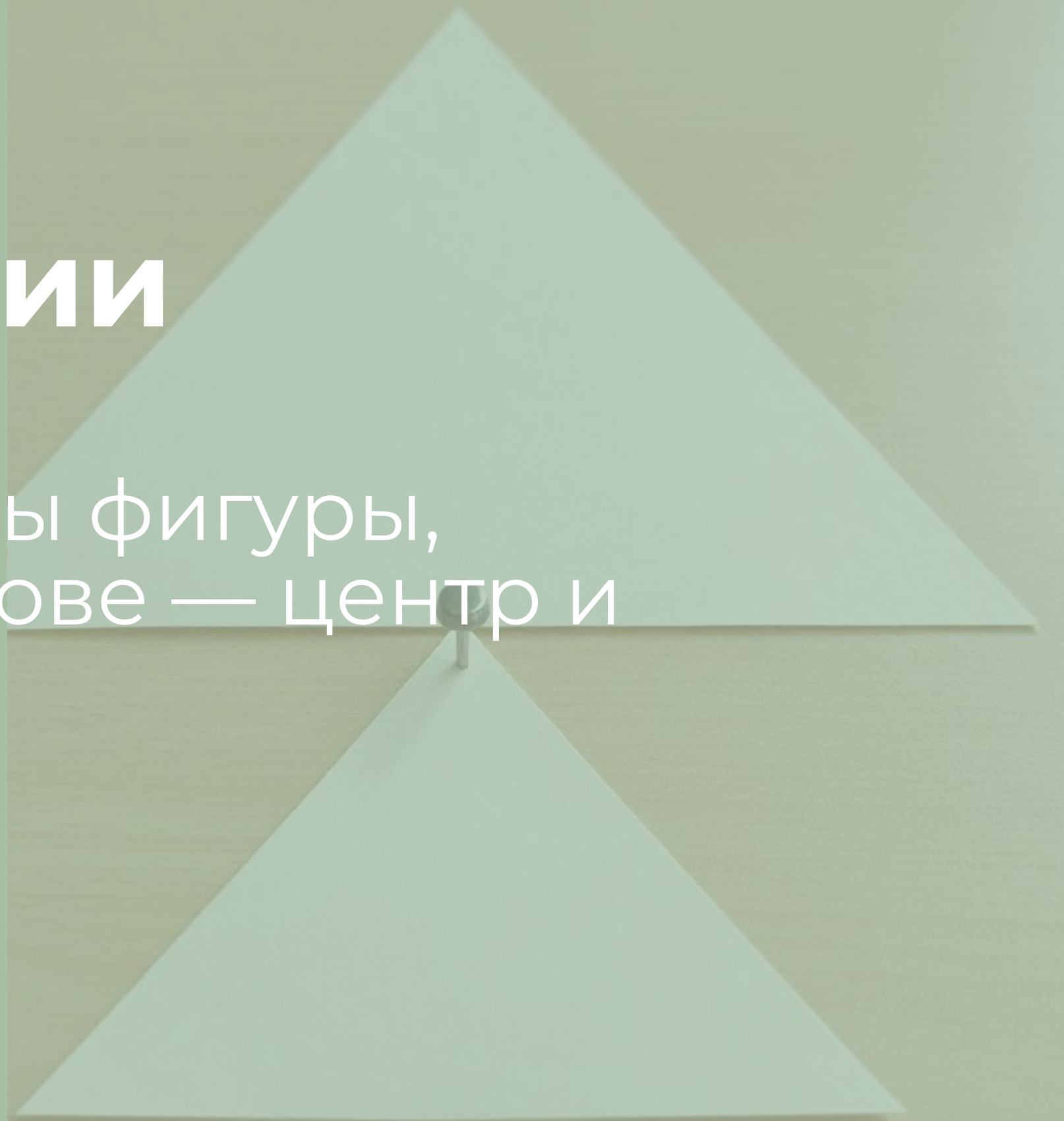
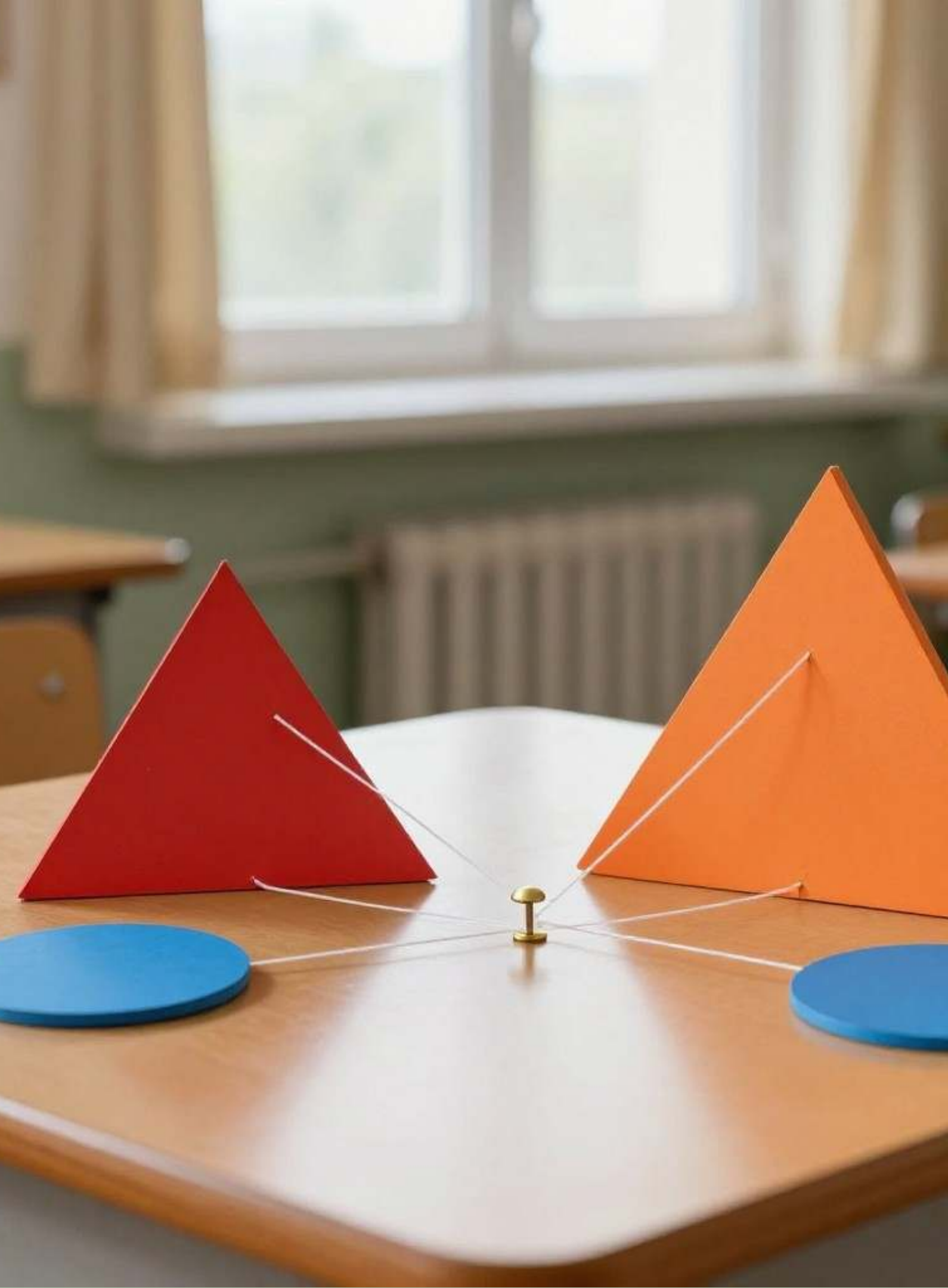


Понятие гомотетии

Гомотетия меняет размеры фигуры, сохраняя её форму. В основе — центр и коэффициент.





Гомотетия в геометрии 9 класса: масштаб и подобие

После подобия треугольников и пропорциональных отрезков гомотетия помогает связывать разные изображения на плоскости: чертежи, карты, уменьшенные и увеличенные рисунки. Ключевую роль играют луч, расстояние до центра, коэффициент и его знак.

Определение гомотетии

01

Гомотетия с центром O и коэффициентом k переводит точку A в точку A' . Образ A' всегда расположен на прямой OA , то есть луч из центра к точке определяет маршрут преобразования.

02

Если $k > 0$, точка A' лежит на том же луче, что и исходная A . Значит, направление от центра сохраняется, а меняется только масштаб расстояний.

03

При $k < 0$ точка A' оказывается на противоположном луче от центра. Величина OA' равна $|k| \cdot OA$: модуль коэффициента задаёт изменение длины, а знак — расположение по сторонам.

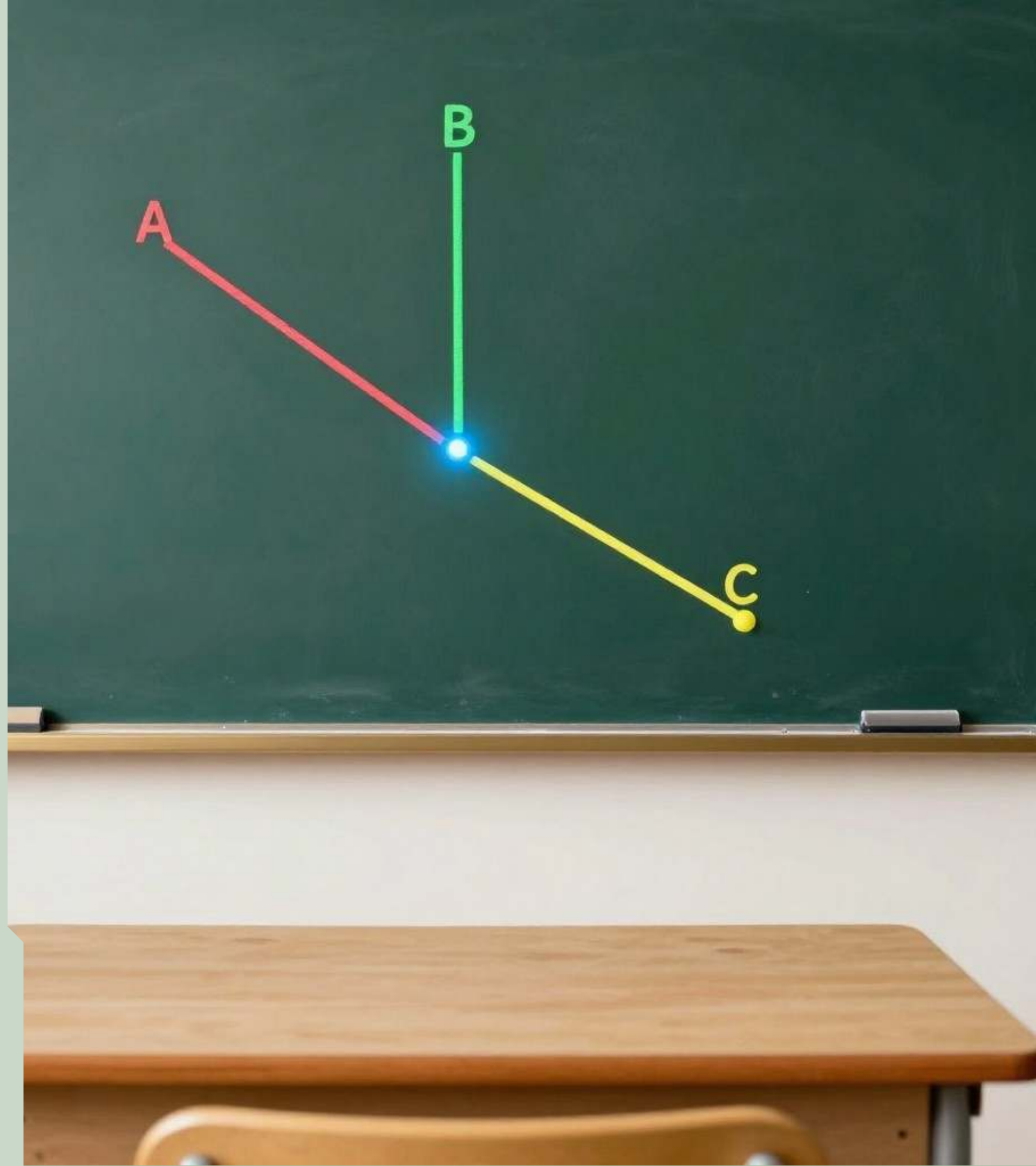
Центр гомотетии и расположение образа

Центр остаётся неподвижным

Центр гомотетии O — неподвижная точка: он не превращается в другую точку. Для любой точки исходной фигуры её образ и центр всегда задают одну прямую, что делает построения точными.

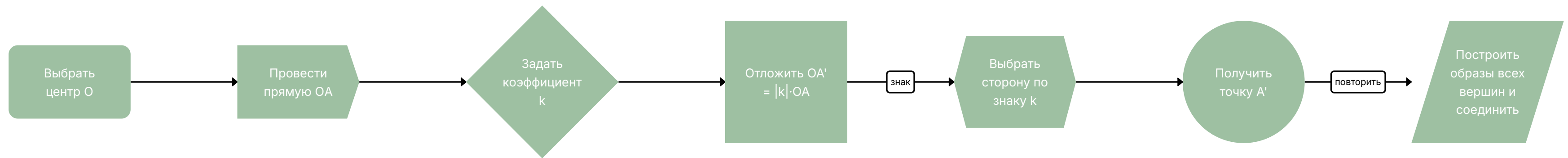
Точки и образ лежат на одной прямой

Если рассматривать, например, треугольник ABC и его образ $A'B'C'$, то лучи OA , OB и OC удобно показывают, куда «уезжает» каждая вершина. Так наглядно видно: расстояния меняются, но направление относительно центра сохраняется или меняется в зависимости от k .



Построение образа точки при гомотетии

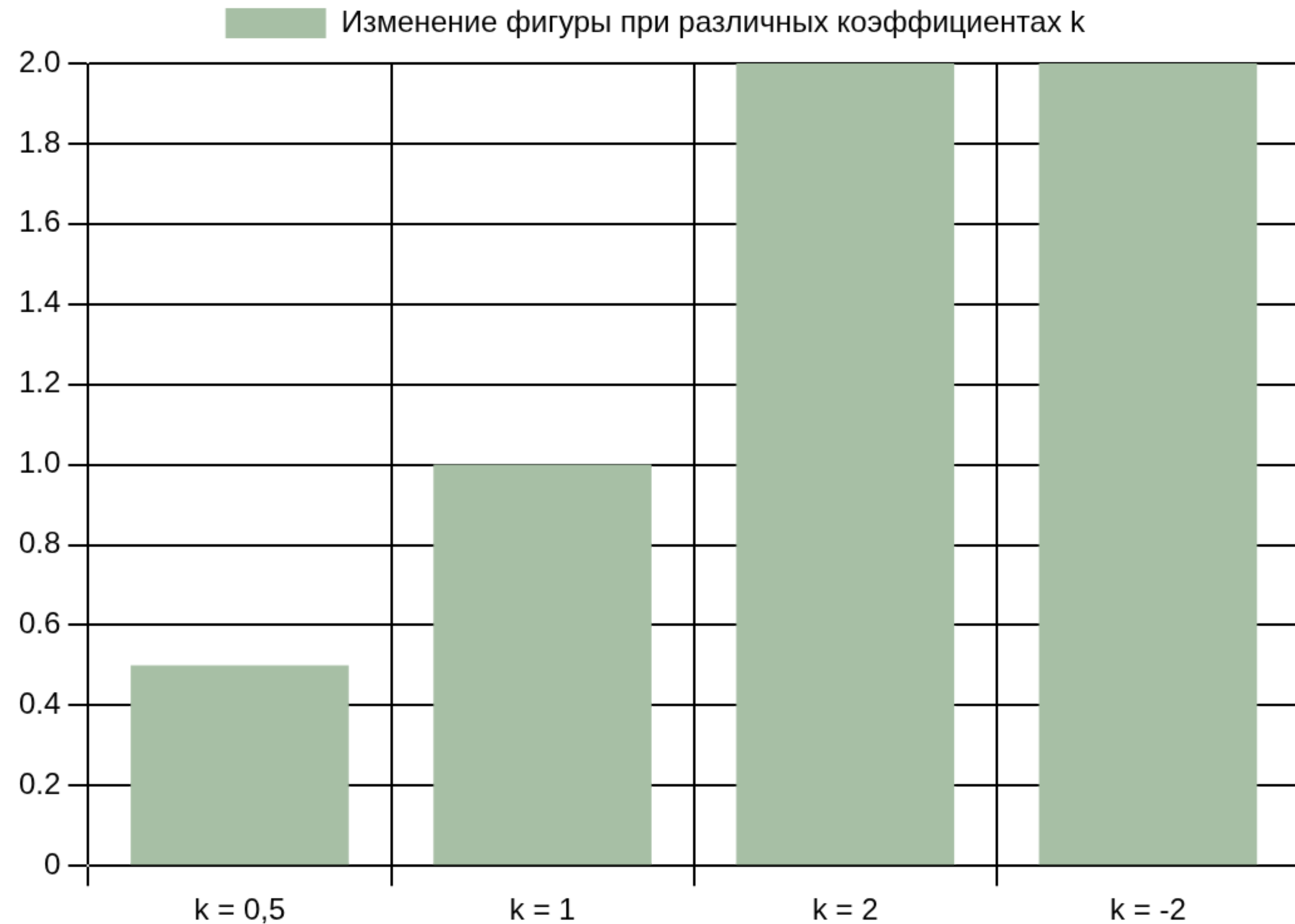
Дано: центр O , коэффициент k и точка A . Строим точку A' — образ в той же логике для всех вершин фигуры.



Как коэффициент гомотетии влияет на размер фигуры

Модуль $|k|$ задаёт, во сколько раз меняется длина: при $k=0,5$ — в 2 раза меньше, при $k=2$ — в 2 раза больше.

Знак коэффициента меняет сторону относительно центра, но величину масштаба определяет модуль: для $k=-2$ размеры растут в 2 раза.



Данные соответствуют примерам k : 0,5; 1; 2; -2.

Основные свойства гомотетии



Прямые переходят в прямые

Гомотетия не ломает геометрию: если взять прямую, её образ тоже будет прямой. Это помогает планировать построения и проверять правильность ответа.



Углы сохраняют величину

При гомотетии все углы равны соответствующим углам образа. Поэтому форма «на уровне углов» не меняется, меняется только масштаб размеров фигуры.



Непараллельные положения задаёт центр и k

Точки и образы всегда выстраиваются по прямым через центр O . Если коэффициент отрицательный, образ оказывается по другую сторону центра, что заметно в направлении лучей.



Периметр изменяется в $|k|$ раз

Если фигура увеличивается или уменьшается в $|k|$ раз, то её периметр меняется так же: $P' = |k| \cdot P$. Это пригодится для быстрых проверок в задачах.



Сравнение исходной фигуры и её образа

В таблице — какие характеристики сохраняются при гомотетии, а какие меняются. Ключевой вывод — зависимости для длин и площадей через коэффициент k .

Длины масштабируются по $|k|$, а площади — по k^2 . Форма сохраняется: углы остаются теми же, поэтому изображения выглядят подобными.

Параметр	Исходная фигура	Образ при гомотетии	
Углы	как в исходной	равны	
Стороны	масштаб $P \rightarrow S$	в $ k $ раз	
Периметр	P	в $ k $ раз	
Площадь	S	в k^2 раз	
Относительно центра	на своих лучах	на лучах через O	

Свойства гомотетии в школьной геометрии (9 класс).



Положительный и отрицательный коэффициент

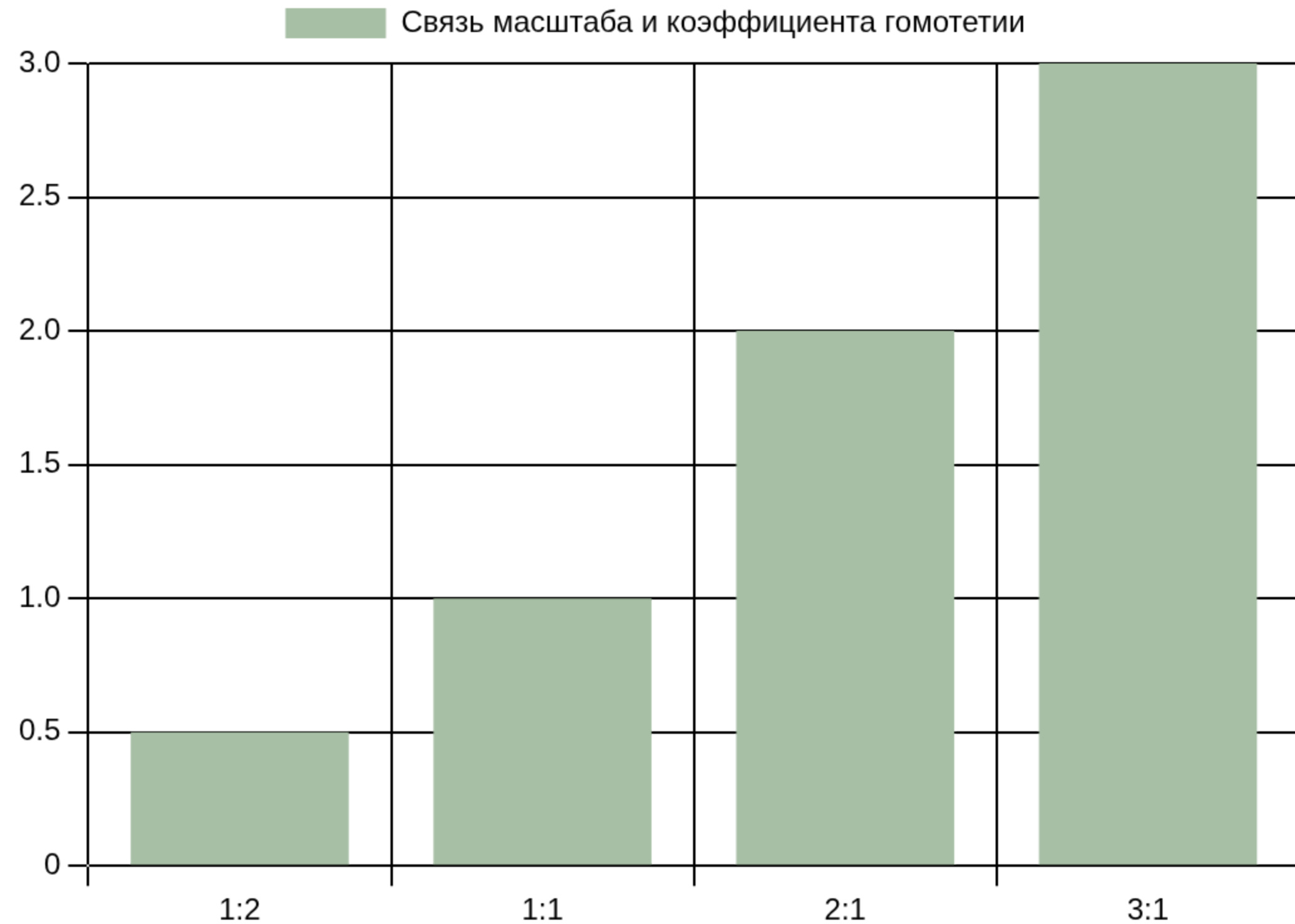
Если $k > 0$, образ точки A' расположен на том же луче от центра O , что и исходная точка A . Поэтому направление «от центра к фигуре» не меняется — лишь расстояние до центра.

При $k < 0$ точка A' оказывается по противоположной стороне центра: луч переворачивается. Тогда фигура как бы сменяет расположение относительно точки O , хотя модуль изменения длины остаётся тем же.

Связь масштаба и коэффициента гомотетии

Если задан масштаб чертежа, коэффициент гомотетии можно найти прямо по соотношению: он показывает, во сколько раз изменяются расстояния на плане.

Рост масштаба относительно «1 к ...» соответствует увеличению k . Такая связь делает масштабирование наглядным и помогает избегать ошибок.



Соответствие: 1:2 $\rightarrow k=0,5$; 1:1 $\rightarrow k=1$; 2:1 $\rightarrow k=2$; 3:1 $\rightarrow k=3$.

Гомотетия и подобные фигуры

1

Если две фигуры можно получить одну из другой одной гомотетией, то они подобны: форма сохраняется, а размеры меняются одинаково для всех соответствующих элементов.

2

При гомотетии равными остаются соответствующие углы, потому что лучи из центра задают направление сторон и отрезков. Это помогает уверенно переносить свойства с одной фигуры на другую.

3

Соответствующие стороны относятся как модуль коэффициента, поэтому задача сводится к пропорциям: неизвестные длины находятся через уже известные отрезки и коэффициент гомотетии.

4

В 9 классе это применяют при распознавании подобных треугольников, доказательствах через пропорциональные отрезки и при построениях, где нужно перейти от исходной фигуры к образу с одним центром.

Гомотетия среди преобразований плоскости

Отличаем преобразования по тому, что именно сохраняется: форма, размеры и ориентация.



Гомотетия в окружающем мире

Карта и план: всё по масштабу

На карте реальная местность изображается с меньшими расстояниями: дороги, границы и ориентиры сохраняют форму. Это работает благодаря одному коэффициенту, связывающему точки на местности и их изображение. Так пропорции остаются точными.



Экранные изображения и компьютерная графика

В приложениях для рисования можно увеличивать или уменьшать объект, не «ломая» его форму. При этом меняются размеры, а углы и направления сохраняются. По сути, подобные фигуры на экране возникают как образы, связанные гомотетией.

Уменьшенные модели зданий и макетов

Архитекторы создают макеты, где фасад и план повторяют реальные очертания, но в другом размере. Обычно точки модели получают из точек реального объекта с центром и коэффициентом. Поэтому детали выглядят узнаваемо, хотя длины другие.



Примеры вычислений при гомотетии

ОА	коэффициент k	ОА'	итог
3 см	2	6 см	точка на луче
8 см	0,5	4 см	образ ближе к О
5 см	-1,5	7,5 см	по другую сторону

В гомотетии для точки А: $OA' = |k| \cdot OA$, а знак k определяет, по какую сторону от центра лежит образ.

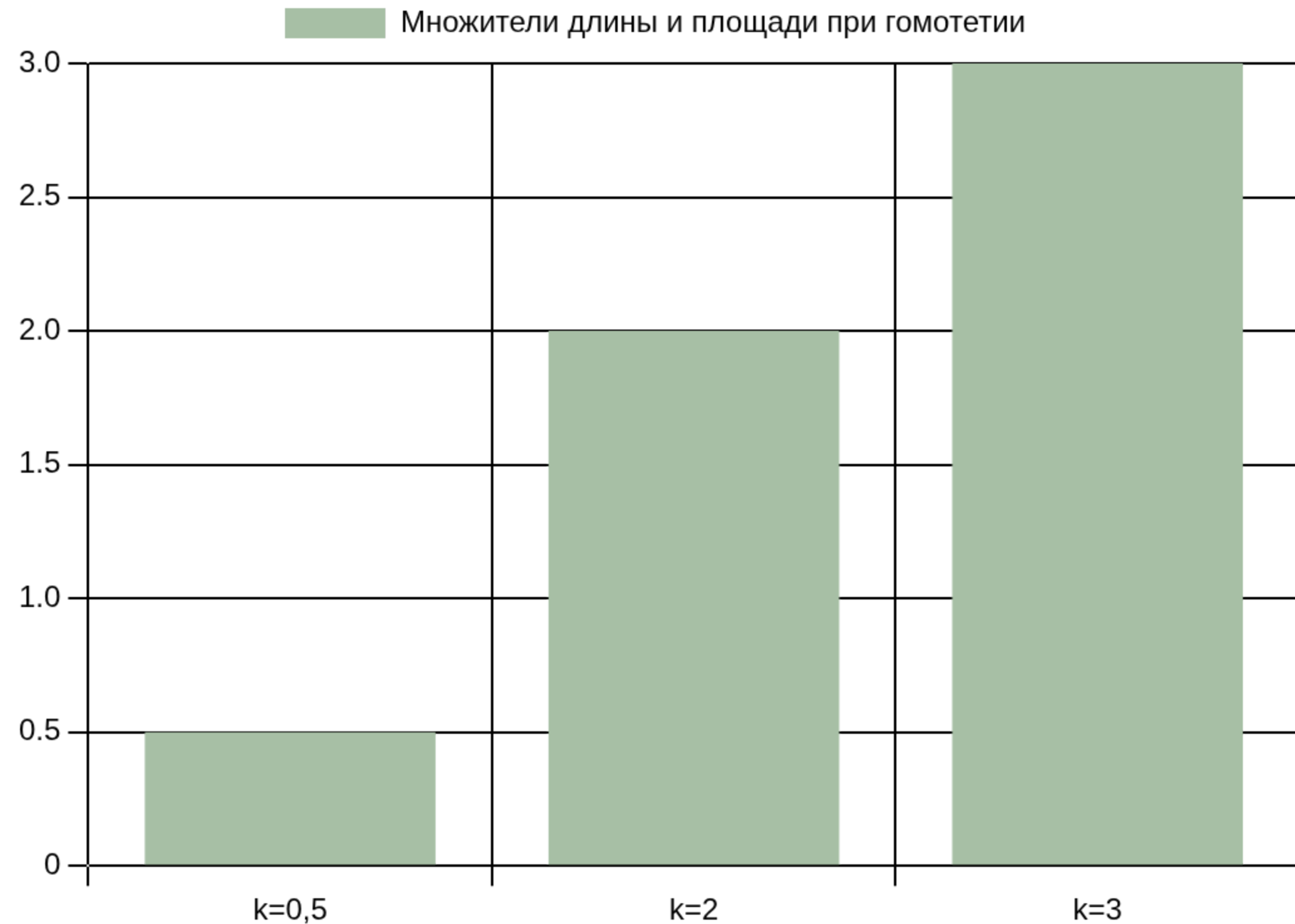
Модуль коэффициента задаёт изменение длины, а знак — расположение образа относительно центра: при $k < 0$ он оказывается на противоположном луче.

Примеры для школьных задач (формула $OA' = |k| \cdot OA$).

Как меняются длины и площади фигур

Длины умножаются на $|k|$, а площади — на k^2 . Поэтому при одном и том же коэффициенте площадь меняется сильнее, чем линейные размеры.

Сравнение значений показывает: при увеличении в несколько раз площадь растёт как квадрат этого множителя, что особенно заметно для больших фигур.



Правило из школьной геометрии: площади в гомотетии меняются пропорционально квадрату коэффициента.

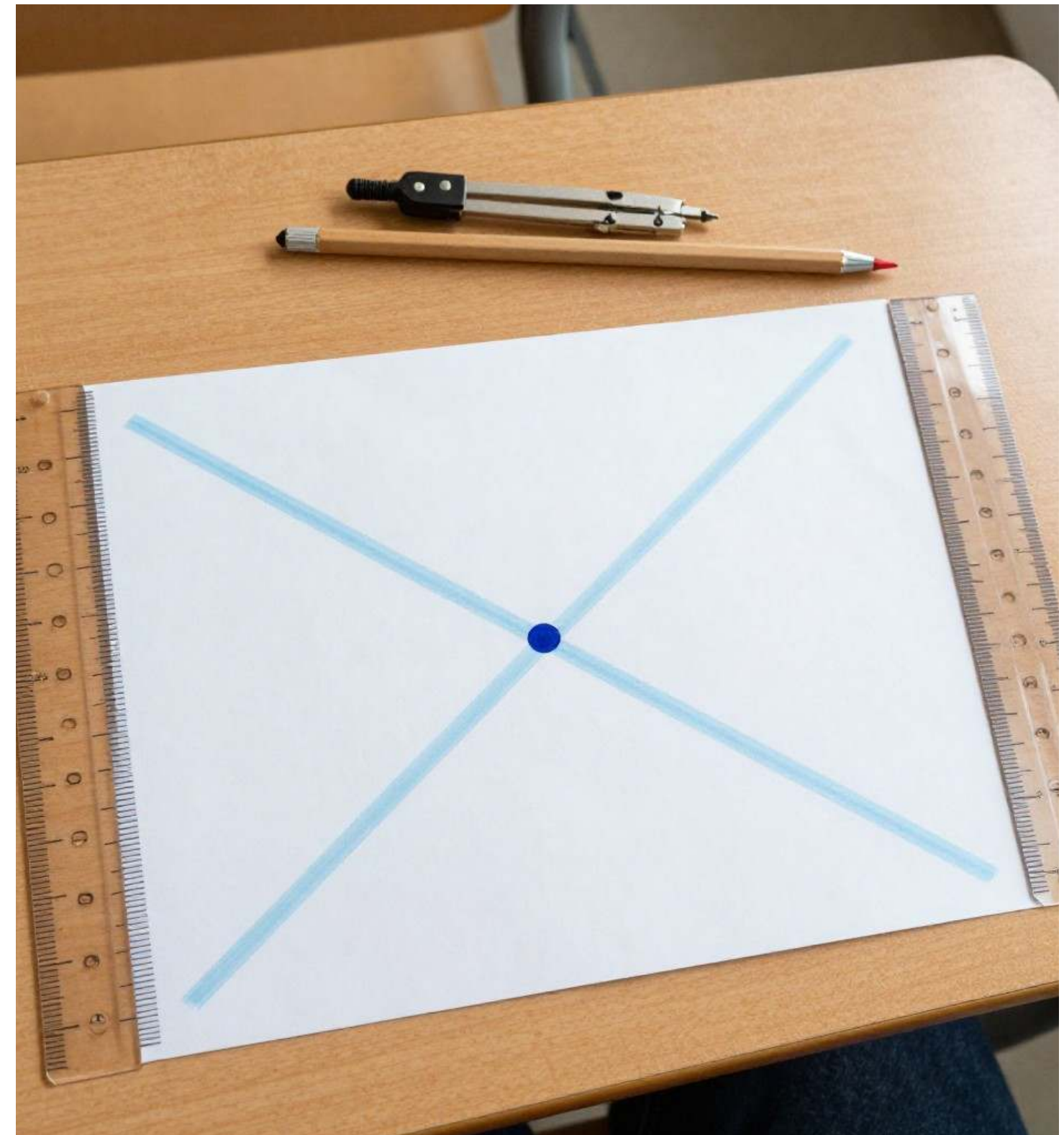
4

Если коэффициент равен 2, то площадь образа увеличивается в четыре раза относительно площади исходной фигуры.

В задачах на масштаб и подобие гомотетия позволяет быстро связать длины и площади. Зная k , можно проверить вычисления и не перепутать, как меняются линейные размеры и площади.

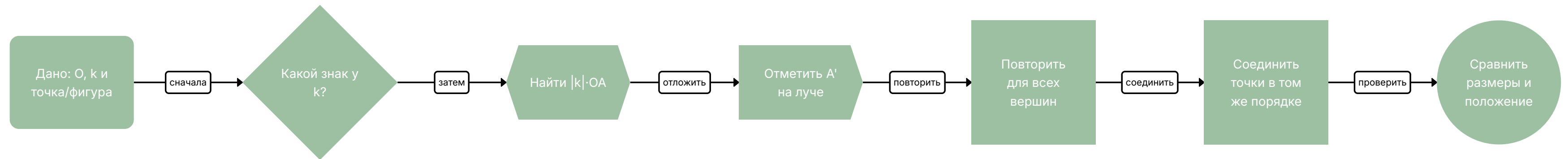
Типичные ошибки при изучении гомотетии

- 01** Частая ошибка — путать коэффициент гомотетии k с масштабом чертежа: по разным записям легко потерять соответствие между увеличением и множителем. Ещё одна проблема — забыть, что при $k < 0$ образ лежит на противоположном луче.
- 02** Иногда ученики выбирают сторону от центра «как при увеличении», хотя знак меняет расположение. Полезно мысленно сверять схему: верное построение даёт тот же модуль расстояний, но различает сторону относительно центра.



Алгоритм решения задач на ГОМОТЕТИЮ

Центр O и коэффициент k задают, как нужно построить образ точки или фигуры.



Главные выводы о гомотетии

01

Гомотетия сохраняет форму: соответствующие углы остаются равными, а параллельность соответствующих прямых не нарушается. Поэтому образы выглядят «точно так же», только с другими размерами.

Коэффициент гомотетии отвечает за изменение размеров: модуль k показывает, во сколько раз меняются расстояния от центра. Знак k определяет, на какой стороне от центра окажется образ.

02

03

Связь гомотетии с подобием делает её важным инструментом школьной геометрии. Она помогает работать с масштабом, вычислять неизвестные длины и выполнять построения через пропорции.

Итоги темы «Понятие гомотетии»

Гомотетия связывает фигуры разного размера, сохраняя их форму. Через центр преобразования и коэффициент можно точно описывать, как меняются положения точек, а также длины и площади при увеличении или уменьшении.