

Сумма, произведение и разность алгебраических выражений

Учимся преобразовывать выражения быстро
и без ошибок.



Зачем нужны преобразования выражений

Сумма, произведение и разность помогают упростить записи, раскрывать скобки и решать уравнения. Эти операции делают вычисления короче, а формулы — понятнее, особенно в задачах с несколькими переменными и степенями.

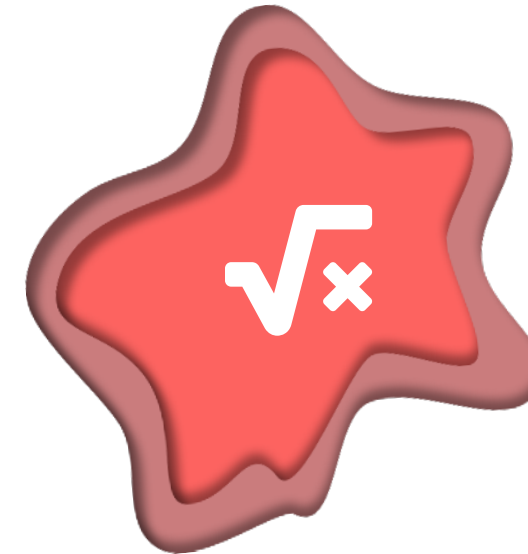


Что такое алгебраическое выражение



Числа и буквы

Алгебраическое выражение состоит из чисел, переменных и знаков действий. Оно показывает, как связаны величины, и позволяет записывать правило в краткой и удобной форме.



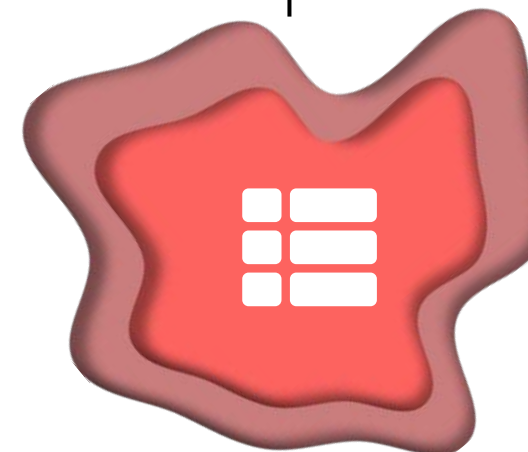
Значение выражения

Если подставить вместо переменной число, выражение получает конкретное значение. Поэтому одно и то же выражение может давать разные результаты при разных значениях переменной.



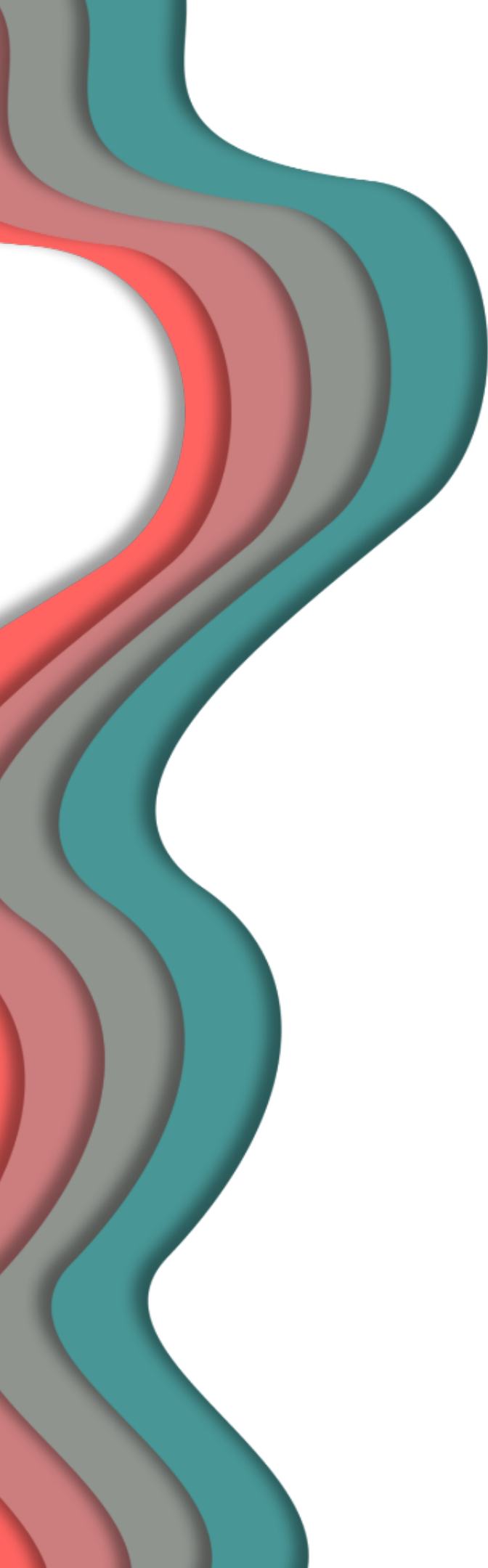
Одночлен

Одночлен — это произведение числа и буквенной части. Например, $7x$ или $3a^2$. В нём нет знака сложения или вычитания между частями, только умножение.



Многочлен

Многочлен — это сумма или разность нескольких одночленов. Примеры: $3x + 5$, $x^2 - 4x + 1$. Именно с многочленами чаще всего работают при преобразованиях.



Сумма алгебраических выражений

01

Объединение выражений

Сумма возникает, когда два или больше выражений соединяют знаком плюс. Чтобы не запутаться, сначала записывают каждую часть отдельно, а затем переходят к упрощению.

03

Поиск подобных слагаемых

Подобными называют слагаемые с одинаковой буквенной частью и одинаковыми степенями. Именно такие слагаемые можно складывать или вычитать, не меняя переменную.

02

Раскрытие скобок

Если в сумме есть скобки, их можно раскрыть без изменения знаков внутри. После этого выражение становится более удобным для дальнейших преобразований.

04

Упрощение результата

После приведения подобных слагаемых получается более короткая запись. Например, $(2x + 3) + (x - 5) = 3x - 2$, и выражение становится легче вычислять.

Геометрический смысл суммы площадей

Два прямоугольника

Если прямоугольники имеют одинаковую высоту x , а основания 3 и 2, то их площади выражаются как $3x$ и $2x$. Вместе они образуют одну общую площадь.

Сложение площадей

Сумма площадей показывает, как отдельные части складываются в целое. В записи это выглядит как $3x + 2x = 5x$, то есть объединяются одинаковые части.

Наглядная модель

Рисунок с соседними прямоугольниками помогает увидеть, что алгебраическая сумма — это не только запись, но и способ описать объединение частей фигуры.

Связь с вычислениями

Такой подход полезен в задачах, где нужно находить площадь, периметр или выразить размер через переменную. Геометрия делает правило сложения особенно понятным.

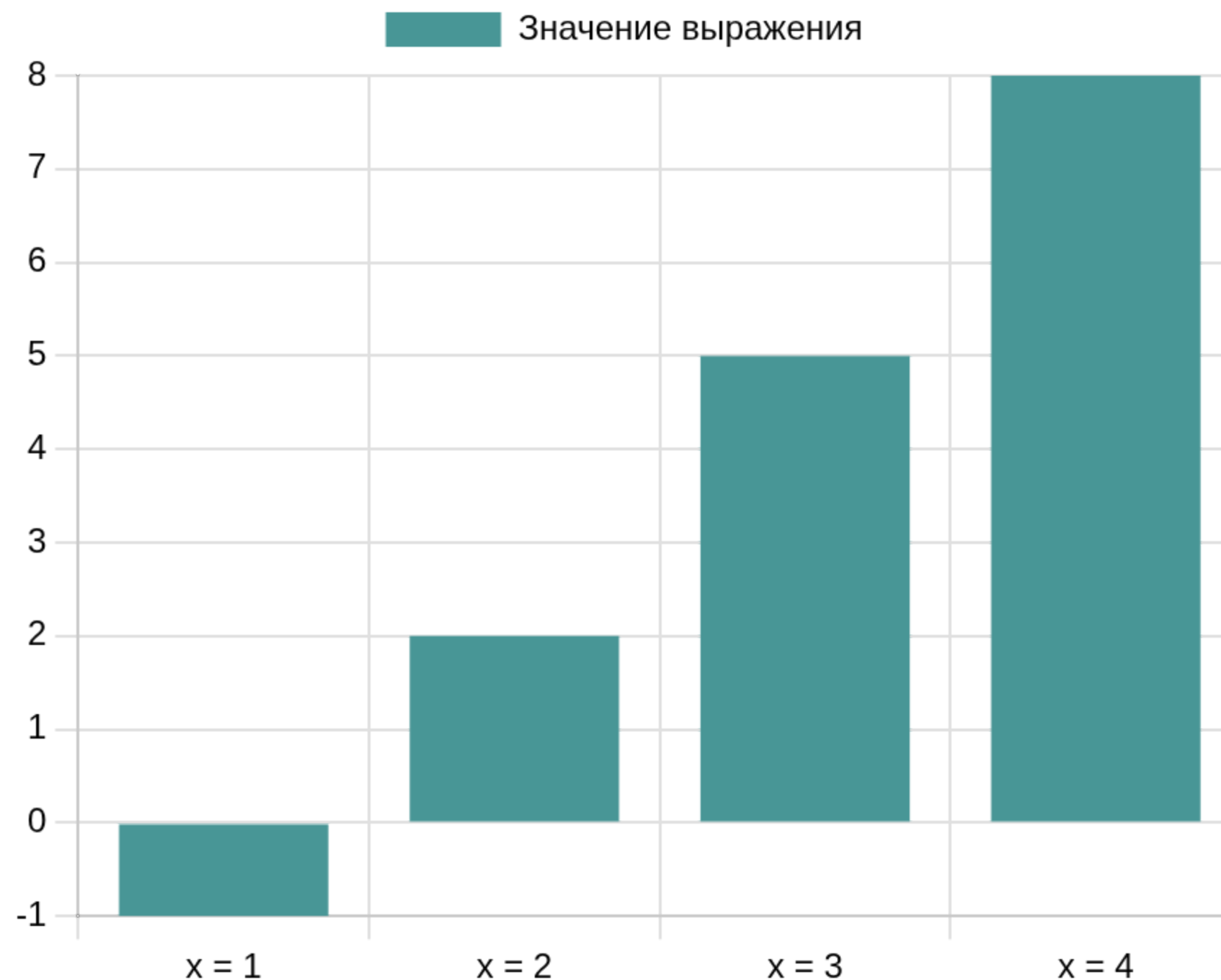


Сравнение значений выражений после сложения

Все значения получены подстановкой числа x в исходное выражение. Это показывает, что преобразование не меняет смысл записи.

После упрощения выражение становится $3x - 2$, поэтому при каждом увеличении x на 1 результат растёт на 3.

Вычисления по выражению $(2x + 3) + (x - 5)$; дата не требуется.



Произведение выражений и одночленов

01 Что означает умножение

Произведение выражений получают, когда одно выражение умножают на другое. В ответе важно учитывать и числовые коэффициенты, и буквенную часть.

02 Одночлен на одночлен

При умножении одночленов сначала перемножают числа, а затем одинаковые буквы записывают с показателями степеней. Например, $3a \cdot 2b = 6ab$.

03 Одночлен на многочлен

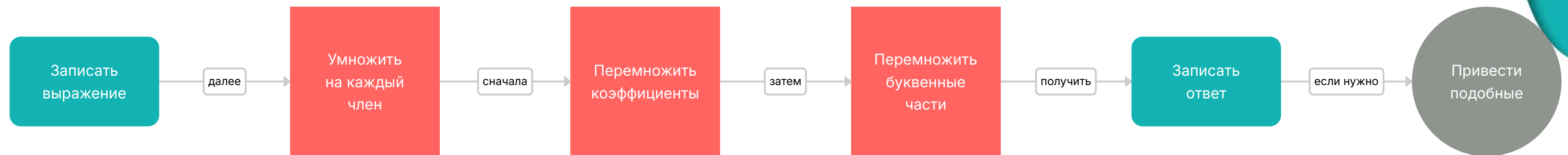
Если одночлен умножают на многочлен, он должен быть умножен на каждый член в скобках. Так получают $4x(x - 3) = 4x^2 - 12x$.

04 Основа раскрытия скобок

Это правило помогает раскрывать скобки и получать выражение без лишней записи. Оно часто используется перед приведением подобных слагаемых.

Алгоритм умножения многочлена на одночлен

Последовательность действий при преобразовании выражения



Распределительное свойство умножения

- **Основная формула**

Распределительное свойство записывают так: $a(b + c) = ab + ac$. Оно показывает, что множитель должен быть умножен на каждый член скобок отдельно.

- **Для разности тоже работает**

Если в скобках стоит разность, правило не меняется: $a(b - c) = ab - ac$. Меняется только знак второго слагаемого после раскрытия скобок.

- **Простой пример**

Выражение $5(x + 2)$ превращается в $5x + 10$. Это удобно, потому что позволяет убрать скобки и сразу увидеть более простую запись.

- **Зачем это нужно**

Это свойство используют при упрощении выражений, доказательстве равенств и решении уравнений. Оно помогает перейти от короткой записи к удобной для вычислений.

Сравнение трёх операций над выражениями

Три основные операции по-разному преобразуют выражения, но каждая следует своему правилу.

У каждой операции своё правило: сложение объединяет, умножение распределяет, вычитание меняет знаки во второй скобке.

Примеры преобразований алгебраических выражений

Операция	Смысл	Правило	Пример
Сумма	Объединение выражений	Раскрыть скобки и сложить	$(2x + 3) + (x - 5) = 3x - 2$
Произведение	Умножение выражений	Умножить каждый член	$4x(x - 3) = 4x^2 - 12x$
Разность	Вычитание выражений	Изменить знаки второй скобки	$(2x + 3) - (x - 5) = x + 8$

Разность алгебраических выражений

01

Что означает разность

Разность возникает, когда одно выражение вычитают из другого. Сначала записывают исходные скобки, а затем выполняют преобразование так, чтобы сохранить порядок действий и не потерять ни один член.

03

Пример упрощения

После раскрытия скобок остаётся привести подобные слагаемые. В примере $7a - 4 - 2a - 1 = 5a - 5$, и выражение становится короче, но его значение не меняется.

02

Как работать со скобками

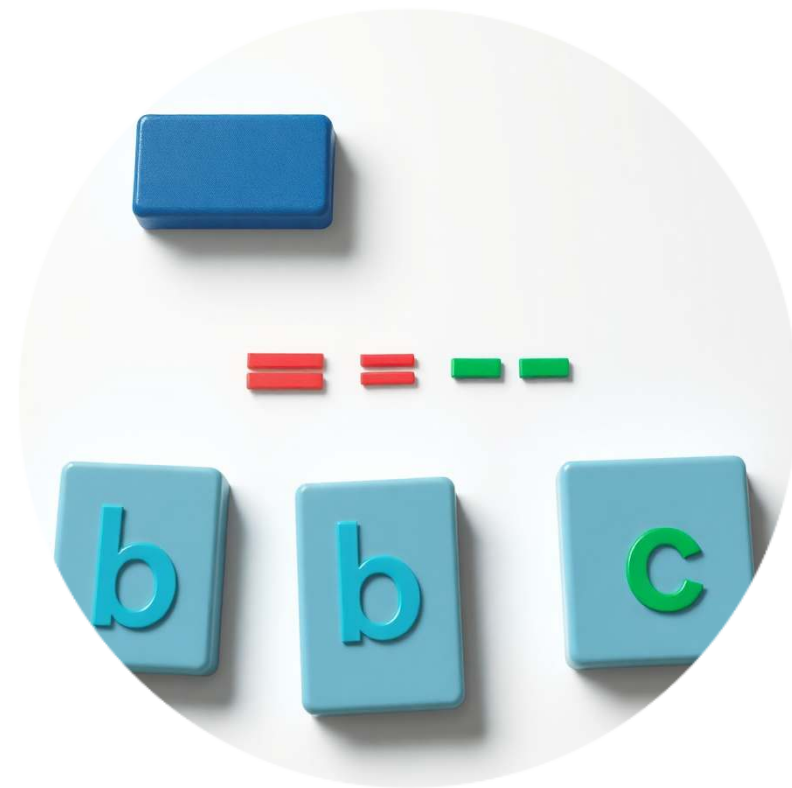
Если перед второй скобкой стоит минус, знак у каждого её слагаемого меняется на противоположный. Поэтому из записи $(7a - 4) - (2a + 1)$ получается $7a - 4 - 2a - 1$.

04

Где это пригодится

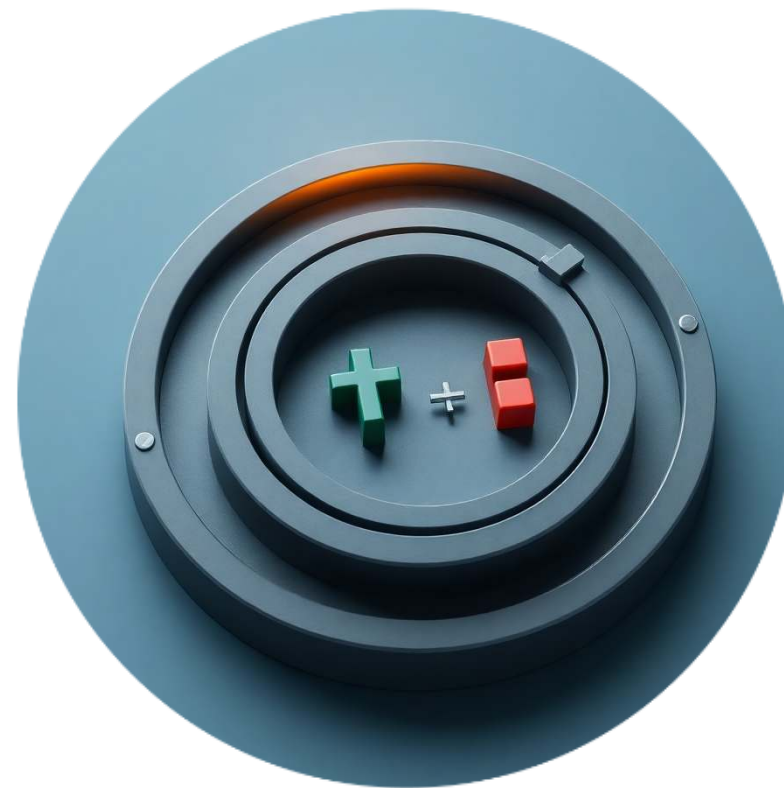
Такие преобразования часто нужны при решении уравнений и проверке ответов. Они помогают быстро убрать лишние скобки, сделать запись понятнее и подготовить выражение к дальнейшим действиям.

Как меняются знаки при вычитании скобок



Минус перед скобками

Когда перед скобками стоит знак минус, он как будто «раздаёт» противоположные знаки всем членам внутри. Запись $a - (b - c)$ превращается в $a - b + c$. На схеме это удобно показать стрелками от каждого члена к новому знаку.



Почему нельзя торопиться

Если просто убрать скобки, не меняя знаки, получится ошибка в вычислениях. Именно поэтому каждый член второй скобки нужно проверить отдельно: плюс становится минусом, а минус — плюсом. Такая аккуратность особенно важна в длинных выражениях.



Проверка на примере

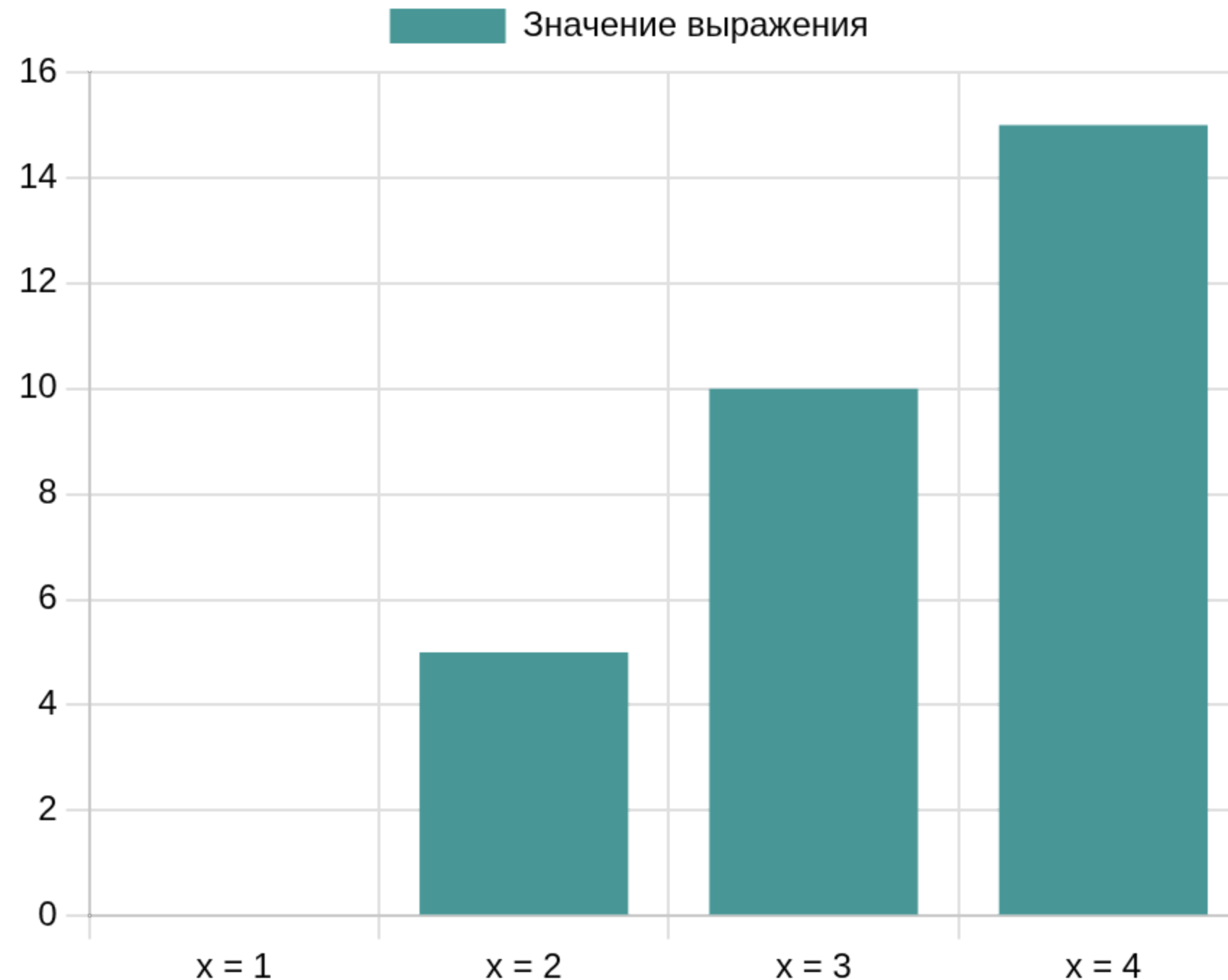
В выражении $5 - (2 - 3)$ сначала меняем знаки внутри скобок: $5 - 2 + 3$. Затем считаем по порядку и получаем 6. Этот приём помогает не запутаться и быстро сверить ответ.

Изменение значения разности при разных x

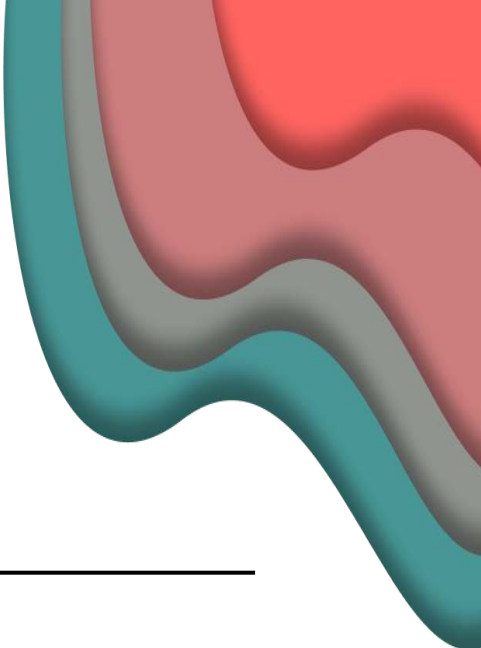
После раскрытия скобок выражение можно записать короче: $5x - 5$. Это позволяет сразу увидеть общий ход изменения значений.

При увеличении x на 1 результат возрастает на 5. Такая закономерность подтверждает правильность упрощения.

Расчёт по выражению $(7x - 4) - (2x + 1)$, значения для $x = 1, 2, 3, 4$.



Приведение подобных слагаемых после преобразований



Только одинаковые части

Подобными считаются слагаемые с одной и той же буквенной частью. Их можно складывать или вычитать только по коэффициентам, не меняя сами буквы и их степени.

Вычитание тоже работает

При вычитании подобных слагаемых поступают так же, но со знаком минус. В записи $9a - 2a$ получается $7a$, потому что из девяти частей убирают две такие же части.

Сложение коэффициентов

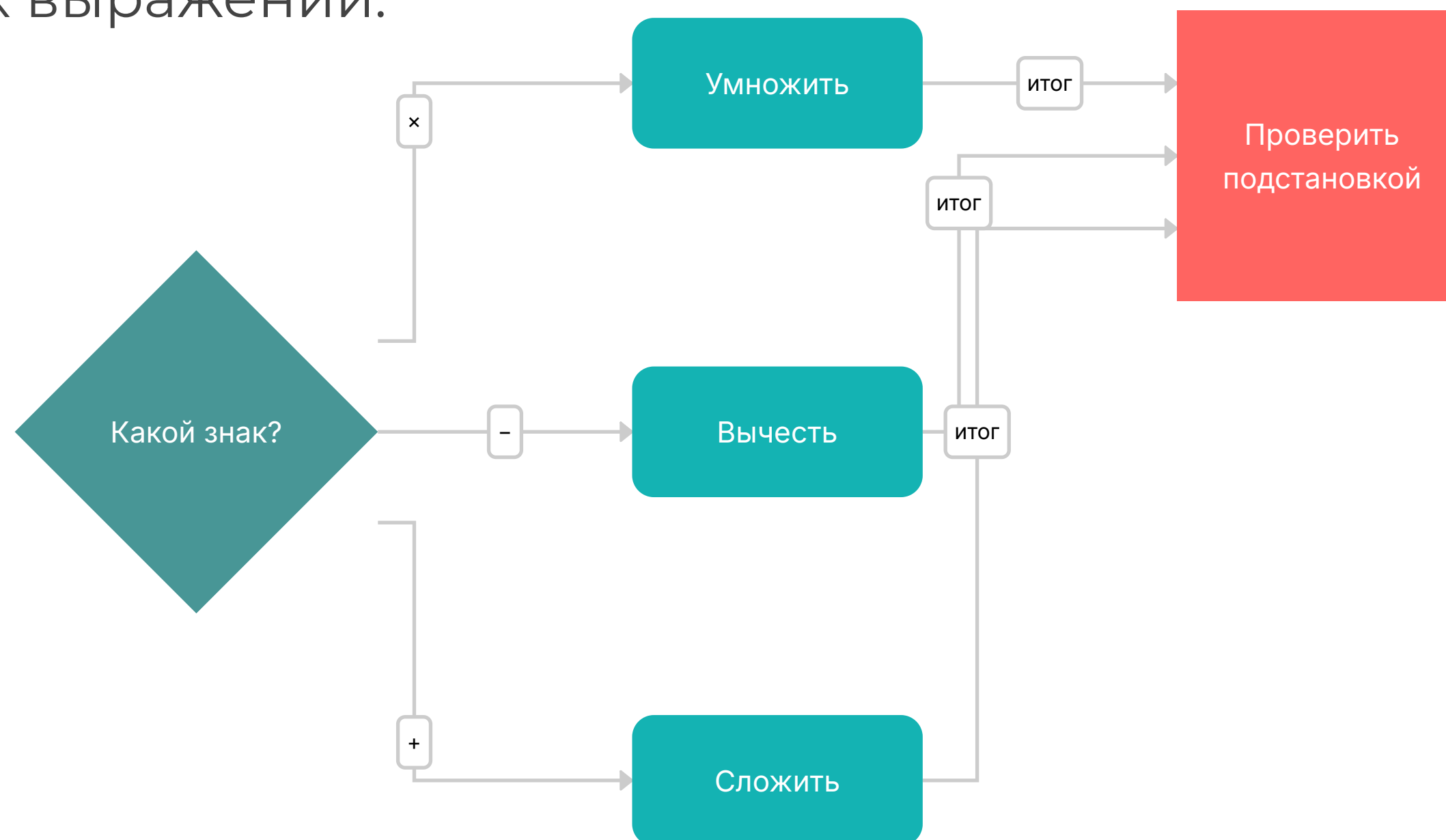
Если выражения похожи, коэффициенты объединяют напрямую. Например, $3x + 5x = 8x$, потому что складываются только числа перед буквой x , а буквенная часть остаётся прежней.

Завершение упрощения

После раскрытия скобок именно приведение подобных слагаемых делает выражение окончательно простым. Например, $4y + 3 - y - 1$ превращается в $3y + 2$ и становится удобным для дальнейших вычислений.

Как выбрать сумму, произведение или разность

Схема показывает порядок выбора действия при преобразовании алгебраических выражений.



Типичные примеры и ответы

Выражение	Преобразование	Результат
$(x + 4) + (3x - 1)$	Сложение	$4x + 3$
$2(x - 5)$	Раскрытие скобок	$2x - 10$
$(6a - 2) - (a + 3)$	Изменение знаков	$5a - 5$

Короткие примеры показывают, как разные операции приводят к упрощённому виду выражения.

Во всех примерах сначала выполняется нужное действие, а затем приводятся подобные слагаемые.

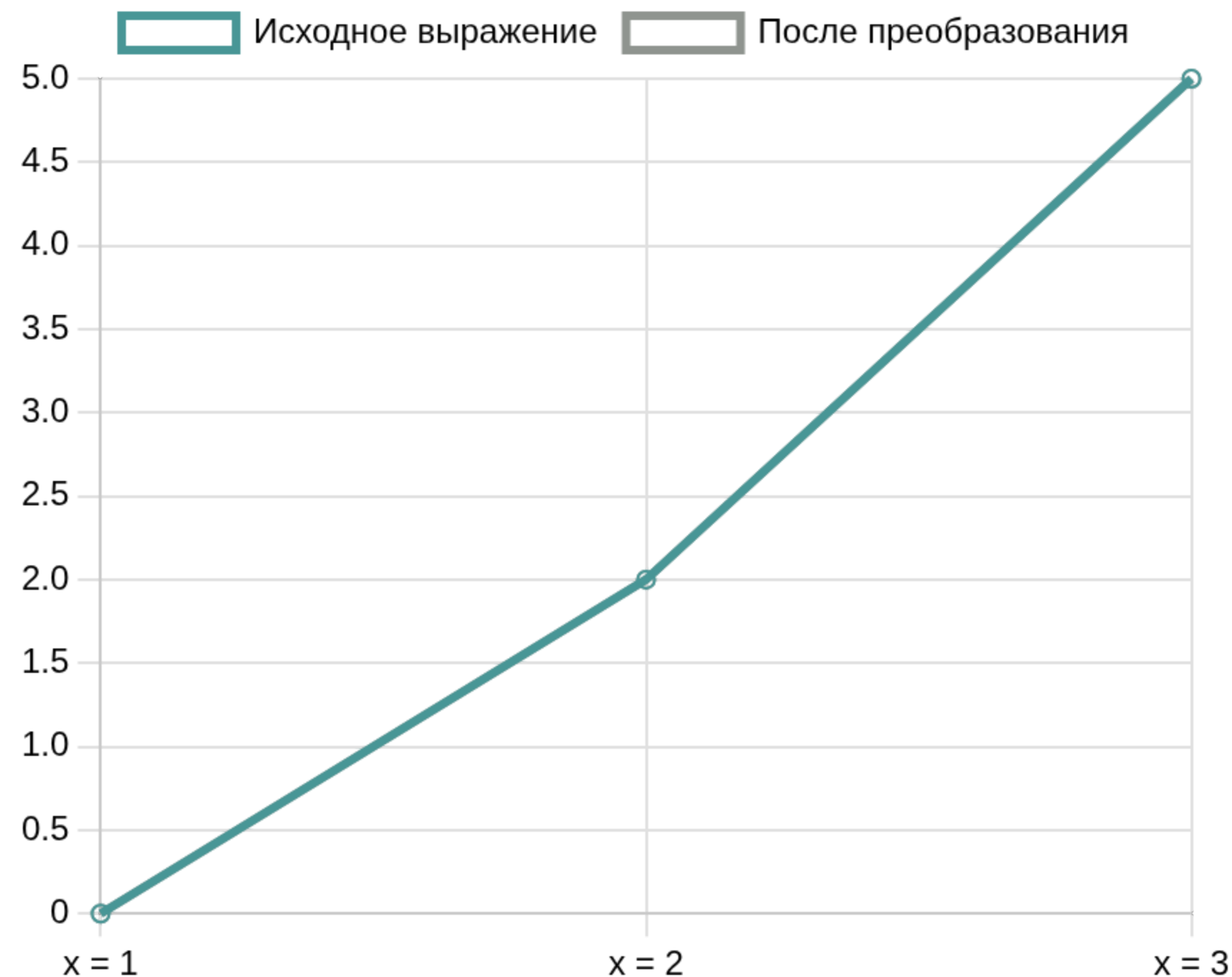
Учебные примеры по теме преобразования выражений.

Проверка правильности преобразований подстановкой

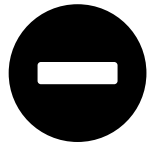
Обе линии на графике совпадают, потому что исходная запись и упрощённый вид выражения дают одинаковые значения при одних и тех же x .

Совпадение результатов подтверждает, что преобразование выполнено верно и значение выражения не изменилось.

Проверка выражения $(2x + 3) + (x - 5)$ и его вида $3x - 2$ при $x = 1, 2, 3$.



Типичные ошибки в работе с выражениями



Забывают изменить знаки

При вычитании скобок ученики часто оставляют знаки внутри без изменений. Из-за этого ответ получается неверным, хотя сама запись выглядит аккуратно и почти не вызывает сомнений.



Умножают не все члены

При раскрытии скобок иногда умножают только первый член и пропускают остальные. Важно помнить: каждый член многочлена должен быть умножен на одночлен или другое выражение.



Складывают неподобные слагаемые

Нельзя объединять x и x^2 , потому что это разные слагаемые. Складывать можно только одинаковые буквенные части, иначе преобразование теряет смысл.



Ошибаются в степенях

При умножении одночленов нужно правильно работать со степенями. Буквенные части не складывают как числа, а применяют правила умножения степеней с одинаковым основанием.

Где используются эти преобразования

01 Решение уравнений

При решении уравнений выражения часто нужно упростить до более удобного вида. Сумма, разность и произведение помогают убрать скобки и быстрее найти неизвестное число.

03 Работа с формулами

Формулы в алгебре и геометрии нередко содержат несколько переменных и скобок. Преобразования позволяют сделать запись удобнее и подготовить её к подстановке чисел.

02 Геометрические задачи

В задачах на площади и периметры буквенные выражения записывают короче и яснее. После преобразований легче сравнивать стороны фигур и выполнять вычисления без лишних действий.

04 Изучение функций

При исследовании функций важно уметь менять вид выражения и проверять результат подстановкой. Эти навыки помогают понимать, как меняется значение формулы при разных значениях переменной.

Три операции, которые упрощают алгебру

Сумма, произведение и разность помогают превращать длинные выражения в короткие и понятные. Если уверенно раскрывать скобки, менять знаки и приводить подобные слагаемые, алгебра становится заметно проще.

