверяется тригонометрическое условие пересечения.

Ok



Частные случаи: медианы и биссектрисы

Медианы

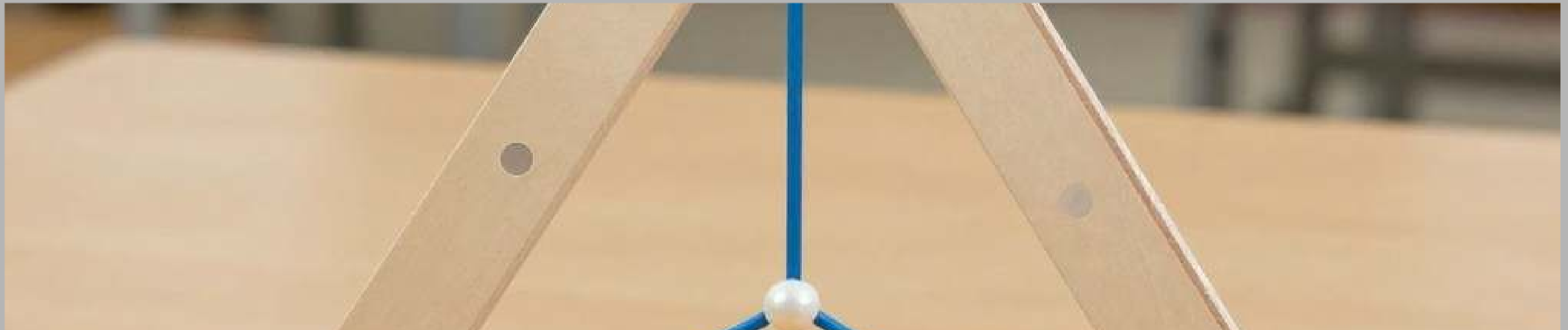
Каждая медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны. Все три медианы пересекаются в одной точке — центре тяжести, который делит их в известном отношении.

Биссектрисы

Биссектриса делит угол пополам и показывает равенство расстояний до сторон. Три биссектрисы всегда встречаются в одной точке — центре вписанной окружности.

Связь с Чевой

Для медиан и биссектрис в формулах Чебы появляются особенно простые отношения, поэтому условие пересечения проверяется почти без вычислений и хорошо запоминается.



Типичные специальные линии в треугольнике

Свойства специальных линий в треугольнике: медиан, биссектрис и высот.

File Edit Search Help

Линия	Свойство	Точка пересечения
Медиана	Делит сторону пополам	Центр тяжести
Биссектриса	Делит угол пополам	Центр вписанной окружности
Высота	Перпендикуляр к стороне	Ортоцентр

Три важные линии треугольника имеют свои свойства и свои точки пересечения. Это помогает быстро узнавать их в задачах и применять теорему Чебы.

У всех трёх линий есть устойчивая геометрическая роль, а их пересечение в одной точке делает задачи на треугольник короче и нагляднее.

Связь с теоремой синусов

Три маленьких треугольника внутри одного

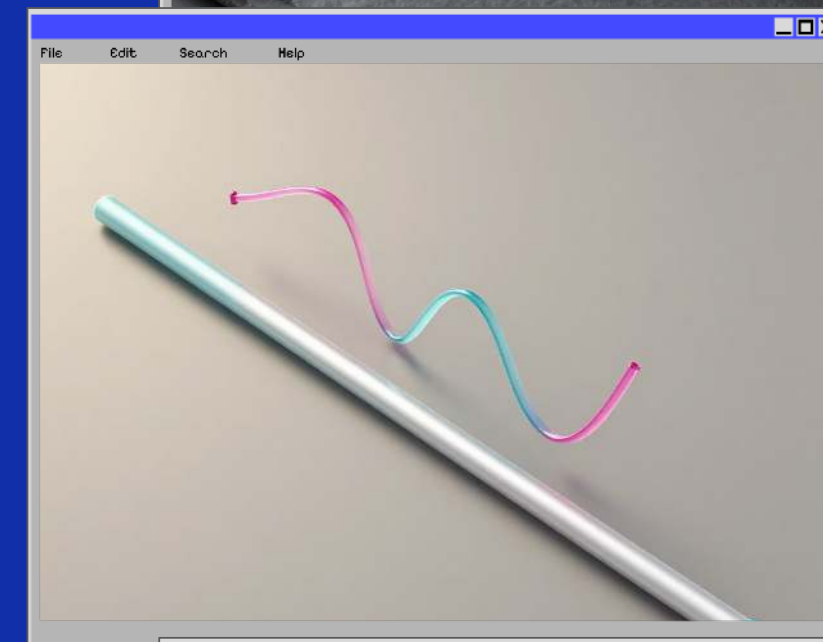
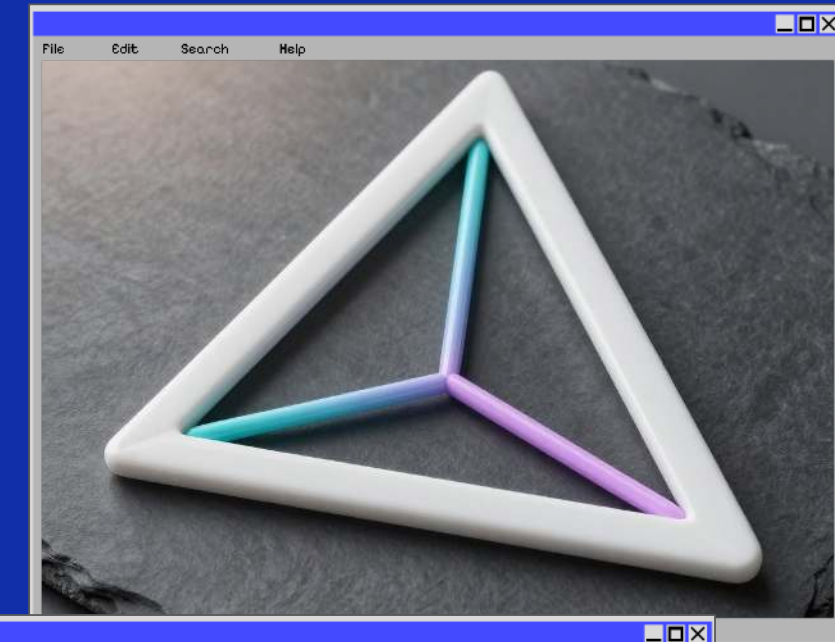
Если провести *cevian* из вершин к сторонам треугольника, внутри появляются несколько меньших треугольников. Именно в них удобно применять теорему синусов, потому что каждый кусок связан с углами у вершин.

От длин к синусам

Вместо прямого сравнения отрезков можно выразить их через синусы углов, которые они образуют со сторонами. Так задача становится тригонометрической и часто требует меньше громоздких вычислений.

Одна формула вместо трёх проверок

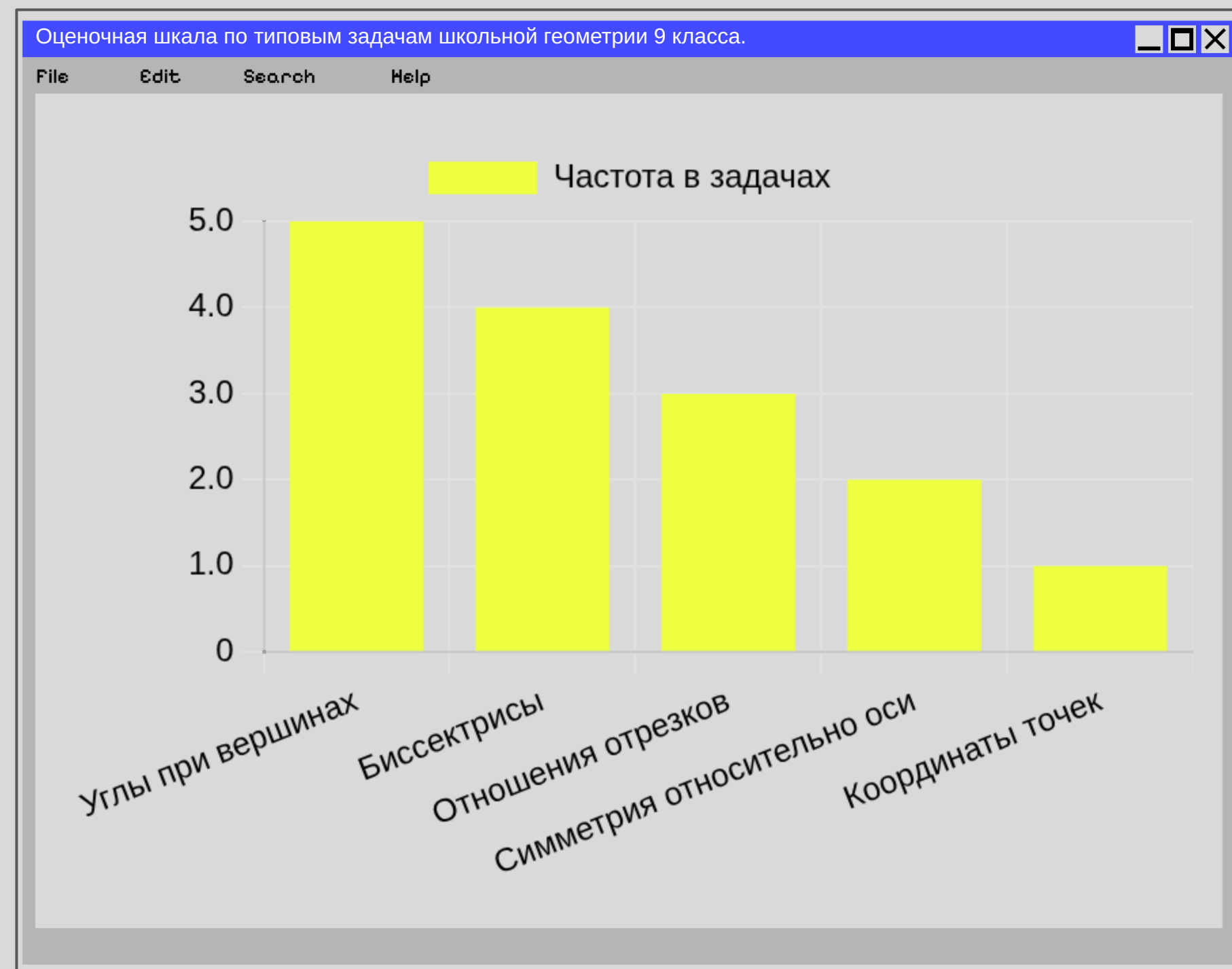
После применения теоремы синусов к каждому маленькому треугольнику получается цепочка отношений. Их перемножение приводит к условию Чебы, где важен итоговый результат, равный единице.



Какие данные встречаются в задачах

Шкала отражает типичную встречаемость условий в школьных задачах по теме, а не точный статистический подсчёт.

Чаще всего встречаются углы и биссектрисы: именно они лучше всего подходят для тригонометрической формы теоремы Чевы.



Обратная теорема Чебы

1

Сначала выбирают точки

На сторонах треугольника отмечают точки D, E и F и записывают углы, которые соответствуют трём *cevian*. Здесь важно не перепутать, какие стороны образуют нужные отношения.

2

Проверяют произведение

Далее составляют три отношения синусов и перемножают их. Если результат равен единице, это уже не просто проверка, а основание утверждать, что прямые встретятся в одной точке.

3

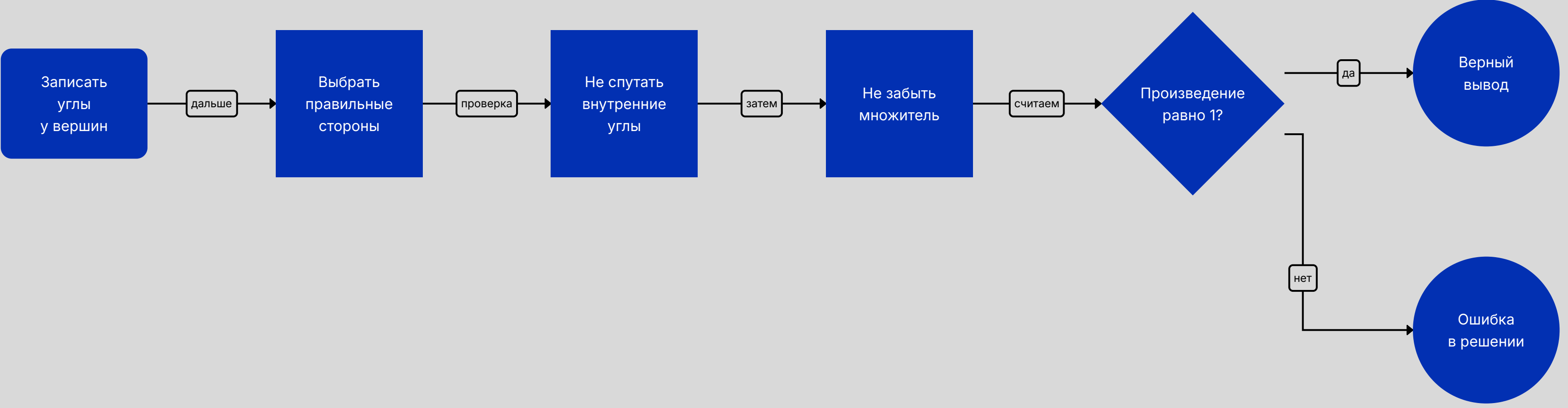
Делают вывод о пересечении

Обратная теорема Чебы позволяет не только подтверждать факт конкуренции, но и доказывать его. Поэтому она особенно полезна в задачах, где общую точку нужно именно установить.

Типичные ошибки в решениях

Последовательность показывает, где чаще всего возникает сбой при применении тригонометрической формы теоремы Чевы.

Ok



1

показывает, что три прямые
пересекаются в одной точке.

В задачах по теме именно это число
завершает проверку: если произведение
отношений синусов равно единице,
условие Чебы выполнено.

Ok

Главная идея для запоминания

Длины или углы

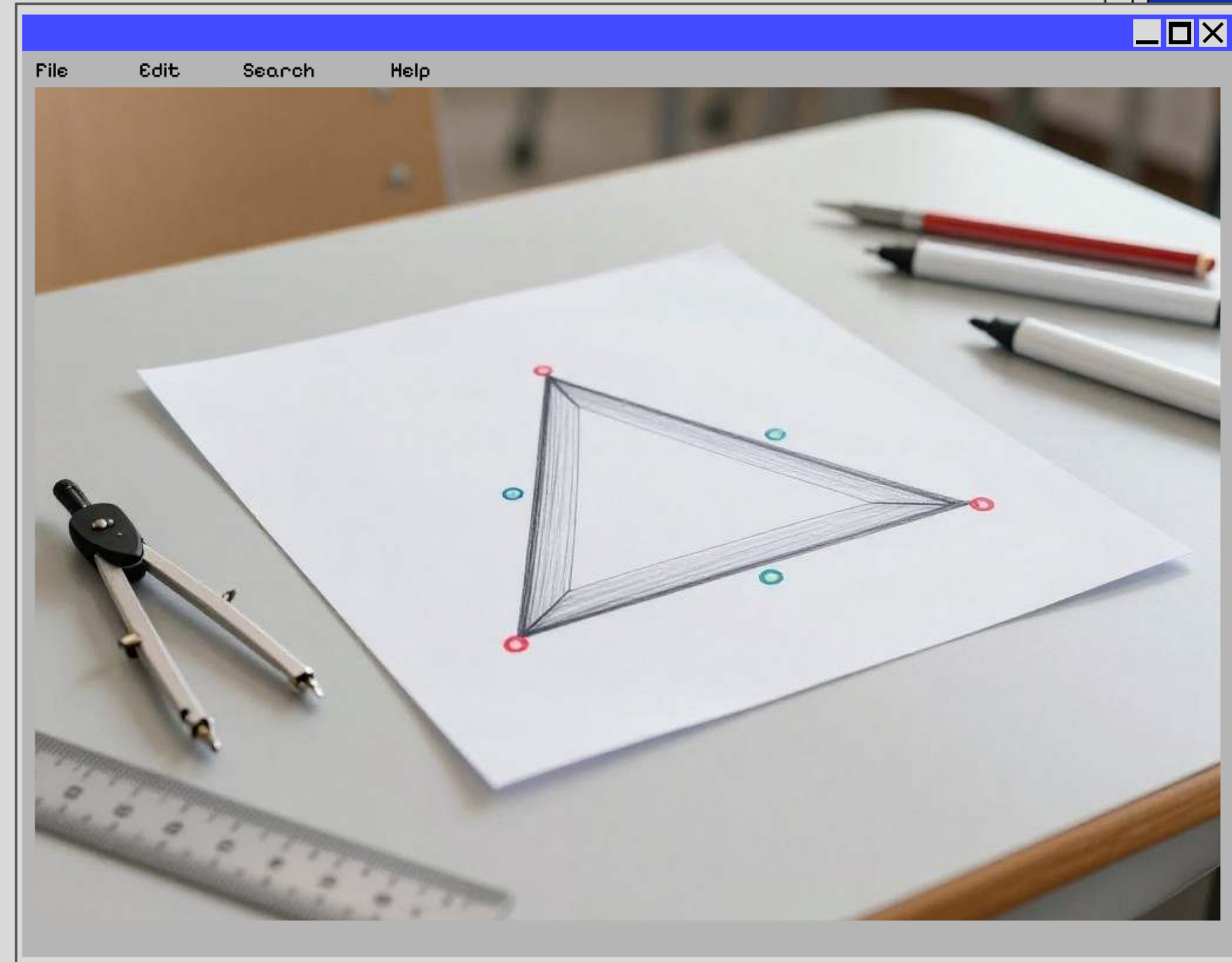
Обычная форма теоремы Чебы опирается на отношения отрезков, а тригонометрическая — на синусы углов. Выбор зависит от того, какие данные даны в задаче.

Один и тот же смысл

Обе записи описывают одно геометрическое свойство: три *cevian* пересекаются в одной точке. Меняется только язык решения — алгебраический или тригонометрический.

Смотри на рисунок

При решении полезно видеть весь треугольник, три точки на его сторонах и общую точку пересечения. Это помогает не потерять нужные углы и правильно составить формулу.



Тригонометрическая форма Чевы: кратко и по делу

Ok

Она помогает связать углы, синусы и пересечение трёх *cevian* в одной точке. В задачах 9 класса это удобный способ решать геометрию быстрее и аккуратнее.