

Числовая окружность: основа работы с углами и тригонометрическими значениями

Геометрическая модель, где любой угол превращается в точные $\sin$, $\cos$, $\tan$ и ctg .



Зачем в 10 классе изучают числовую окружность

Она связывает алгебру и геометрию через точки на окружности радиуса 1. Отсчёт углов ведётся против часовой стрелки для положительных величин и по часовой — для отрицательных; повторяемость через 2π упрощает работу с любыми углами.



Определение числовой окружности и ее элементы

Числовая окружность — это окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Начальная точка соответствует углу 0 и имеет координаты (1;0).

1

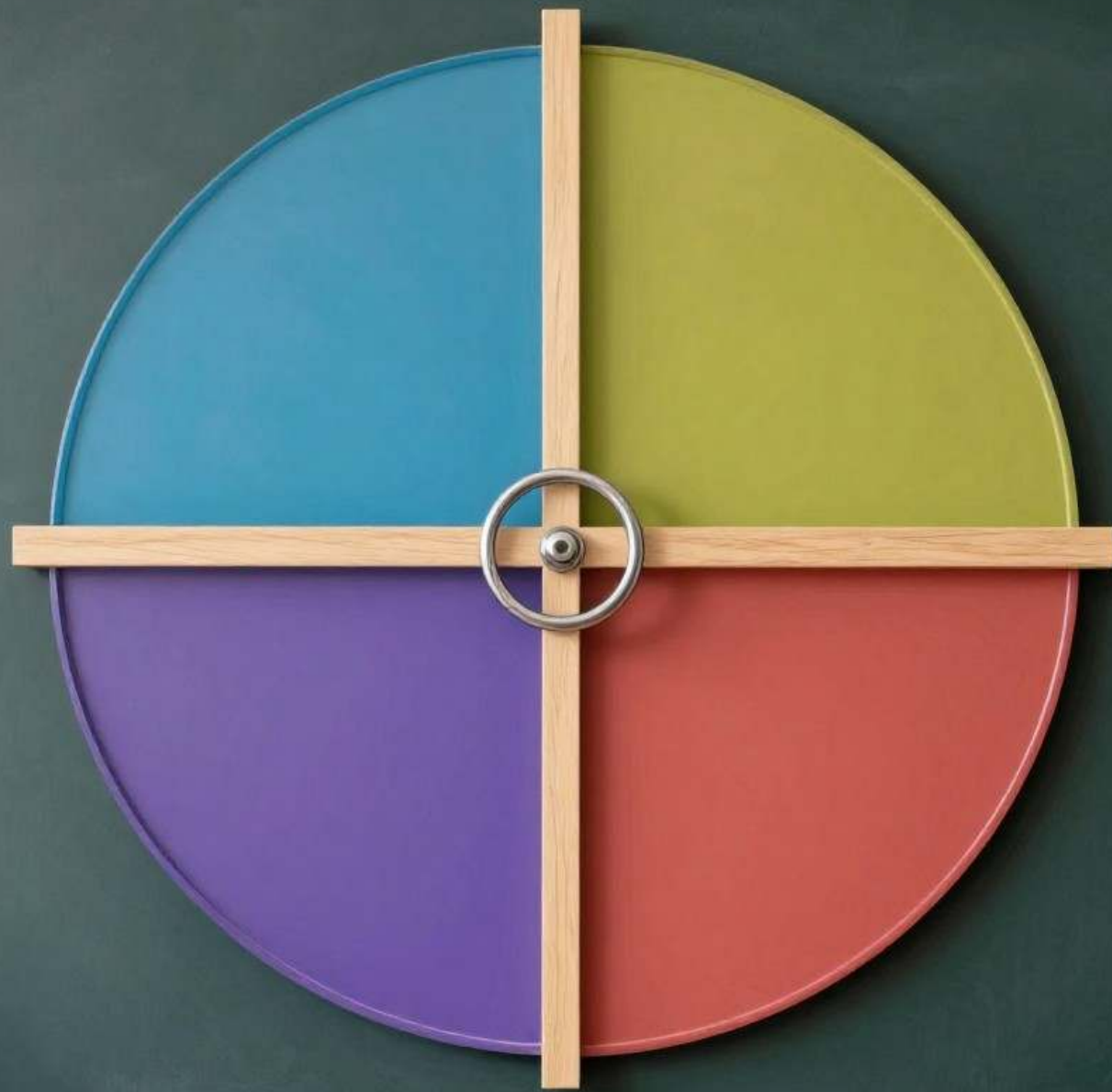
Положительное направление обхода совпадает с движением против часовой стрелки. Таким образом, каждый угол порождает единственную точку окружности.

2

Угол задаёт положение точки, а точка однозначно определяет ориентированный угол. Измерять его можно как в градусах, так и в радианах.

3

Четверти координатной плоскости и знаки функций



Знаки в I и II четвертях

В I четверти $x > 0$ и $y > 0$, поэтому $\cos \alpha > 0$ и $\sin \alpha > 0$. Здесь удобно быстро проверять, что точка лежит правее оси Oy и выше оси Ox.

Знаки в III и IV четвертях

Во II четверти $x < 0$, $y > 0$: $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$; в III — $x < 0$, $y < 0$, значит $\cos \alpha < 0$ и $\sin \alpha < 0$; в IV — $x > 0$, $y < 0$, значит $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha < 0$. Опорные точки $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$ фиксируют ориентацию.

Точные значения для основных углов

α	Координаты (x;y)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	(1;0)	0	1	—
$\pi/6$	($\sqrt{3}/2$;1/2)	1/2	$\sqrt{3}/2$	1/ $\sqrt{3}$
$\pi/4$	($\sqrt{2}/2$; $\sqrt{2}/2$)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	(1/2; $\sqrt{3}/2$)	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	(0;1)	1	0	—
π	(-1;0)	0	-1	0
$3\pi/2$	(0;-1)	-1	0	—
2π	(1;0)	0	1	0

Учебный материал по тригонометрии и единичной окружности (школьный курс).

Используйте единичную окружность, чтобы получать координаты точек и сразу выписывать значения $\sin$, $\cos$ и $\tan$.

Точки на осях дают $\sin$ или $\cos$ равным 0 или ± 1 , а $\tan$ «исчезает» там, где $\cos \alpha = 0$; это помогает действовать без калькулятора.

1 радиан — это центральный угол, который опирается на дугу длиной 1 при радиусе 1.

2π

Полный оборот равен 2π радиан, поэтому периодичность функций становится естественной и наглядной.

Свойства радианной меры и определения единичной окружности.

Соответствие градусов и радианов

Замечайте масштаб: 90° соответствует $\pi/2$, а значит каждый шаг в четверть оборота легко переводится в радианы.

Таблица подтверждает строгую пропорциональность мер и задаёт «каркас» для решения задач на углы без вычислительной рутины.

Опорные значения, вытекающие из формулы перевода $\alpha^\circ = \alpha \cdot \pi / 180$ (и обратной).

Синус и косинус как координаты точки



Ордината = $\sin \alpha$

Та же точка имеет ординату, равную $\sin \alpha$. Благодаря этому знак $\sin \alpha$ сразу определяется по положению точки относительно оси Ox .



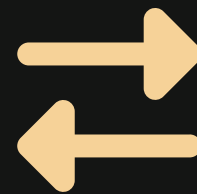
Опорные точки 0 и $\pi/2$

Для $\alpha=0$ точка (1;0), значит $\cos 0=1$ и $\sin 0=0$. Для $\alpha=\pi/2$ точка (0;1), значит $\cos(\pi/2)=0$ и $\sin(\pi/2)=1$.



Абсцисса = $\cos \alpha$

На единичной окружности точка, соответствующая углу α , имеет абсциссу, равную $\cos \alpha$. Это превращает вычисление косинуса в считывание координаты по оси Ox .



Углы на окружности как «проекция»

Отслеживайте, как поворот меняет координаты: вместе со сменой положения точки меняются и значения функций. Геометрия помогает не ошибаться в знаках.



Опорные точки π и $3\pi/2$

При $\alpha=\pi$ точка (-1;0): $\cos \pi=-1$, $\sin \pi=0$. При $\alpha=3\pi/2$ точка (0;-1): $\cos=0$, $\sin=-1$ — удобно для быстрых ответов.

Тангенс и котангенс на числовой окружности

$\tan \alpha$ задаётся отношением $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$, поэтому он существует только при $\cos \alpha \neq 0$. На окружности это означает: где абсцисса равна 0, $\tan$ не определён.

1

$\operatorname{ctg} \alpha$ задаётся отношением $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$, значит он существует только при $\sin \alpha \neq 0$. Соответственно, где ордината равна 0, ctg оказывается недоступен.

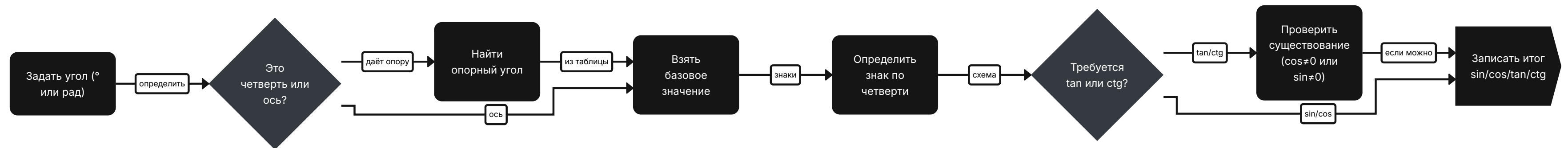
2

Особенно важно помнить про осевые углы: при $\alpha = \pi/2$ и $3\pi/2$ $\cos \alpha = 0$, а при $\alpha = 0$ и π $\sin \alpha = 0$. Это сразу отсеивает неверные варианты в задачах.

3

Алгоритм нахождения тригонометрического значения по окружности

Пошаговая схема для вычислений $\sin$, $\cos$, $\tan$ и ctg по положению точки на единичной окружности.



Знаки синуса и косинуса по четвертям

Знак синуса определяется по положению точки относительно оси Ox , а знак косинуса — по положению относительно оси Oy : достаточно посмотреть, где точка лежит.

Единичная окружность делает чтение знаков механическим: $\sin$ меняет знак при переходе через Ox , $\cos$ — при переходе через Oy .

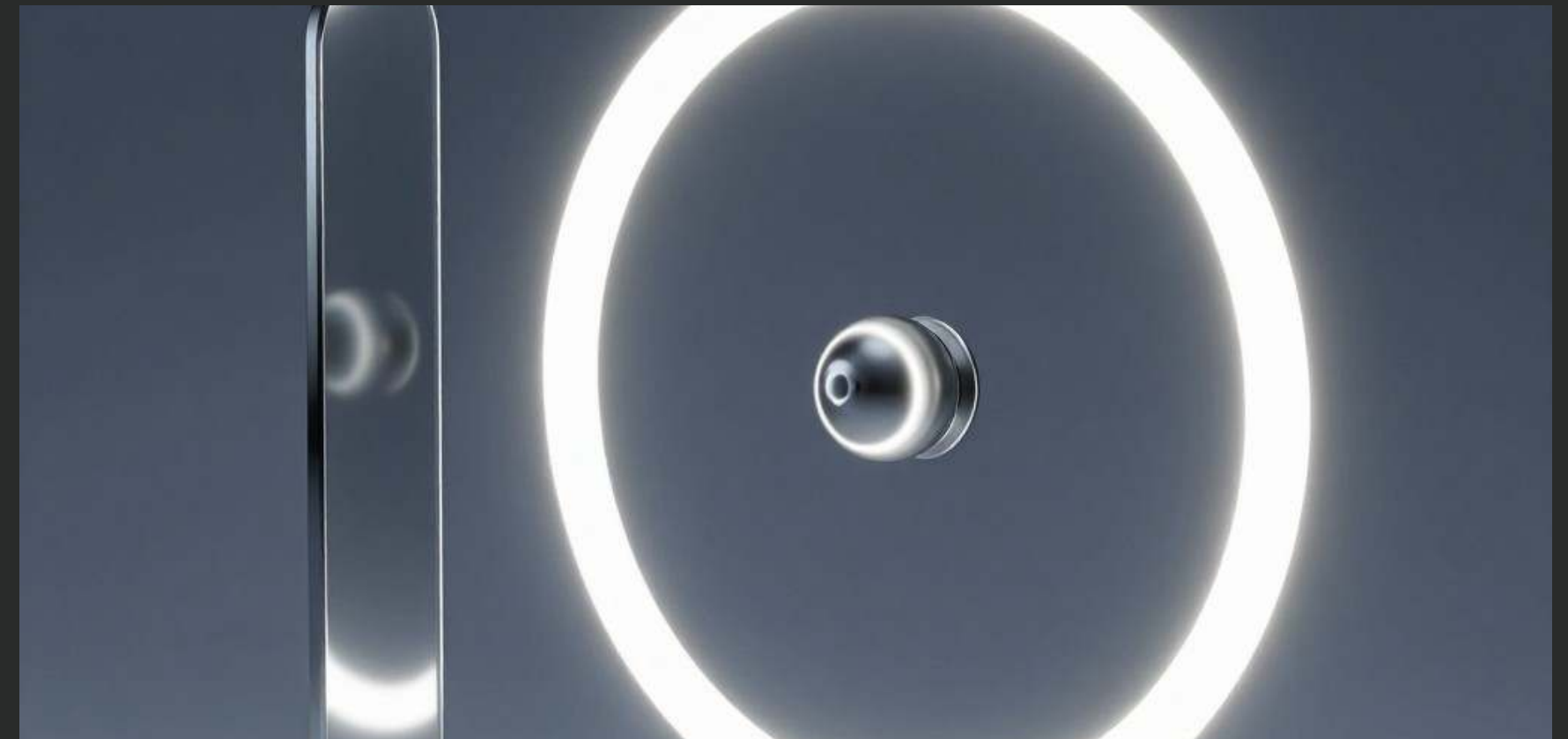
Собственные учебные выводы на основе свойств координат точек единичной окружности (дата: 12.05.2026).

Симметрия на числовой окружности: истории для рисунка



Отражение через ось Ox : «переворачиваем» высоту

Пусть точка $M(x; y)$ лежит на единичной окружности. Отражение относительно оси Ox отправляет её в $M'(x; -y)$: абсцисса остаётся прежней, а ордината меняет знак. Поэтому $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, а $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, и на окружности дуги для α и $-\alpha$ симметричны относительно Ox .



Отражение через ось Oy и разворот относительно начала координат

Когда мы отражаем точку $M(x; y)$ относительно оси Oy , получаем $M''(-x; y)$: меняется знак абсциссы. А симметрия относительно начала координат переводит $M(x; y)$ в $(-x; -y)$, что соответствует переходу к углам $\pi - \alpha$ и $-\alpha$. На иллюстрации это видно по парным точкам и дугам, соответствующим этим углам.

Периодичность тригонометрических функций

1
Поворот на полный оборот 2π радиан возвращает точку на единичной окружности в исходное положение. Поэтому $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha$ и $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$ для любого целого k .

2
С тангенсом и котангенсом ситуация проще: они зависят не от точки на окружности напрямую, а от соотношения координат. Поэтому период для них равен π : $\tan(\alpha + \pi k) = \tan \alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg} \alpha$.

3
Практическая ценность периодичности — перенос больших углов в «основной промежуток». Так легче определять знак и использовать опорные значения без вычислений на калькуляторе.

4
При решении уравнений периодичность помогает перечислить все решения. Сначала находят решения в диапазоне $0 \dots 2\pi$, затем дополняют их сдвигами на нужное количество периодов.

Опорные значения для быстрого вычисления

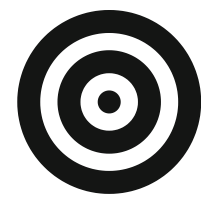
Углы	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$	$0, 1, 0, -1$	$1, 0, -1, 0$	$0, \text{ не сущ.}, 0, \text{ не сущ.}$
$\pi/6, \pi/4, \pi/3, 2\pi$	$1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 0$	$\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2, 1/2, 1$	$\sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}, 0$

В таблице собраны ключевые углы: для каждого указаны $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\tan \alpha$ (если $\tan$ определён). Для осевых положений тангенс не существует, так как $\cos \alpha = 0$.

Точки осей дают значения $0, 1, -1$, а дробные углы дают сочетания рациональных и корней. Неопределённость $\tan$ появляется ровно там, где $\cos$ обращается в ноль.

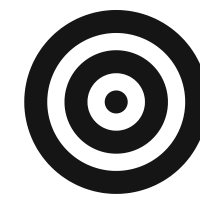
Учебные опорные значения для единичной окружности (дата: 12.05.2026).

Решение уравнений с опорой на окружность



$\sin \alpha = a$: ищем точки по ординате

Для уравнения $\sin \alpha = a$ на единичной окружности рассматривают точки, у которых ордината равна a . Если $|a| < 1$, решений обычно два на отрезке $0 \dots 2\pi$; при $|a| = 1$ — одно.



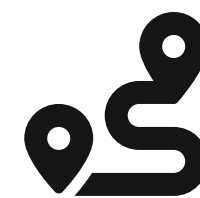
$\cos \alpha = b$: ищем точки по абсциссе

Уравнение $\cos \alpha = b$ сводится к поиску точек с нужной абсциссой b . При $|b| < 1$ возможны два решения в $0 \dots 2\pi$, при $|b| = 1$ — одно, а при $|b| > 1$ — решений нет.



Проверка на область значений и точность

Геометрия на окружности автоматически подсказывает ограничения: синус и косинус принимают только значения от -1 до 1 . Это снижает риск неверных ответов и помогает быстро проверить смысл полученных значений.



Сколько решений и где они расположены

В типичном диапазоне $0 \dots 2\pi$ решения находятся как пары точек симметричных относительно осей или по окружности. Такой подход упрощает подсчёт решений и формирует уверенность в ответе.

Графики $\sin x$ и $\cos x$ и их связь с окружностью

По положению точки на окружности ордината даёт $\sin x$. График $\cos x$ получается как «смещение» по фазе: $\cos x$ — это синус при сдвиге на $\pi/2$.

Выделенные точки на графике показывают, где синус меняет знак и достигает ± 1 , а при сопоставлении с окружностью становится ясно, почему это происходит именно в этих углах.

Построение по свойствам единичной окружности: $\sin$ — ордината точки, $\cos$ — абсцисса (дата: 12.05.2026).

Применение числовой окружности в задачах школьной математики

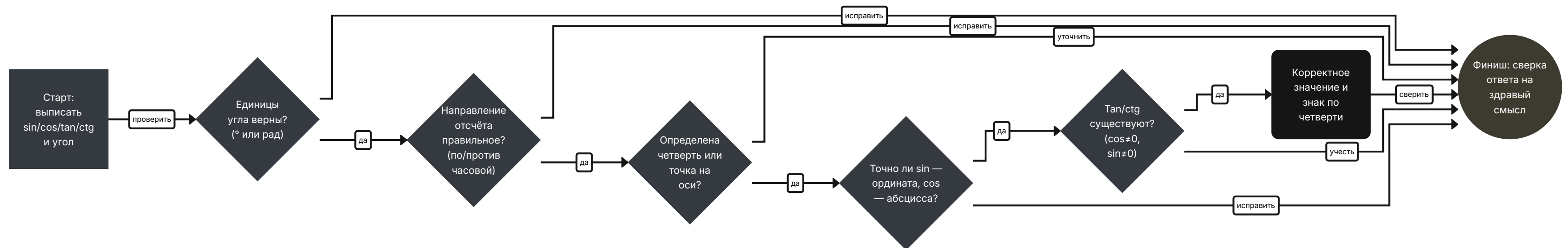
Окружность помогает решать уравнения и неравенства с тригонометрическими функциями: вы видите, какие значения $\sin$, $\cos$, $\tan$, ctg достижимы, и где располагаются соответствующие точки.

В задачах на углы модель связывает направление поворота с координатами. По сути, вы переводите «угол на плоскости» в «точку на окружности» и дальше читаете нужные величины по знакам и значениям координат.

Работа с $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ и $\operatorname{ctg} x$ естественно ведёт к анализу графиков: периодичность, амплитуда и смена знаков становятся не набором правил, а прямым следствием положения точки.

Самопроверка: типичные ошибки при работе с числовой окружностью

Схема выстраивает порядок проверки: единицы → направление → четверть → координаты → существование функции.



Как восстановить угол по координатам точки

Шаг 1: извлекаем $\sin$ и $\cos$ прямо из координат

Если известны координаты точки на единичной окружности, то абсцисса сразу показывает $\cos \alpha$, а ордината — $\sin \alpha$. Далее по знакам координат определяется четверть.

Шаг 2: четверть и опорный угол дают искомый поворот

Затем находят опорный угол: по модулю подходящей координаты выбирают базовое значение из опорных случаев. Для двух возможных направлений смотрят, соответствует ли точка нужной четверти, и восстанавливают угол.



Цифровая окружность как «каркас» тригонометрии

Числовая окружность объединяет углы, координаты и тригонометрические функции в единую модель. Она позволяет точно находить $\sin$, $\cos$, $\tan$ и ctg , определять знаки, использовать симметрию и периодичность при решении задач.