

Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

Четыре отношения сторон помогают измерять
и сравнивать в геометрии.



Прямоугольный треугольник и его роль

Прямоугольный треугольник встречается в задачах постоянно: в нём удобно описывать углы, стороны и их отношения. Именно на этой фигуре строятся основные тригонометрические формулы, полезные для измерений и построений.



Элементы прямоугольного треугольника

Прямой угол

Один угол прямоугольного треугольника равен 90° , а два остальных — острые. Именно с ними связывают тригонометрические функции, когда рассматривают отношение сторон.

Гипотенуза

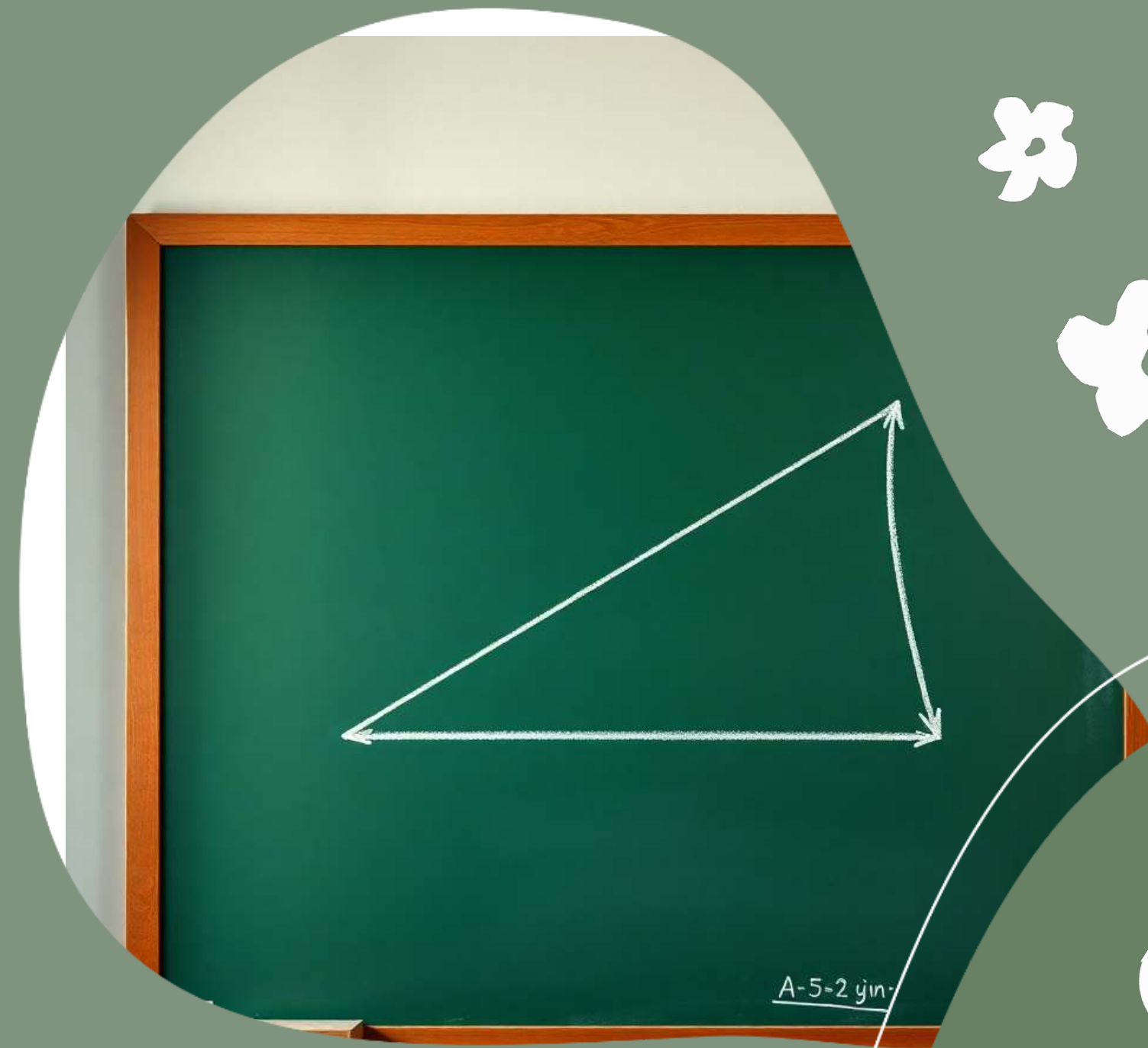
Сторона напротив прямого угла называется гипотенузой. Она всегда самая длинная в прямоугольном треугольнике и служит общей опорой для синуса и косинуса.

Катеты

Две стороны, образующие прямой угол, называются катетами. Для выбранного острого угла один катет будет прилежащим, а другой — противолежащим.

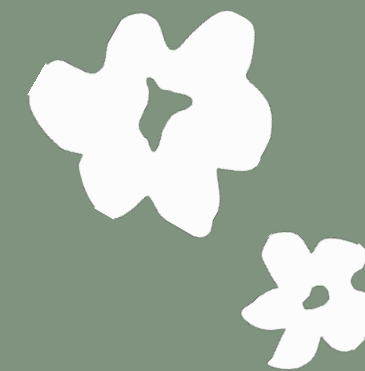
Выбор угла

Если выбрать другой острый угол, названия катетов меняются местами. Поэтому перед вычислением всегда важно сначала определить, относительно какого угла рассматривается треугольник.





Как обозначают стороны относительно угла



Противолежащий катет

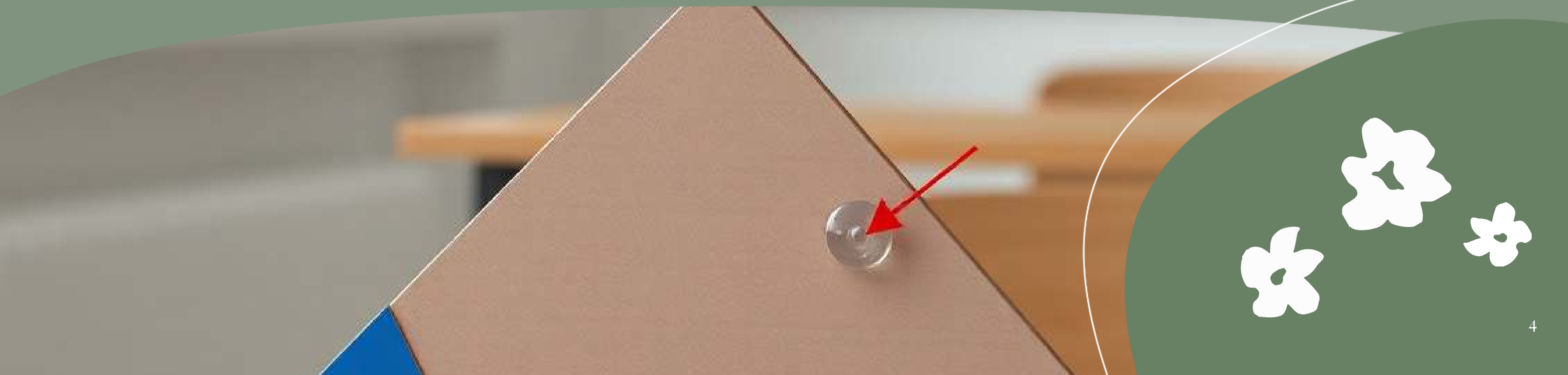
Для угла α противолежащим называют катет, который лежит напротив этого угла. Именно его длина входит в числитель в формулах синуса и тангенса.

Прилежащий катет

Прилежащий катет образует угол α вместе с гипотенузой. Он располагается рядом с выбранным углом и используется в формулах косинуса и котангенса.

Удобная запись

На чертеже стороны обычно обозначают буквами a , b и c , а угол — символом α . Такая подпись помогает быстро увидеть, какие длины нужно подставить в формулы.



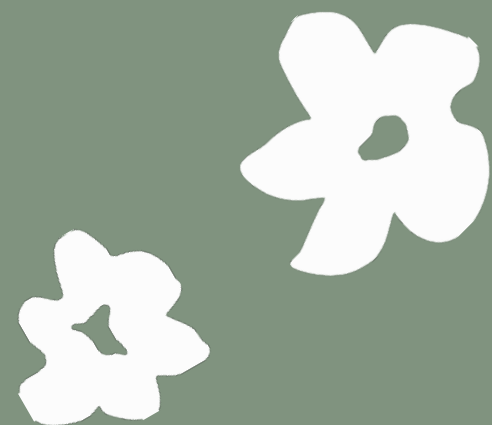
Четыре основные тригонометрические функции

Все функции выражаются через отношения сторон прямоугольного треугольника.

Синус и косинус всегда используют гипотенузу, а тангенс и котангенс сравнивают только катеты.

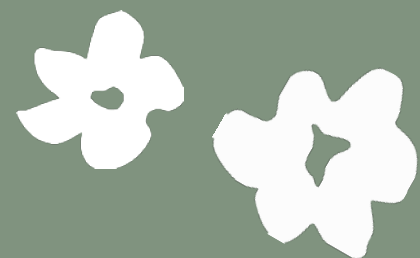
Функция	Формула	Что сравнивает
$\sin \alpha$	a / c	катет и гипотенузу
$\cos \alpha$	b / c	катет и гипотенузу
$\operatorname{tg} \alpha$	a / b	два катета
$\operatorname{ctg} \alpha$	b / a	два катета

Определения тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике



Один и тот же треугольник даёт разные значения функций, если выбрать другой острый угол: меняются прилежащий и противолежащий катеты.

Свойства прямоугольного треугольника и определения тригонометрических функций



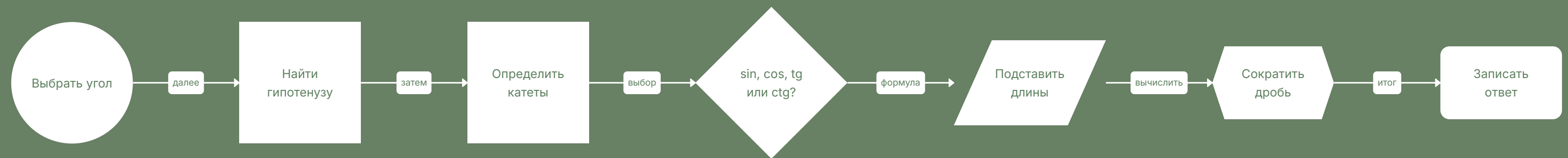
2

**острых угла есть в каждом
прямоугольном
треугольнике,
и для каждого из них
получаются свои
отношения сторон.**

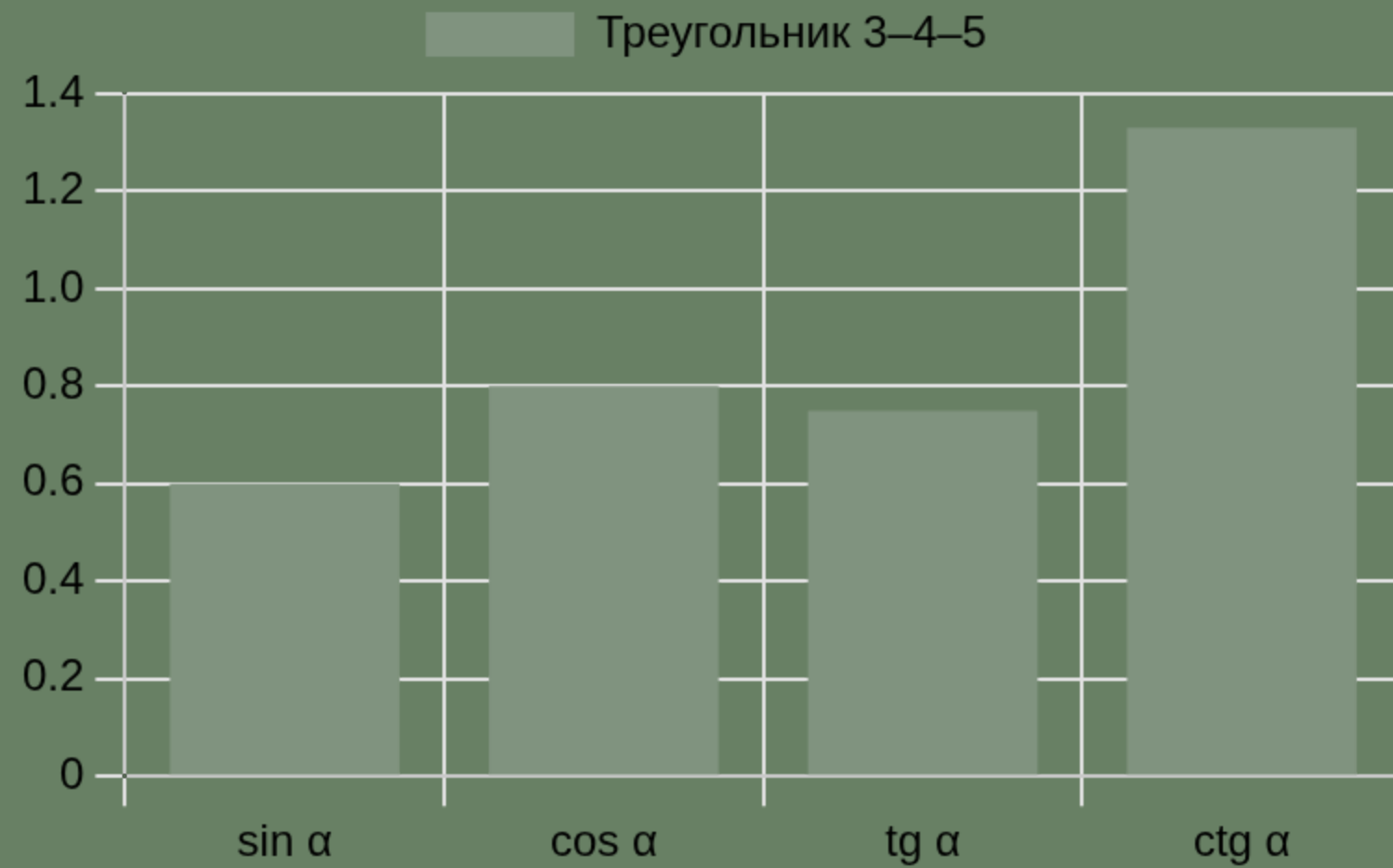


Как находят значение тригонометрической функции

Последовательность действий при вычислении по сторонам прямоугольного треугольника.



Пример для треугольника со сторонами 3, 4 и 5



Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5

Здесь удобно видеть, как одни и те же стороны дают разные отношения для одного угла.

Значения легко проверяются по формулам и после сокращения становятся простыми дробями.

Почему значения не меняются при увеличении треугольника

1. Равные углы

Если два прямоугольных треугольника имеют одинаковые углы, они подобны. Это значит, что соответствующие стороны увеличиваются или уменьшаются одинаково, а их отношения остаются прежними.

2. Одинаковые дроби

При умножении всех сторон на одно и то же число числитель и знаменатель меняются одинаково. Поэтому $\sin$, $\cos$, tg и ctg для данного угла не изменяются.

3. Размер не важен

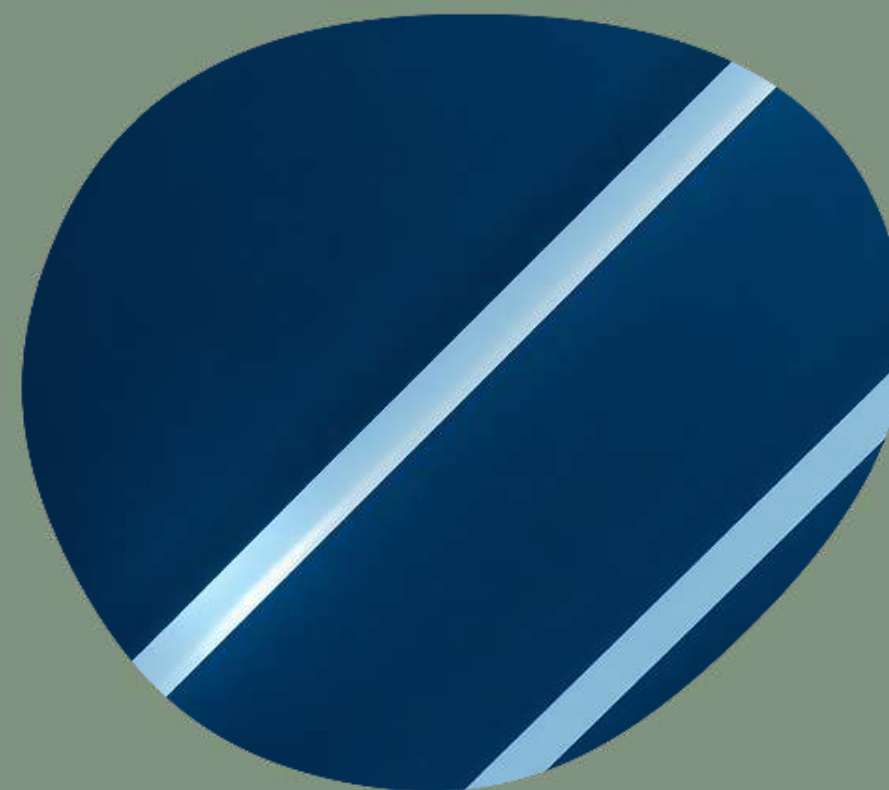
Меняется только длина сторон, но не форма треугольника. Именно поэтому тригонометрические функции помогают сравнивать фигуры разных размеров и получать одинаковый результат для одного угла.

Как синус и косинус связаны между собой



Один угол — две разные стороны

Синус и косинус смотрят на один и тот же острый угол, но берут разные катеты. Если выбранный катет длиннее, его отношение к гипотенузе тоже больше. Поэтому на одном чертеже $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ обычно получаются разными, хотя угол один и тот же.



Почему оба значения меньше 1

Гипотенуза всегда длиннее любого катета, поэтому каждый из этих отношений меньше единицы. Это удобно проверять на рисунке: катет сравнивают с самой длинной стороной треугольника, а значит, дробь не может быть больше 1.

Тангенс и котангенс

Сравнение катетов

Тангенс острого угла показывает отношение противолежащего катета к прилежащему. Он отвечает на вопрос, насколько одна сторона длиннее другой, если гипотенуза в формуле уже не нужна.

Обратное отношение

Котангенс устроен наоборот: в числителе стоит прилежащий катет, а в знаменателе — противолежащий. Поэтому для одного и того же угла $\cot \alpha$ и $\tan \alpha$ связаны как взаимно обратные числа.

Связь между ними

Если умножить $\tan \alpha$ на $\cot \alpha$, получится 1. Это удобно запоминать: обе функции описывают один и тот же угол, но с разных сторон и только через катеты.

Пример вычисления на треугольнике 6, 8, 10

В прямоугольном треугольнике со сторонами 6, 8 и 10 удобно сразу сократить дроби и увидеть простые значения функций.

Сокращение дробей делает ответ короче и нагляднее, а все значения выражаются через те же отношения сторон, независимо от их исходного масштаба.

Функция	Вычисление	Результат
$\sin \alpha$	$6/10$	$3/5$
$\cos \alpha$	$8/10$	$4/5$
$\operatorname{tg} \alpha$	$6/8$	$3/4$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$8/6$	$4/3$

Частный случай прямоугольного треугольника со сторонами 6, 8 и 10.

Роль теоремы Пифагора



Находим гипотенузу

Если известны два катета, сначала применяют теорему Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$. Это позволяет получить длину гипотенузы и перейти к вычислению тригонометрических функций.



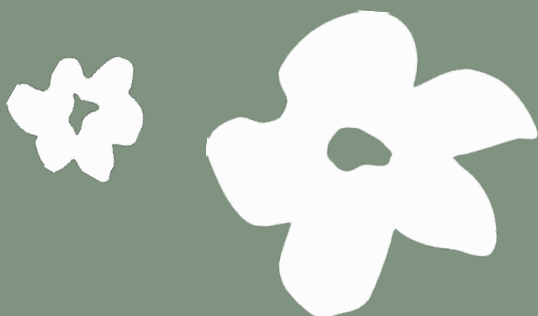
Считаем функции

После нахождения всех сторон можно подставить их в формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Важно выбирать стороны относительно нужного острого угла, а не по привычке.



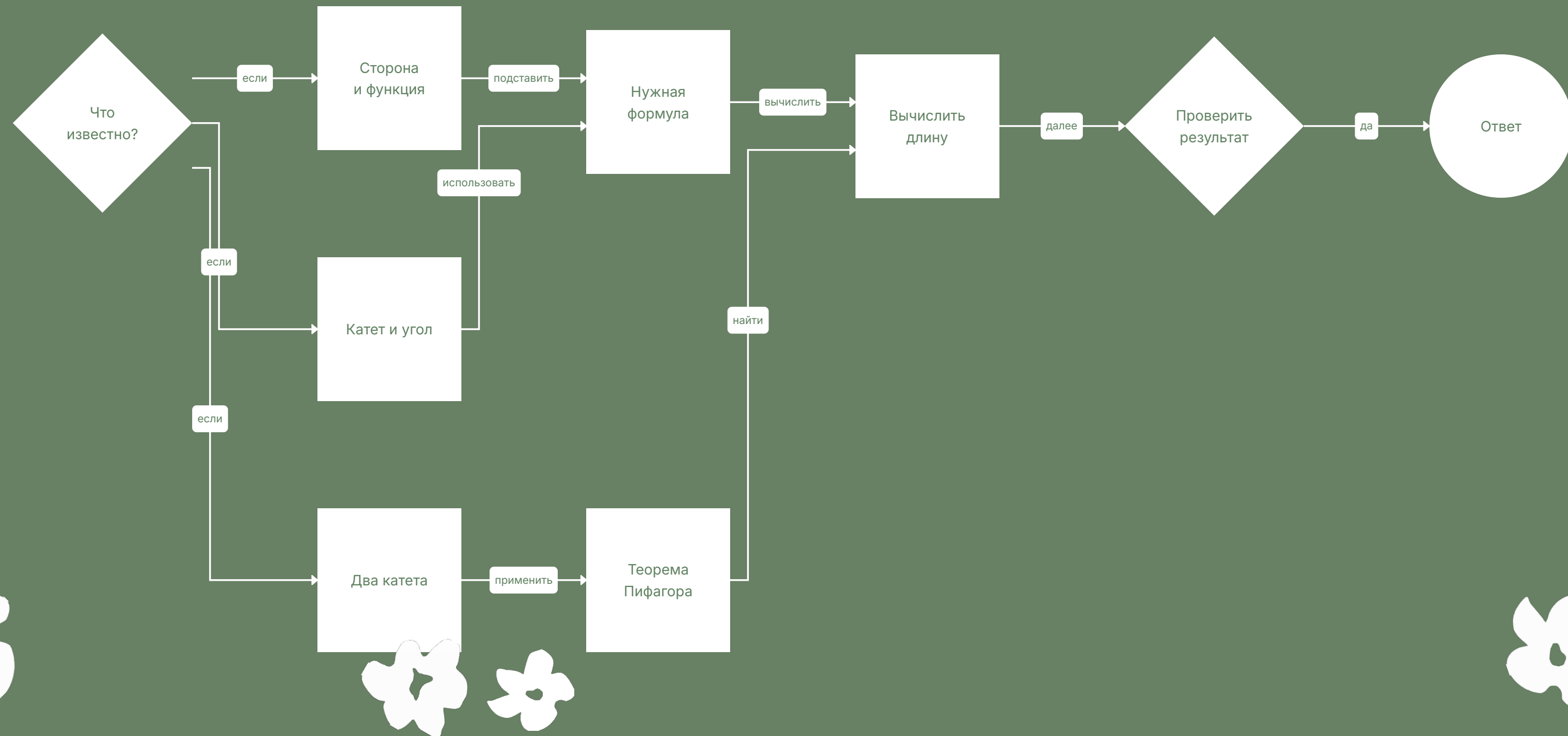
Решаем задачи вместе

В заданиях 7 класса Пифагора и тригонометрические отношения часто используются вместе. Сначала находят неизвестную сторону, а затем проверяют ответ через нужную функцию или по смыслу задачи.



Как найти неизвестную сторону

Схема показывает, какой способ выбрать в зависимости от известных данных.



Стандартные прямоугольные треугольники



Стандартные значения для треугольников $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ и $30^\circ-60^\circ-90^\circ$.

Для особых углов значения можно запомнить заранее и быстро использовать в задачах.

Угол 45° даёт равные значения синуса и косинуса, а угол 30° показывает удобные дроби, связанные с отношениями сторон.

Типичные ошибки при вычислениях

Путают катеты

Часто ошибаются, когда принимают прилежащий катет за противолежащий или наоборот. Чтобы не запутаться, сначала нужно отметить выбранный угол и только потом подписывать стороны.

Подставляют градусы

Синус, косинус, тангенс и котангенс в прямоугольном треугольнике считают по длинам сторон. Градусы угла в дробь не подставляют, потому что они не являются длинами.

Берут не тот угол

Если в треугольнике два острых угла, формулы для них будут разными. Один и тот же катет может стать прилежащим для одного угла и противолежащим для другого.

Не сокращают дроби

Иногда ответ получается верным, но слишком громоздким. После подстановки чисел дробь лучше сократить, чтобы увидеть простое отношение и быстрее проверить вычисление.

Практическое применение в жизни

Высота по тени

С помощью тригонометрических отношений можно определить высоту дерева, столба или здания, если известна длина тени и угол падения солнечных лучей.

Лестница у стены

При расчёте длины лестницы, приставленной к стене, удобно рассматривать прямоугольный треугольник. Тогда известная высота и угол помогают найти нужную длину.

Уклон дороги

Тангенс часто используют для описания уклона дороги, крыши или пандуса. Он показывает, насколько сильно линия поднимается по сравнению с горизонталью.

Измерения на местности

В геометрических задачах такие отношения помогают находить расстояния там, где измерить их прямо сложно. Поэтому прямоугольный треугольник часто заменяет реальную ситуацию на чертеже.



Сравнение четырёх функций

Все четыре функции описывают один и тот же острый угол, но через разные пары сторон прямоугольного треугольника.

Синус и косинус сравнивают катет с гипотенузой, а тангенс и котангенс — только катеты между собой; поэтому формулы легко различать по знаменателю.

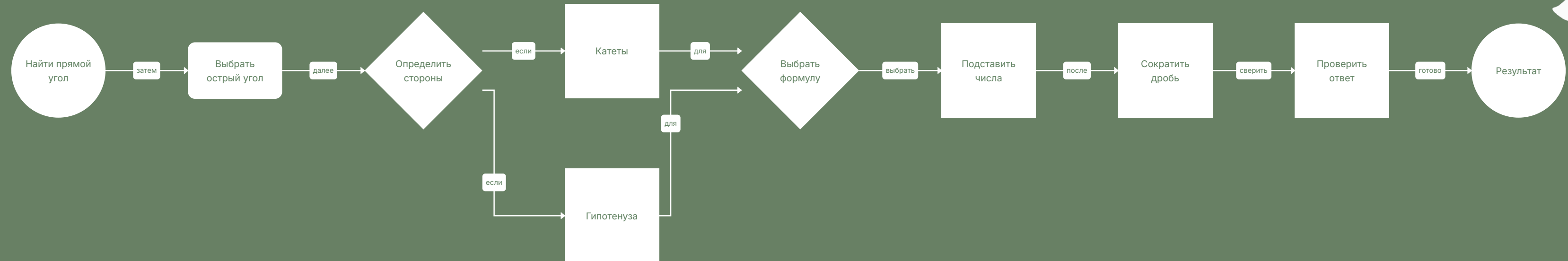
Функция	Числитель	Знаменатель
sin	противолежащий катет	гипотенуза
cos	прилежащий катет	гипотенуза
tg	противолежащий катет	прилежащий катет
ctg	прилежащий катет	противолежащий катет

Определения тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике.



Пошаговое решение задачи по треугольнику

Последовательность помогает не перепутать стороны и выбрать верную формулу для вычисления.



Формулы, которые помогают видеть треугольник

Синус, косинус, тангенс и котангенс связывают угол с отношениями сторон прямоугольного треугольника. Эти формулы удобны в школьных задачах и помогают измерять реальные объекты без прямого доступа к ним.