

Шар и расстояние от точки до фигуры

Шар задаёт объём, а расстояние до него измеряет, насколько точка «дальше» от тела.



Зачем это нужно в 10 классе

Шар и сфера — базовые объекты стереометрии, а расстояние до фигуры помогает сравнивать точку и тело, проверять принадлежность, находить кратчайший путь и решать задачи на касание. В основе — формулы расстояний, алгебраическая запись и логические проверки.



Определение шара и сферы

1

Шар — множество всех точек пространства, расстояние от которых до заданного центра не превосходит радиуса. Его можно представить как «заполненное» пространство вокруг центра.

2

Сфера — граница шара: это множество точек, для которых расстояние до центра строго равно радиусу. Поэтому сфера отделяет внутреннюю область от внешней.

3

У шара есть центр, радиус и диаметр; у сферы дополнительно рассматривают хорды и касательные плоскости. Эти элементы помогают анализировать геометрию поверхности.

4

Относительно шара точка бывает внутри, на поверхности или вне фигуры. Такое различие и определяет, будет ли расстояние до шара нулевым или положительным.

Взаимное положение точки и шара

Рассматривают расстояние OA от точки A до центра O и сравнивают его с радиусом R . Если $OA < R$, то точка лежит внутри шара; при этом она «не требует» минимального прохода до поверхности.

Если $OA = R$, точка принадлежит сфере, то есть находится на границе шара. Когда $OA > R$, точка вне шара; тогда расстояние до фигуры становится положительным и определяется разностью $OA - R$.



Три случая взаимного положения точки и шара

Строки показывают, как знак сравнения OA с радиусом определяет положение точки и численное значение расстояния до шара.

Положительное расстояние до шара возникает только для внешней точки; на границе и внутри оно равно нулю.

Условие	Положение	d до шара	Смысл OA
$OA < R$	внутри	0	до центра
$OA = R$	на сфере	0	до центра
$OA > R$	вне	$OA - R$	до центра

Правило сравнения расстояния до центра с радиусом (школьная стереометрия)

Формула расстояния от точки до шара

1

Сначала находят расстояние OA между точкой A и центром O шара радиуса R . Оно измеряется по прямой в пространстве и служит отправной величиной для дальнейшего сравнения.

2

Если $OA \leq R$, точка принадлежит шару или лежит на его поверхности, поэтому расстояние от точки до шара равно 0. В этих случаях ближайшие точки тела не требуют перехода через поверхность.

3

Если $OA > R$, то ближайшая точка шара находится на сфере по направлению к центру, и расстояние равно $OA - R$. Эта формула всегда даёт минимальную длину отрезка до любой точки шара.

Как меняется расстояние до шара в разных случаях

На диаграмме видно: изменение расстояния до центра пересекает радиус — и именно в этот момент начинается положительное расстояние до шара.

Ключевой порог — радиус: до него расстояние обнуляется, а при выходе наружу появляется величина $OA - R$.

Примеры из условия диаграммы: $OA=3, R=5$; $OA=5, R=5$; $OA=9, R=5$.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2$$

Неравенство описывает все точки, расстояние которых до центра не больше радиуса.

Координатная форма позволяет проверять принадлежность точек шару без сложного построения и сразу переходить к вычислениям.

Стандартная аналитическая геометрия: уравнение сферы и неравенство шара.

Как находят расстояние в координатах

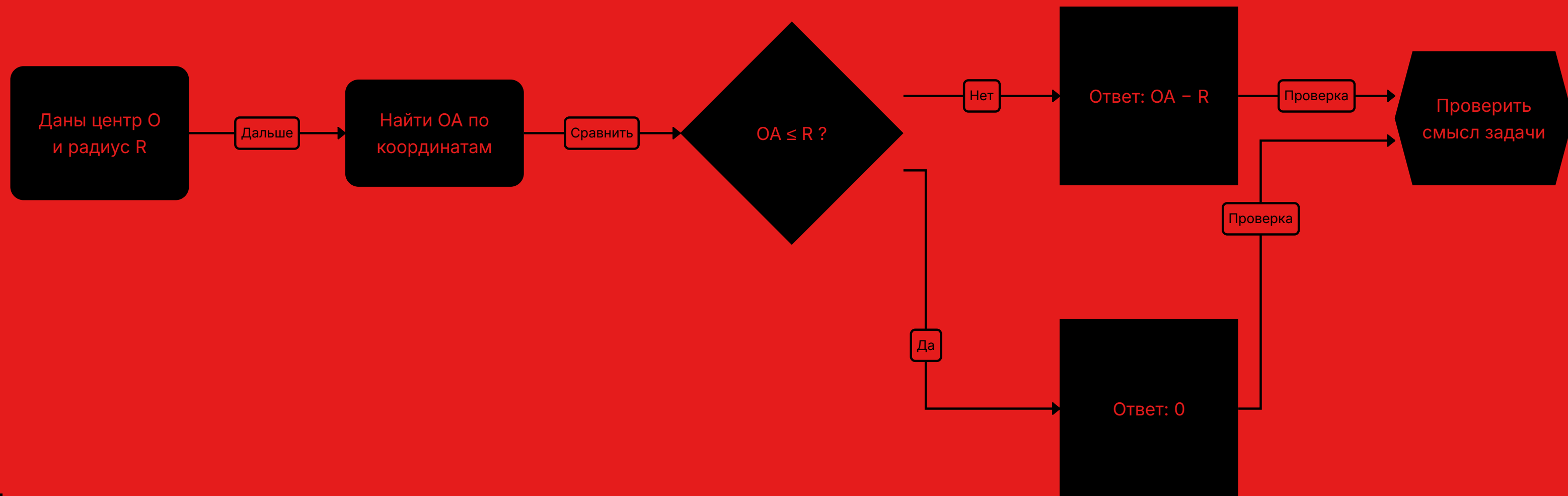
Для точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и центра $O(x_0, y_0, z_0)$ используют формулу расстояния в пространстве:
 $OA = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$.

Полученное значение сравнивают с радиусом R . Если $OA > R$, то расстояние до шара равно $OA - R$; если $OA \leq R$, ответ равен 0.

При вычислениях важно последовательно возводить разности в квадрат и аккуратно выполнять корень. Это снижает риск ошибок при переходе от координат к геометрическому смыслу.

Алгоритм решения задач на расстояние до шара

Краткий маршрут от данных задачи к численному ответу



Расстояние до сферы и до шара



Точка вне шара

Если точка A лежит вне шара, то ближайшая точка принадлежит сфере, а кратчайший отрезок равен $OA - R$. Поэтому расстояния до сферы и до шара совпадают.



Точка внутри шара

Если $OA < R$, точка находится внутри шара. Тогда расстояние до шара равно нулю, а до сферы появляется «запас» $R - OA$ — до ближайшей границы.



Пограничный случай

При $OA = R$ точка лежит на сфере. В этом случае расстояние до шара и до сферы одинаково нулевое: кратчайший путь заканчивается сразу в точке A .

Основные обозначения и формулы темы

Ключевые записи позволяют быстро отличать положения точки относительно шара и автоматически вычислять расстояние до шара и до сферы в координатных задачах.

Все решения сводятся к сравнению OA с R : при $OA \leq R$ расстояние до шара нулевое, а при $OA > R$ — равно $OA - R$; формулы для сферы получаются из той же идеи.

Обозначение	Условие	Точка	Расстояние
OA	$OA < R$	внутри	0
OA	$OA = R$	на сфере	0
OA	$OA > R$	вне шара	$OA - R$

Учебный материал по стереометрии (10 класс): шар, сфера, расстояние от точки до фигуры.

Типовые задачи школьного курса

Часто требуется установить взаимное положение точки относительно шара: проверить, лежит ли она внутри, на сфере или вне. На практике это делают сравнением расстояния от точки до центра OA с радиусом R .

В координатных задачах находят OA по формуле расстояния между точками в пространстве, затем применяют правило: если $OA > R$, то ответ равен $OA - R$, иначе — 0. Важно аккуратно работать с корнем.

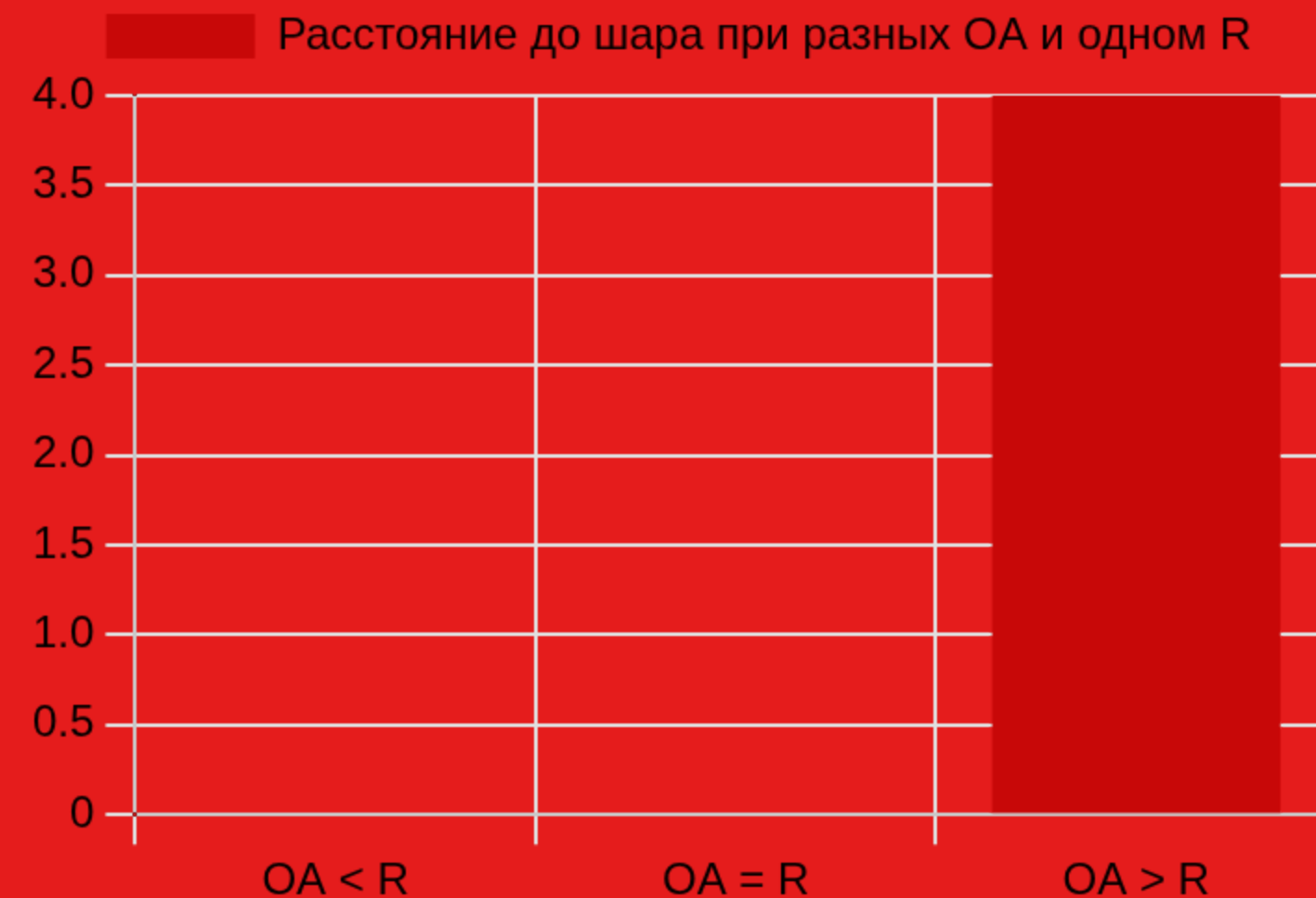
Отдельный блок — касание и пересечение. Касание сферы и точки даёт условие $OA = R$, а касание двух шаров — сравнение расстояния между центрами с суммой радиусов, либо с разностью радиусов.

Сравнение числовых значений в типовых ситуациях

При примере $OA=3$ и $R=5$ расстояние до шара равно 0; при $OA=5$ и $R=5$ тоже 0; при $OA=9$ и $R=5$ получается 4, то есть $OA-R$.

Положительное расстояние появляется только для внешней точки: как только OA становится больше радиуса, до ближайшей точки сферы остаётся величина $OA-R$.

Собранные примеры из правила сравнения OA и R ($R=5$): $OA=3, 5, 9$.



Геометрический смысл кратчайшего расстояния



Почему отрезок «до центра» задаёт минимум

Если точка A снаружи шара, кратчайший путь до него идёт по прямой, соединяющей A с центром O . Этот путь заканчивается в ближайшей точке сферы. Идея проста: именно радиус к точке касания задаёт направление минимальной длины.



Касательная плоскость и «перпендикуляр к касанию»

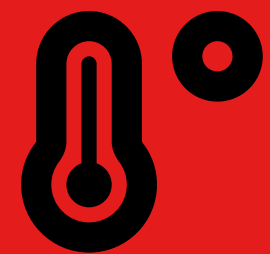
У точки касания касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведённому к этой точке. Поэтому любой другой путь до сферы оказывается длиннее, чем отрезок вдоль прямой AO . Здесь геометрия подтверждает формулу: минимальное расстояние — $OA - R$.

Практическое значение темы



Компьютерная графика

В 3D-моделировании шар используют как приближение объектов: определяют видимость, области пересечения и ближайшие контакты. Сравнение расстояния от объекта до центра с радиусом помогает понять, есть ли столкновение.



Физические сценарии

В задачах физики шаровая модель описывает зону действия силы или область возможных взаимодействий. Критерий «расстояние до поверхности» позволяет различать состояние контакта и отсутствие контакта без сложных построений.



Навигация и безопасность

Если шар задаёт зону безопасности, то ближайшая точка по маршруту определяется минимальным расстоянием до поверхности. Аналитическое вычисление по $OA - R$ удобно для проверки ограничений в динамических условиях.

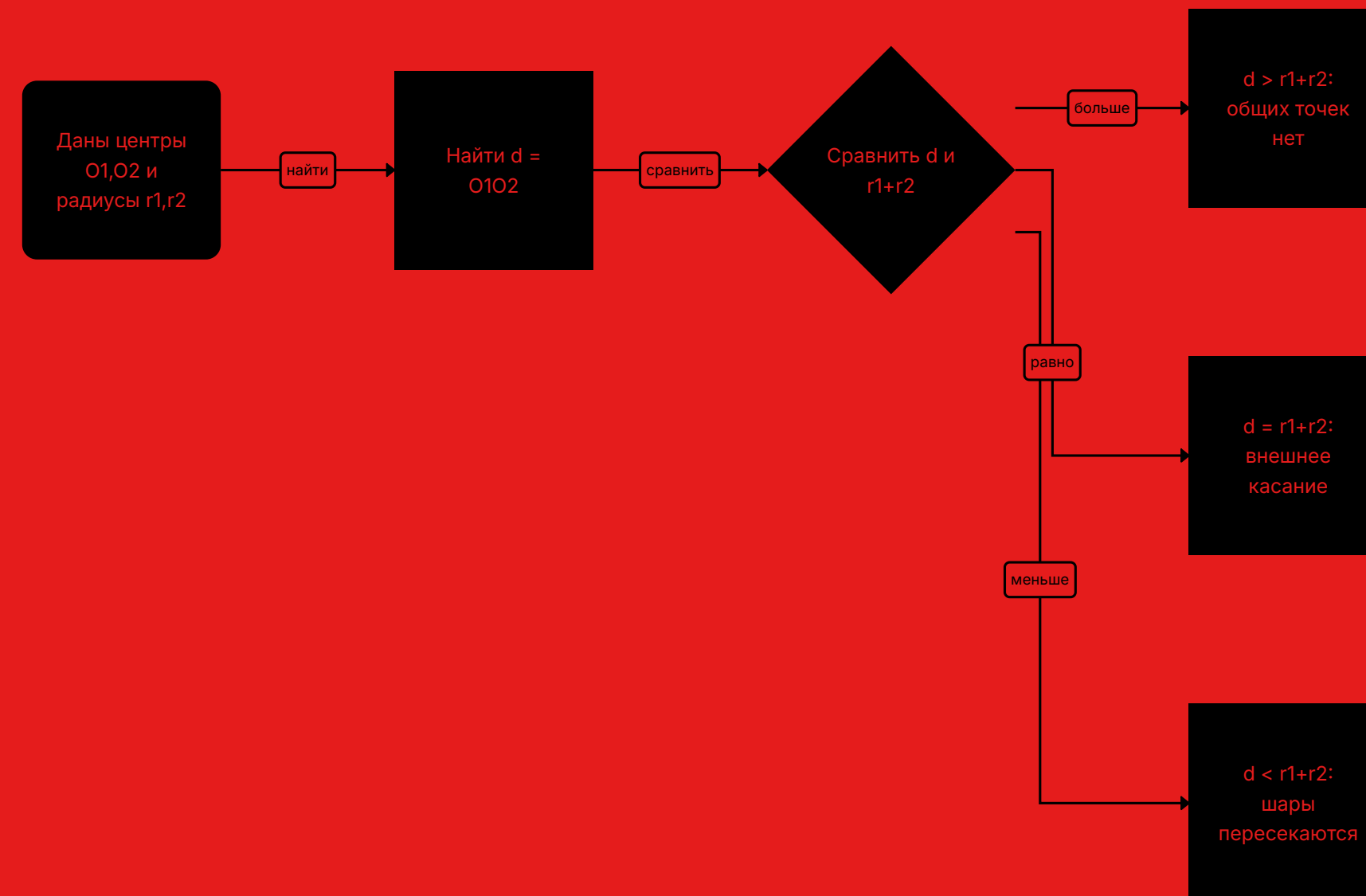


Моделирование столкновений

При расчёте столкновений двух тел, аппроксимированных шарами, сравнивают расстояние между центрами с суммой радиусов. Это превращает геометрическую проверку контакта в последовательность численных шагов.

Касание и пересечение в задачах о шарах

Сравнение расстояний между центрами шаров и радиусов сводит задачу к нескольким проверкам.



Типичные ошибки и способы проверки

Ошибки в задачах о шарах чаще всего связаны с неверным расстоянием, путаницей между шаром и сферой и пропуском граничного случая. Для каждой ситуации полезны быстрые проверки, согласующие числа с геометрией.

Если привести задачу к сравнению OA с R (или d с $r_1 \pm r_2$), большинство ошибок обнаруживается моментально: ответ должен соответствовать положению точки относительно границы.

Ошибка	Как проверить	Почему важно
Путаница шар/сфера	$OA \leq R$?	граница меняет знак ответа
Ошибки в координатах	Квадрат суммы?	проверьте формулу OA через $\sqrt{}$
Пропуск $OA \leq R$	Случай $OA=R$ учесть	иначе вместо 0 получаете $OA-R$
Неверный вывод о пересечении	d vs r_1+r_2	критерий касания/ пересечения численный

Обобщение типичных затруднений по стереометрии (10 класс) в задачах на шары и расстояния.

Связь темы с другими разделами математики

1

Тема соединяет геометрию и алгебру: шар в пространстве описывают неравенством, а сфера — равенством, где участвуют координаты центра. Это превращает чертёж в проверяемые условия.

2

Неравенства и модули напрямую появляются в расстояниях: расстояние до сферы связывают с $|OA - R|$. Таким образом, знакомые алгебраические инструменты становятся частью геометрического рассуждения.

3

При вычислении OA используется квадратный корень и формула расстояния между точками. Это тренирует аккуратность при работе с квадратами, порядком действий и проверкой знака после извлечения корня.

4

Наконец, через сравнение числовых величин развивается «координатный подход»: по строгому правилу определяют положение точки и строят вывод без угадывания по рисунку. Геометрия становится аналитической.

Одна проверка — и вся геометрия шара в руках

Шар задают центром и радиусом, а расстояние от точки до фигуры находят через сравнение OA с R . При $OA \leq R$ ответ для шара равен 0, при $OA > R$ — $OA - R$, что работает и в координатах.